О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕАВТОНОМНЫХ ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Е.В. Вареникова

Филиал Брянского государственного университета им. акад. И. Г. Петровского, Новозыбков, Россия
varenikovaev@yandex.ru

В настоящей работе с помощью отражающей функции (ОФ) исследуется одна двумерная дифференциальная кубическая система с периодическими по времени коэффициентами.

Напомним, что ОФ [1] системы

$$\dot{x} = X(t, x), \quad t \in R, \quad x \in D \subset R, \tag{1}$$

с общим решением $\varphi(t, t_0, x_0)$, является вектор-функция $F(t, x)$, определяемая формулой $F(t, x) = \varphi(-t, t, x)$. Если $F(t, x)$ есть ОФ для системы (1), то $F(-\omega, x)$ есть отображение за период $[-\pi; \pi]$ (отображение Пуанкаре) этой системы.

Если $\Delta(t, x)$ есть вектор-функция, удовлетворяющая соотношению

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} + \frac{\partial \Delta}{\partial x} - \frac{\partial X(t, x)}{\partial x}\Delta = 0, \tag{2}$$

то при любой непрерывной скалярной нечетной функции $\alpha(t)$ система $\dot{x} = X(t, x) + \alpha(t)\Delta(t, x)$ имеет такую же ОФ как и система (1) (см. [2]).

Теорема. *Все решения системы*

$$\frac{dx}{dt} = Ax\cos t + x^3P^2e^{2C\sin t} - 2x^2yPe^{C\sin t}\sin t + xy^2\sin t,$$

$$\frac{dy}{dt} = Bxe^{C\sin t}\cos t + x^2P^3e^{3C\sin t} - 2x^2yP^2e^{2C\sin t}\sin t + xy^2Pe^{C\sin t}\sin t, \tag{3}$$

где $P = B/(C + A)$, $A \neq -C$, *продолжимые на* $[-\pi; \pi]$, *являются периодическими.*

Доказательство. Согласно общему принципу из [1], для того чтобы продолжимое на $[-\pi; \pi]$ решение было периодическим, необходимо и достаточно, чтобы точка (x, y) была неподвижной точкой отображения Пуанкаре, то есть чтобы было $F(-\omega; x, y) = (x, y,)$, где $F(t; x, y)$ есть ОФ системы (3).

Убедиться в том, что система (3) имеет ту же ОФ, что и линейная система

$$\dot{x} = Ax\cos t, \quad \dot{y} = Bxe^{C\sin t}\cos t. \tag{4}$$

нетрудно. Согласно [2], достаточно проверить тождество (2) для вектор-функции Δ, находящейся в системе (3).

ОФ линейной системы (4), а также системы (3) имеет вид:

$$F_1 = xe^{-2A\sin t}, \quad F_2 = \frac{B}{C + A}x(e^{-(C+2A)\sin t} - e^{C\sin t}) + y.$$

Поэтому отображение за период $[-\omega; \omega]$ будут определять функции

$$U = F_1(-\omega; x, y) = xe^{2A\sin\omega}, \quad V = F_2(-\omega; x, y) = \frac{B}{C + A}x(e^{(C+2A)\sin\omega} + e^{-C\sin\omega}) + y.$$

Соответственно отображение за период $[-\pi; \pi]$ есть тождественное отображение $U = x$, $V = y$.

Это и доказывает теорему.

Литература

1. Мироненко В. И. *Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений.* Мн.: Изд-во «Университетское», 1986. 76 с.
2. Мироненко В. В. // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 10. С. 1325–1332.

КЛАССИФИКАЦИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ВПОЛНЕ РАЗРЕШИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.Н. Горбузов, В.Ю. Тыщенко

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

gorbuzov@grsu.by, valentinet@mail.ru

PolotskSU

Рассматриваются вещественные голоморфные вполне разрешимые [1] линейные системы уравнений в полных дифференциалах

$$dx = \sum_{j=1}^{m} A_j(t_1, \ldots, t_m) x dt_j \tag{1}$$

и

$$dx = \sum_{j=1}^{m} B_j(t_1, \ldots, t_m) x dt_j, \tag{2}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, квадратные матрицы $A_j = ||a_{ikj}||$ и $B_j = \|b_{ikj}\|$ размера n состоят из 1-периодических по своим аргументам голоморфных функций $a_{ikj} : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, $b_{ikj} : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

Общие решения голоморфных вполне разрешимых линейных систем уравнений в полных дифференциалах (1) и (2) определяют, соответственно, накрывающие слоения [1, 2] L^1 и L^2 на многообразии $\mathbf{R}^n \times T^m$, где T^m есть m-мерный тор.

Будем говорить, что голоморфные вполне разрешимые линейные системы уравнений в полных дифференциалах (1) и (2) **топологически (гладко, голоморфно) эквивалентны**, если существует гомеоморфизм (диффеоморфизм, биголоморфизм) $h : \mathbf{R}^n \times T^m \to \mathbf{R}^n \times T^m$, переводящий слои слоения L^1 в слои слоения L^2.

Учитывая, что группы монодромии систем (1) и (2) абелевы, на основании критериев топологической (гладкой, голоморфной) сопряженности вещественных линейных абелевых групп [2] получены критерии топологической (гладкой, голоморфной) эквивалентности этих систем.

В частности, имеют место такие утверждения.

Теорема 1. *Голоморфные вполне разрешимые линейные системы уравнений в полных дифференциалах с периодическими коэффициентами при $m > 1$ структурно неустойчивы.*

Теорема 2. *Голоморфные вполне разрешимые линейные системы уравнений в полных дифференциалах с периодическими коэффициентами при $m = 1$ гладко (голоморфно) эквивалентны тогда и только тогда, когда их группы монодромии $\mathbb{R}$ линейно сопряжены.*