О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ С ЗАДАННЫМ ЧИСЛОМ НУЛЕЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭМДЕНА — ФАУЛЕРА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

В.В. Рогачев

Московский государственный университет, Москва, Россия
valdakhar@gmail.com

Рассматривается обобщенное уравнение типа Эмдена — Фаулера произвольного порядка

$$y^{(n)} + p_0|y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \quad n > 2, \quad k > \mathbb{R}, \quad k > 1, \quad p_0 \neq 0. \tag{1}$$

Доказывается существование решений для уравнения (1) произвольного порядка с заданным числом нулей на заданных интервалах или полуинтервалах. Доказательства данных фактов опираются на теорему 2 из [1] или теорему 1 из [2]. Для случая уравнения порядка $n = 3, 4$ схожие результаты опубликованы в [3] и [4], там же рассматривается случай $k \in (0, 1)$.

Теорема 1. *Для любого целого $m \geqslant 2$, четного $n > 2$ и действительного $k > 1$, $p_0 > 0$, $-\infty < a < b < +\infty$, у уравнения (1) существует решение, определенное на отрезке $[a, b]$, равное нулю в точках a, b и имеющее на отрезке ровно m нулей.*

Теорема 2. *Для любого целого $m \geqslant 2$, нечетного $n > 2$ и действительного $k > 1$, $p_0 \neq 0$, $-\infty < a < b < +\infty$, у уравнения (1) существует решение, определенное на отрезке $[a, b]$, равное нулю в точках a, b и имеющее на отрезке ровно m нулей.*

Теорема 3. *Для любого целого $n > 2$ и действительного $k > 1$, $p_0 > 0$, $-\infty < a < b < +\infty$, у уравнения (1) существует решение, определенное на полуинтервале $[a, b)$, равное нулю в точке a и имеющее на полуинтервале счетное число нулей.*

Теорема 4. *Для любого нечетного $n > 2$ и действительного $k > 1$, $p_0 < 0$, $-\infty < a < b < +\infty$, у уравнения (1) существует решение, определенное на полуинтервале $(a, b]$, равное нулю в точке b и имеющее на полуинтервале счетное число нулей.*

Литература

1. Astashova I. V. *On special solutions to Emden — Fowler type differential equations* // Abstracts of Czech-Georgian Workshop on Boundary Value Problems. (WBVP) January, 20–24. Brno, Czech Republic. http://users.math.cas.cz/šremr/wbvp2014/abstracts/astashova.pdf

2. Astashova I. V. *On Existence of Quasi-Periodic Solutions to a Nonlinear Higher-Order Differential Equation* // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations «QUALITDE–2013» Dedicated to the 100th birthday anniversary of Prof. L. Magnaradze. December 20–22, 2013. Tbilisi, Georgia. http://www.rmi.ge/eng/QUALITDE-2013/Astashova_workshop_2013.pdf

3. Асташова И. В., Рогачев В. В. *О существовании решений с заданным числом нулей для уравнений типа Эмдена — Фаулера третьего и четвертого порядков* // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 11. С. 1509–1510.

4. Асташова И. В., Рогачев В. В. *О числе нулей осциллирующих решений уравнений третьего и четвертого порядков со степенной нелинейностью* // Нелінійні коливання (the Ukrainian for «Nonlinear Oscillations»). 2014. Т. 17, № 1. С. 16–31.

УПОРЯДОЧЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ БЛУЖДАЕМОСТИ РАЗНЫХ РАНГОВ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

И.Н. Сергеев

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, Москва, Россия
igniserg@gmail.com

Обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

задаваемых непрерывными оператор-функциями $A : \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ и отождествляемых с ними, а через $\mathcal{S}_*(A)$ — множество всех ненулевых решений системы $A \in \mathcal{M}^n$.

Определение [1]. При каждом $k = 1, \ldots, n$ обозначим через $\mathcal{H}^k$ множество линейных операторов $L \in \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ ранга k каждый и зададим для любого решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ любой системы $A \in \mathcal{M}^n$ пару его (*нижних*) *показателей блуждаемости* и *блуждания* k*-го ранга* формулами

$$\rho_k(x) = \inf_{L\in\mathcal{H}^k} \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\gamma(Lx,t), \quad \eta_k(x) = \varliminf_{t\to\infty} \inf_{L\in\mathcal{H}^k} \frac{1}{t}\gamma(Lx,t),$$

в которых для каждого $L \in \mathcal{H}^k$ при $k > 1$ обозначено

$$\gamma(Lx,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \left| \frac{d}{d\tau} \frac{Lx(\tau)}{|Lx(\tau)|} \right| d\tau, & Lx(\tau) \neq 0,\ \tau \in [0,t]; \\ \infty, & \text{иначе,} \end{cases}$$

а при $k = 1$ обозначено

$$\gamma(Lx,t) = \pi \cdot \nu(Lx,t),$$

где $\nu(Lx,t)$ — число нулей функции Lx на промежутке $(0;t]$ с той поправкой, что если в какой-либо точке $\tau \in [0;t]$ выполнено двойное равенство $Lx(\tau) = L\dot{x}(\tau) = 0$, то сразу считаем $\nu(Lx,t) = \infty$.

Показатели блуждаемости ρ_1 и блуждания η_1 самого младшего ранга совпадают с полной σ и векторной ζ *гиперчастотами* [2], а показатели блуждаемости ρ_n и блуждания η_n самого старшего ранга — с показателем блуждаемости ρ и показателем блуждания η, введенными ранее в [3].

Теорема 1. *Для любого решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ любой системы $A \in \mathcal{M}^n$ выполнена цепочка соотношений*

$$\eta_1(x) = \eta_2(x) = \ldots = \eta_n(x) \leqslant \rho_1(x) \leqslant \rho_2(x) \leqslant \ldots \leqslant \rho_n(x).$$

Ни одно из неравенств в теореме 1 не обращается, вообще говоря, в равенство уже при $n = 2$, что и подтверждает

Теорема 2. *Существует такая система $A \in \mathcal{M}^2$, что для каждого ее решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ выполнена цепочка соотношений*

$$\eta_1(x) = \eta_2(x) < \rho_1(x) < \rho_2(x).$$

Литература

1. Сергеев И. Н. *Обобщенные характеристики блуждаемости решений дифференциальной системы* // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 11. С. 1498–1500.

2. Сергеев И. Н. *Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем* // Мат. сб. 2013. Т. 204, № 1. С. 119–138.

3. Сергеев И. Н. *Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы* // Изв. РАН. Сер. мат. 2012. Т. 76, № 1. С. 149–172.