показано, как получить оценку снизу для малых знаменателей, заданных целочисленными многочленами в пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{Q}_{p_1}\times\mathbb{Q}_{p_2}$. Доказанная теорема является решением уточненной задачи В. Г. Спринджука (1980 г.) в рассматриваемом пространстве.

Пусть $P = P(t) = a_nt^n + \dots + a_1t + a_0 \in \mathbb{Z}[t]$, $a_n \neq 0$, $H = \max(|a_n|, \dots, |a_1|)$. Пусть $p_i \geqslant 2$ — простое число, $\mathbb{Q}_{p_i}$ — поле p_i-адических чисел, $|\cdot|_{p_i}$ — p_i-адическая норма $(i = 1,2)$. Положим $\mathcal{O} = \mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{Q}_{p_1}\times\mathbb{Q}_{p_2}$. Определим меру $\overline{\mu}$ в $\mathcal{O}$ как произведение меры Лебега μ_1 в $\mathbb{R}$, меры Лебега μ_2 в $\mathbb{C}$ и меры Хаара μ_{p_i} в $\mathbb{Q}_{p_i}$ $(i = 1,2)$, т. е. $\overline{\mu} = \mu_1\mu_2\mu_{p_1}\mu_{p_2}$. Пусть $T = I\times K\times D_{p_1}\times D_{p_2} \in \mathcal{O}$, где I — интервал в $\mathbb{R}$, K — круг в $\mathbb{C}$, D_{p_i} — диск в $\mathbb{Q}_{p_i}$ $(i = 1,2)$. Пусть $\Psi:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_+$ — монотонно убывающая функция, $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$, (v_1,v_2,v_3,v_4) — векторы в $\mathbb{R}^4$. Рассмотрим систему неравенств

$$|P(x)| < H^{-v_1}\Psi(H)^{\lambda_1}, \quad |P(z)| < H^{-v_2}\Psi(H)^{\lambda_2},$$
$$|P(\omega_1)| < H^{-v_3}\Psi(H)^{\lambda_3}, \quad |P(\omega_2)|_p < H^{-v_4}\Psi(H)^{\lambda_4}, \tag{1}$$

когда $(x,z,\omega_1,\omega_2) \in \mathcal{O}$ и $v_1 + 2v_2 + v_3 + v_4 = n - 4$, $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$. Пусть $M_n(v,\lambda)$ — множество точек $(x,z,\omega_1,\omega_2) \in T$, для которых (1) имеет бесконечно много решений в многочленах P. Доказана

Теорема. *Если* $n \geqslant 4$ *и* $\sum_{H=1}^{\infty}\Psi(H) < \infty$, *то* $\overline{\mu}(M_n(v,\lambda)) = 0$.

В доказательстве используется метод *существенных и несущественных областей* Спринджука, развитый и усовершенствованный В. Берником, В. Бересневичем и другими представителями Минской школы теории чисел.

Работа выполнена в рамках ГП БРФФИ «Конвергенция».

Литература

1. Арнольд В. И. *Малые знаменатели и проблема устойчивости движения в классической и небесной механике* // УМН. 1963. Т. 18, № 6. С. 91–192.

2. Спринджук В. Г. *Метрическая теория диофантовых приближений.* М.: Наука, 1977.

3. Ptashnik B., Ilkiv V., Kmit I., Pol ishchuk V. *Nonlocal boundary value problems for partial differential equations.* Kiev: Naukova dumka, 2002.

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ СТЕПЕННОМ МНОЖЕСТВЕ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ ЧЕТНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

С.Г. Красовский

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь

kras@im.bas-net.by

Рассматриваем исходную линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1_A}$$

с кусочно-непрерывной ограниченной матрицей $A(t)$, совокупностью характеристических показателей $\lambda(A) \equiv (\lambda_1(A),\dots,\lambda_n(A)) \in \mathbb{R}^n$, упорядоченной по неубыванию, и коэффициентом неправильности Гробмана $\sigma_\Gamma(A)$.

Определение 1 [1]. *Характеристической степенью Демидовича* $d[x]$ решения $x(t)$ системы (1_A) называется число

$$d[x] \equiv \varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\ln\|x(t)\| - \lambda[x]t}{\ln t},$$

где $\lambda[x] \equiv \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\ln\|x(t)\|$ — характеристический показатель Ляпунова того же решения.

