5. Филиппов А. Ф. *О возмущениях линейной системы с квазипериодическими коэффициентами* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 8. С. 1343–1348.

6. Broer H, Simo C. *Hill's equation with quasi-periodic forcing: resonance tongues, instability pockets and global phenomena* // Bul. Soc. Bras. Mat. 1998. Vol. 29. P. 253–293.

7. Romero L. A., Torczynski J. R., Kraynik A. M. *A scaling law near the primary resonance of the quasiperiodic Mathieu equation* // Nonlinear Dynamics. 2011. Vol. 64. № 4. P. 395–408.

8. Липницкий А. В. *О положительности старшего показателя Ляпунова в однопараметрических семействах линейных дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1095–1101.

ФОРМУЛА ДЛЯ ИНВАРИАНТНЫХ РАВНОМЕРНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Е.К. Макаров

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь

jcm@im.bas-net.by

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с ограниченной кусочно-непрерывной матрицей коэффициентов A и матрицей Коши X_A. В работе [1] в связи с изучением минимальных оценок Малкина введено следующее

Определение. Инвариантным равномерным показателем $\iota[x]$ ненулевого решения x системы (1) называется верхняя грань множества $N(x)$ верхних пределов

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{1}{(t_k - s_k)} \ln \frac{\|x(t_k)\|}{\|x(s_k)\|}$$

по всевозможным последовательностям $\tau_k = (t_k, s_k)$, $t_k \geqslant s_k \geqslant 0$, $k \in \mathbb{N}$, таким что $t_k - s_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ и $\inf\limits_k t_k s_k^{-1} > 1$.

Используя подход, предложенный в [2] и примененный в [1] к оценкам Малкина для матрицы Коши системы (1), можно получить следующее утверждение.

Теорема. *Для любого ненулевого решения* x *системы* (1) *справедливо равенство*

$$\iota[x] = \lim_{\theta\to1+0} \overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{(\theta-1)s} \ln \frac{\|x(\theta s)\|}{\|x(s)\|}. \tag{2}$$

Соотношение (2) может рассматриваться как одномерный частный случай формулы для вычисления инвариантного особого показателя

$$\mathrm{I}_0(A) = \lim_{\theta\to1+0} \overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{(\theta-1)s} \ln \|X_A(\theta s, s)\|,$$

который является достижимой границей подвижности инвариантных равномерных показателей при экспоненциальных возмущениях [1].

Сравнение полученных утверждений с результатами работы [3] позволяет утверждать, что инвариантные равномерные и инвариантные особые показатели играют ту же роль по отношению к системам с малым ростом решений, что и показатели Боля по отношению к экспоненциально дихотомическим системам.

Литература

1. Макаров Е. К. *Об оценках Малкина для нормы матрицы Коши линейной дифференциальной системы* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 3. С. 328–334.

2. Макаров Е. К. *О взаимосвязи между характеристическими функционалами и слабыми характеристическими показателями* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 3. С. 393–399.

3. Барабанов Е. А., Бекряева Е. Б. *О вычислении показателей малого роста линейных дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 11. С. 1510–1511.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ СТЕПЕННО УБЫВАЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Н.С. Нипарко

Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь

nad-den@mail.ru

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной и равномерно ограниченной на временно́й полуоси $t \geqslant 0$ матрицей коэффициентов $A(\cdot)$. Через $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ обозначим показатели Ляпунова системы (1). Наряду с системой (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{y} = (A(t) + Q(t))y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

где кусочно-непрерывная $n \times n$-матрица-возмущение $Q(\cdot)$ принадлежит тому или иному классу возмущений, которые будут указаны ниже. В соответствии с принятыми обозначениями $\lambda_1(A+Q) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A+Q)$ — показатели Ляпунова системы (2).

Рассмотрим следующие три класса возмущений — классы Z_0^n, Exp_0^n и Deg_0^n, состоящие из кусочно-непрерывных $n \times n$-матриц $Q(\cdot)$, удовлетворяющих соответственно условиям: $\|Q(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$ (класс Z_0^n), $\|Q(t)\| \leqslant c_Q \exp(-\sigma_Q t)$ при всех $t \geqslant 0$ (класс Exp_0^n) и $\|Q(t)\| \leqslant c_Q t^{-r_Q}$ при всех $t \geqslant 0$ (класс Deg_0^n), где c_Q, σ_Q и r_Q — положительные постоянные (свои для каждой матрицы $Q(\cdot)$). Класс Z_0^n называется классом убывающих к нулю возмущений, а классы Exp_0^n и Deg_0^n — классами соответственно экспоненциально и степенно убывающих к нулю возмущений. Очевидны собственные включения $\mathrm{Exp}_0^n \subset \mathrm{Deg}_0^n \subset \mathrm{Z}_0^n$.

Пусть $\mathfrak{M} \subset \mathrm{Z}_0^n$ — какое-либо подмножество класса Z_0^n. Показатели Ляпунова системы (1) называются устойчивыми при возмущениях из класса $\mathfrak{M}$, если $\lambda_i(A+Q) = \lambda_i(A)$ для всех $i = 1, \ldots, n$ и любой матрицы $Q(\cdot) \in \mathfrak{M}$. То, что показатели Ляпунова систем (1) могут быть неустойчивыми даже при экспоненциально убывающих возмущениях их матриц коэффициентов, установлено еще О. Перроном [1]. К настоящему времени необходимые и достаточные условия устойчивости показателей Ляпунова системы (1) получены только для классов Z_0^n [2, 3] и Exp_0^n [4] возмущений.

В работе [5] получено необходимое условие устойчивости показателей Ляпунова при возмущениях из класса Deg_0^n. В его формулировке, которую мы не приводими,