КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ С НЕСТАНДАРТНОЙ АСИМПТОТИКОЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

И.В. Асташова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
ast@diffiety.ac.ru

Рассматривается уравнение

$$y^{(n)} + p_0\,|y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \quad n \geqslant 1, \quad k > 1, \quad p_0 \neq 0. \tag{1}$$

В [1] при $n = 2$, в [2] при $n = 3, 4$ доказано, что при $p_0 < 0$ все решения $y(x)$ уравнения (1) с вертикальной асимптотой $x = x^*$ имеют степенную асимптотику:

$$y(x) = C(x^* - x)^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad x \to x^* - 0, \quad \alpha = \frac{n}{k-1}, \quad C^{k-1} = \frac{1}{|p_0|}\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha + j). \tag{2}$$

В [2] доказано, что при любых $n \geqslant 2$, $k > 1$, $p_0 < 0$, $x^* \in \mathbb{R}$ существует решение $y(x)$ уравнения (1), имеющее вид (2), а при $5 \leqslant n \leqslant 11$ существует $(n-1)$-параметрическое семейство таких решений. Можно было бы ожидать, что при всех n решения с вертикальной асимптотой имеют степенную асимптотику (гипотеза И. Т. Кигурадзе). Оказалось [3], что у уравнения (1) существуют решения с вертикальной асимптотой, имеющие асимптотику, отличную от степенной.

Теорема 1. *При $n = 12, 13, 14$, $p_0 < 0$ существуют такие $k > 1$, что уравнение* (1) *имеет решение, для которого*

$$y^{(j)}(x) = (x^* - x)^{-\alpha - j}\, h_j(\ln(x^* - x)), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{3}$$

где h_j — непостоянные непрерывные положительные периодические функции.

Отметим, что для больших n существование решений вида (3) следует из [4].

Выяснилось также, что подобное асимптотическое поведение характерно и для знакопеременных решений уравнения (1). Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любого целого $n > 2$ и любого действительного $k > 1$ существует такая знакопеременная периодическая функция $h(s)$, что для любых $p_0 > 0$ и $x^* \in \mathbb{R}$ функция*

$$y(x) = p_0^{1/(k-1)}(x^* - x)^{-\alpha} h(\log(x^* - x)), \quad -\infty < x < x^*,$$

является решением уравнения (1).

Получены следствия из теоремы 1 о существовании кнезеровских решений с нестепенной асимптотикой и из теоремы 2 для уравнений четного и нечетного порядков.

Литература

1. Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. *Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1990.

2. Асташова И. В. *Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений* // В сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа: научное издание под ред. И. В. Асташовой. М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2012. С. 22–288.

3. Astashova I. V. *On power and non-power asymptotic behavior of positive solutions to Emden — Fowler type higher-order equations* // Advances in Difference Equations, 2013. DOI: 10.1186/10.1186/1687-1847-2013-220.

4. Kozlov V. A. *On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations*// Ark. Mat. 1999. Vol. 37, no. 2. P. 305–322.

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В СМЫСЛЕ СОВПАДЕНИЯ ОТРАЖАЮЩИХ ФУНКЦИЙ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЙ И ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

М.С. Белокурский

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
drakonsm@ya.ru

Теорема. *Пусть* $a_1(t)$ *и* $a_2(t)$ *— непрерывные нечетные функции. Тогда дифференциальная система*

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\cos t}{1+3x^2}-a_1(t)\frac{x+y-\sin t}{1+3x^2}+a_2(t)\frac{y-x^3}{1+3x^2},$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{3x^2\cos t}{1+3x^2}+a_1(t)\frac{x+y-\sin t}{1+3x^2}+a_2(t)\left(y-x^3-\frac{y-x^3}{1+3x^2}\right) \qquad (1)$$

эквивалентна системе

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\cos t}{1+3x^2},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{3x^2\cos t}{1+3x^2}, \qquad (2)$$

т. е. их отражающие функции [1, с. 62] *совпадают.*

Следствие. *Если непрерывные нечетные функции* $a_1(t)$ *и* $a_2(t)$ *имеют периоды, несоизмеримые с* 2π, *то квазипериодическая дифференциальная система* (1) *будет эквивалентна* 2π*-периодической дифференциальной системе* (2).

В качестве примера рассмотрим квазипериодическую систему

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\cos t+2\sin\sqrt{3}t\sin t-2x\sin\sqrt{3}t+y(\sin 2\sqrt{3}t-2\sin\sqrt{3}t)-x^3\sin 2\sqrt{3}t}{1+3x^2},$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-2\sin\sqrt{3}t\sin t+2x\sin\sqrt{3}t+2y\sin\sqrt{3}t+3x^2\cos t+3x^2y\sin 2\sqrt{3}t-3x^5\sin 2\sqrt{3}t}{1+3x^2}.$$

С помощью алгоритма, приведенного в [2], эту систему можно представить в виде (1):

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\cos t}{1+3x^2}-2\sin\sqrt{3}t\frac{x+y-\sin t}{1+3x^2}+\sin 2\sqrt{3}t\frac{y-x^3}{1+3x^2},$$

PolotskSU