Рассмотрим множество нормальных фундаментальных матриц $X_A(t)$ системы (1_A), характеристические показатели $\lambda_i(A)$, $i=1,\ldots,n$, вектор-столбцов которых упорядочены по неубыванию: $\lambda_1(A)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n(A)$. Рассмотрим также характеристические степени Демидовича $d_i(A)$, $i=1,\ldots,n$, вектор-столбцов этих матриц. Решения, входящие в матрицу $X_A(t)$ и отвечающие одному и тому же характеристическому показателю и различным характеристическим степеням, очевидно, линейно-независимы и, следовательно, число их не превышает кратности данного характеристического показателя. Поэтому линейная система (1_A) имеет конечное число различных характеристических степеней, которое, с учетом их кратности, равно порядку системы. Среди множества матриц $X_A(t)$ выбрав те, для которых сумма характеристических степеней Демидовича $d_i(A)$, $i=1,\ldots,n$, вектор-столбцов минимальна, получим совокупность (в общем случае неупорядоченную) $d(A)\equiv(d_1(A),\ldots,d_n(A))\in\mathbb{R}^n$ характеристических степеней системы (1_A).

Рассмотрим также сингулярно возмущенную систему

$$\varepsilon\dot{y}=A(t)y+Q(t)y,\quad y\in\mathbb{R}^n,\quad t\geqslant 0,\quad \varepsilon\in(0,1], \qquad (1_{(A+Q)/\varepsilon})$$

с кусочно-непрерывной матрицей $Q(t)$, имеющей показатель Ляпунова $\lambda[Q]\leqslant\sigma<0$.

Определение 2 [2]. *Спектральным сигма-множеством* системы $(1_{A/\varepsilon})$ называется множество

$$S_\sigma(A/\varepsilon)\equiv\bigcup_{\lambda[Q]\leqslant-\sigma}\lambda((A+Q)/\varepsilon)\subset\mathbb{R}^n.$$

Определение 3. *Степенным спектральным сигма-множеством*, соответствующим точке $\mu\in S_\sigma(A/\varepsilon)$, назовем множество

$$D_\sigma(\mu)\equiv\bigcup_{\lambda[Q]\leqslant-\sigma,\quad \lambda((A+Q)/\varepsilon)=\mu} d((A+Q)/\varepsilon)\subset\mathbb{R}^n.$$

Справедлива

Теорема. *Для произвольного $n\in\mathbb{N}$ и любых действительных чисел $\lambda_1\leqslant\ldots\leqslant\lambda_{2n}$, $\sigma_0>2\max\limits_{k=\overline{1,n}}\{\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}\}\equiv 2L$, существует $2n$-мерная система (1_A) с бесконечно дифференцируемыми ограниченными коэффициентами и их производными, имеющая характеристические показатели $\lambda_i(A)=\lambda_i$, $i=\overline{1,2n}$, и коэффициент неправильности Гробмана $\sigma_\Gamma(A)=\sigma_0$ такая, что спектральное сигма-множество $S_\sigma(A/\varepsilon)$ системы $(1_{A/\varepsilon})$ при всяких $\sigma>0$ и $0<\varepsilon<(\sigma_0-2L)\sigma^{-1}$ содержит множество B точек $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_{2n})\in\mathbb{R}^{2n}$, такое, что $\mathrm{mes}_{2n}B>0$, $\mathrm{mes}_{2n}B\to+\infty$ при $\varepsilon\to+0$, а каждой внутренней точке μ множества B соответствует характеристическое степенное множество $D_\sigma(\mu)$ системы $(1_{A/\varepsilon})$, совпадающее с $\mathbb{R}^{2n}$.*

Литература

1. Демидович Б. П. *Об одном обобщении критерия устойчивости Ляпунова для правильных систем* // Матем. сб. 1965. Т. 66(108), № 3. С. 344–353.

2. Izobov N. A., Krasovskii S. G. *On existence of a measure unbounded exponential spectral quantization on symplectic manifolds* // Mem. Differential Equations Math. Phys. 1998. Vol. 13. P. 140–144.