ОЦЕНКИ СНИЗУ НОРМЫ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПАРАМЕТРОМ-МНОЖИТЕЛЕМ

А.В. Липницкий

Институт математики НАН Беларуси. Минск, Беларусь
odu@im.bas-net.by

Будем рассматривать класс В. М. Миллионщикова [1, 2] M_μ матриц вида

$$A_\mu(t) := \ln d_k \operatorname{diag}[1, -1], \quad 2k-2 \leqslant t < 2k-1,$$

$$A_\mu(t) := (\mu + b_k) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2k-1 \leqslant t < 2k,$$

где $\mu, b_k \in \mathbb{R}$, $d_k > 1$, $k \in \mathbb{N}$.

В. М. Миллионщиков использовал матрицы такого вида в работах [1, 2] (см. также [3]) при построении неправильных по Ляпунову линейных дифференциальных систем с предельно периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Позднее он поставил задачу [4] оценки характеристических показателей уравнения

$$\ddot{x} = (\alpha + \beta \cos t + \gamma \cos \omega t)x, \quad \alpha, \beta, \gamma, \omega \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0,$$

в случае $\omega = \sqrt{2}$. Проведенные А. Ф. Филипповым и другими исследователями [5–7] компьютерные вычисления устанавливают положительность старшего показателя Ляпунова этого уравнения с иррациональным $\omega \in \mathbb{R}$ при почти всех значениях параметров β, γ.

В работе [8] доказана положительность на множестве значений параметра μ положительной меры Лебега старшего характеристического показателя системы

$$\dot{x} = A_\mu(t)x, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant 0, \qquad (1_\mu)$$

где $A_\mu \in M_\mu$, при всех $d_k \equiv d > 16$. В настоящей работе доказано отсутствие равномерных по $t \geqslant 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ оценок сверху нормы решений системы (1_μ) и в случае $d_k \geqslant d > 1$, $k \geqslant 1$.

Для любых $\mu \in [0, \pi)$, $t, s \geqslant 0$ через $X_{A_\mu}(t, s)$ обозначим матрицу Коши системы (1_μ) и положим

$$x(\mu, t) := X_{A_\mu}(t, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Справедлива следующая

Теорема. *При любых* $d_k \geqslant d > 1$, $k \geqslant 1$, *интеграл* $\int_0^\pi \|x(\mu, t)\|\, d\mu$ *неограниченно возрастает при* $t \to +\infty$.

Литература

1. Миллионщиков В. М. *Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами* // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 3. С. 391–396.

2. Миллионщиков В. М. *Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 11. С. 1979–1983; 1974. Т. 10, № 3. С. 569.

3. Липницкий А. В. *О решении В.М. Миллионщиковым проблемы Еругина* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 12. С. 1615–1620.

4. Олейник О. А., Шубин М. А. *Международная конференция выпускников мехмата МГУ* // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37, № 6. С. 261–285.

5. Филиппов А. Ф. *О возмущениях линейной системы с квазипериодическими коэффициентами* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 8. С. 1343–1348.

6. Broer H, Simo C. *Hill's equation with quasi-periodic forcing: resonance tongues, instability pockets and global phenomena* // Bul. Soc. Bras. Mat. 1998. Vol. 29. P. 253–293.

7. Romero L. A., Torczynski J. R., Kraynik A. M. *A scaling law near the primary resonance of the quasiperiodic Mathieu equation* // Nonlinear Dynamics. 2011. Vol. 64. № 4. P. 395–408.

8. Липницкий А. В. *О положительности старшего показателя Ляпунова в однопараметрических семействах линейных дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1095–1101.

ФОРМУЛА ДЛЯ ИНВАРИАНТНЫХ РАВНОМЕРНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Е.К. Макаров

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь

jcm@im.bas-net.by

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с ограниченной кусочно-непрерывной матрицей коэффициентов A и матрицей Коши X_A. В работе [1] в связи с изучением минимальных оценок Малкина введено следующее

Определение. Инвариантным равномерным показателем $\iota[x]$ ненулевого решения x системы (1) называется верхняя грань множества $N(x)$ верхних пределов

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{1}{(t_k - s_k)} \ln \frac{\|x(t_k)\|}{\|x(s_k)\|}$$

по всевозможным последовательностям $\tau_k = (t_k, s_k)$, $t_k \geqslant s_k \geqslant 0$, $k \in \mathbb{N}$, таким что $t_k - s_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ и $\inf\limits_k t_k s_k^{-1} > 1$.

Используя подход, предложенный в [2] и примененный в [1] к оценкам Малкина для матрицы Коши системы (1), можно получить следующее утверждение.

Теорема. *Для любого ненулевого решения x системы* (1) *справедливо равенство*

$$\iota[x] = \lim_{\theta\to1+0} \overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{(\theta-1)s} \ln \frac{\|x(\theta s)\|}{\|x(s)\|}. \tag{2}$$

Соотношение (2) может рассматриваться как одномерный частный случай формулы для вычисления инвариантного особого показателя

$$\mathrm{I}_0(A) = \lim_{\theta\to1+0} \overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{(\theta-1)s} \ln \|X_A(\theta s, s)\|,$$

который является достижимой границей подвижности инвариантных равномерных показателей при экспоненциальных возмущениях [1].

Сравнение полученных утверждений с результатами работы [3] позволяет утверждать, что инвариантные равномерные и инвариантные особые показатели играют ту