СВОЙСТВО АТТРАКТОРА

Л.Д. Блистанова

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
ddemidova@mail.ru

Определение 1. Множество $M \subset R$ называется *инвариантным по отношению к динамической системе* $f(p,t)$, если оно состоит из траекторий этой динамической системы, т. е. из $p \in M$ следует $f(p,I) \subset M$.

Определение 2. Множество $M \subset R$ называется *инвариантным по отношению к динамической системе* $f(p,t)$ в положительном направлении, если оно состоит из положительных полутраекторий этой динамической системы, т. е. из $p \in M$ следует $f(p,I^+) \subset M$. Множество M называют также инвариантным для полупотока.

Ясно, что компактное инвариантное для полупотока множество состоит из полутраекторий, устойчивых по Лагранжу в положительном направлении.

Определение 3. *Аттрактором динамической системы* $f(p,t)$, *заданной в полном метрическом пространстве* R, называется асимптотически устойчивое компактное множество A.

Асимптотическая устойчивость A означает, что оно устойчиво по Ляпунову и обладает свойством $\rho(f(p,t),A) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ при выполнении условия $\rho(p,A) < \delta$, где δ — некоторое положительное число. Если δ оказывается равным $+\infty$, то аттрактор A называется *глобальным*.

Теорема. *Для того чтобы динамическая система* $f(p,t)$ *в евклидовом пространстве* $R = E^n$ *имела аттрактор* A, *необходимо и достаточно, чтобы существовало множество* $M \subset R$ *со следующими свойствами:*

1) *множество* M *вместе со своей некоторой* δ*-окрестностью является компактным и инвариантным для полупотока множеством;*

2) *при некотором* $\delta' < \delta$ *существует число* $0 < T < +\infty$ *такое, что полутраектории, начинающиеся в множестве* $S(M,\delta)\backslash S(M,\delta')$, *покидают его за время* $t \leqslant T$.

Замечание 1. Условия теоремы могут показаться труднопроверяемыми, но это не так. Подобные условия дают функции Ляпунова, используемые в теореме Йошизавы о диссипативности.

Замечание 2. Приведенная теорема по сути является теоремой о неподвижной точке. Действительно, инвариантное множество является неподвижной точкой отображения замкнутой топологии компактного множества M в себя, индуцированного динамической системой $f(p,t)$.

О РАЗРЕШИМОСТИ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

А.Н. Бондарев

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь
alex-bondarev@tut.by

Рассматривается краевая задача для уравнения Ляпунова вида [1]

$$dX/dt = A(t)X(t) + X(t)B(t) + F_0(t) + \lambda F_1(t), \tag{1}$$

с условием

$$\sum_{s=1}^{k} M_s X(t_s) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \omega, \tag{2}$$

где $(t,X)\in I\times\mathbb{R}^{n\times m}$, $A\in\mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, $B\in\mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{m\times m})$, $F_i\in\mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{n\times m})$ $(i=0,1)$, M_s — заданные постоянные $(n\times n)$-матрицы, $\lambda\in\mathbb{R}$, $I=[0,\omega]$.

Введены следующие обозначения:

$$\gamma=\|\Psi^{-1}\|,\quad m_s=\|M_s\|,\quad \alpha_2=\max_t\|A_2(t)\|,\quad \beta_2=\max_t\|B_2(t)\|,\quad h_i=\max_t\|F_i(t)\|,$$

$$\varepsilon=|\lambda|,\quad \lambda_1=\max_t\|U(t)\|,\quad \lambda_2=\max_t\|U^{-1}(t)\|,\quad u_s=\|U_s\|,\quad U_s=U(t_s),$$

$$\mu_1=\max_t\|V(t)\|,\quad \mu_2=\max_t\|V^{-1}(t)\|,\quad v_s=\|V_s\|,\quad V_s=V(t_s),$$

$$q=\gamma\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2(\alpha_2+\beta_2)\omega\sum_{s=1}^{k}m_su_sv_s,\quad N=\gamma\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2\omega h\sum_{s=1}^{k}m_su_sv_s,$$

где $t\in I$, $s=\overline{1,k}$, $h=h_0+\varepsilon h_1$, $\|\cdot\|$ — согласованная норма матриц, Ψ — линейный оператор, $\Psi Y=\sum_{s=1}^{k}M_sU_sYV_s$, $U(t)$ и $V(t)$ — фундаментальные матрицы уравнений $dU/dt=A_1(t)U$ и $dV/dt=VB_1(t)$ соответственно, при этом матрицы $A_1(t)$, $B_1(t)$ выбираются определенным образом [2, гл. 1], $A_2(t)=A(t)-A_1(t)$, $B_2(t)=$ $=B(t)-B_1(t)$.

В данной работе, являющейся продолжением [1] и развитием [3, 4], с помощью подхода [2, гл. 1] получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости и оценка области локализации решения задачи (1), (2).

Теорема. *Пусть оператор Ψ обратим и выполнено условие $q<1$. Тогда задача* (1), (2) *однозначно разрешима; ее решение $X(t)$ представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию* (2), *при этом справедлива оценка $\|X(t)\|\leqslant N/(1-q)$.*

На основе используемой методики получено в формально замкнутой форме, представляющей собой двусторонний аналог функции Грина, точное решение данной задачи, из которого при $B(t)\equiv 0$ следует аналогичное решение задачи [2, гл. 1].

Литература

1. Бондарев А. Н. *О многоточечной краевой задаче для матричного уравнения Ляпунова с параметром* // XV Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2013): тез. докл. Междунар. науч. конф. 2013. Ч. 1. С. 44–45.

2. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998.

3. Бондарев А. Н., Лаптинский В. Н. *О многоточечной краевой задаче для матричного уравнения Ляпунова* // Тр. ИСА РАН: Динамика неоднородных систем. 2008. Т. 32, № 3. С. 19–26.

4. Бондарев А. Н., Лаптинский В. Н. *Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае сильного вырождения краевых условий* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 6. С. 776–784.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА КВАДРАТИЧНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ТРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.И. Булгаков, Е.К. Жилко, С.Н. Алыцкая

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

Рассмотрим систему вида

$$\dot{x}=a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{22}y^2+a_{13}xz+a_{23}yz+a_{33}z^2+a_{10}x+a_{20}y+a_{30}z,$$