соответственно, $\|\cdot\|$ — согласованная норма матриц, $\mathbb{C} = \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ — банахово пространство непрерывных $(n \times n)$-матричных функций.

Теорема *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\det N \neq 0$;
2) *матрицы* P, Q *не имеют общих характеристических чисел*;
3) $q < 1$;
4) $p/(1-q) \leqslant \rho$.

Тогда в области D_ρ *решение задачи* (1), (2) *существует и единственно. Это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением типа* [2, гл. 1] *и удовлетворяющих условию* (2), *при этом справедлива оценка*

$$\|X\|_{\mathbb{C}} \leqslant \frac{p}{1-q}.$$

Литература

1. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

2. Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И., Пугин В. В. *Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати.* Могилев: БРУ, 2012.

О ПОИСКЕ ТОЧНЫХ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

В.И. Мироненко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
vmironenko@tut.by

Рассматривается дифференциальное уравнение Риккати

$$\dot{x} = a(t) + b(t)x + c(t)x^2$$

с дважды непрерывно дифференцируемыми 2ω-периодическими коэффициентами.

Теорема. *Пусть существует число* x_o *и дважды непрерывно дифференцируемая нечетная функция* $2\alpha(t)$, *для которых при некотором решении* $m(t)$, $n(t)$, $p(t)$ *дифференциальной системы*

$$\dot{m} + an - bm = 0, \quad \dot{n} + 2ap - 2cm = 0, \quad \dot{p} - cn + bp = 0$$

выполнено тождество

$$(a - \alpha m) + (b - \alpha n)x_0 + (c - \alpha p) \equiv 0.$$

Тогда продолжимое на $[-\omega, \omega]$ *решение* $x(t)$, $x(\omega) = x_0$, *рассматриваемого дифференциального уравнения Риккати является* 2ω*-периодическим. Более того, функции* $m(t)$, $n(t)$, $p(t)$ *определяются формулами*

$$p = \frac{1}{2A}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{A}\frac{d}{dt}\left(\frac{A}{\alpha}\right) - \frac{b + 2cx_0}{\alpha}\right] + \frac{c}{\alpha},$$

$$n - 2px_0 + \frac{2cx_0 + b}{\alpha} - \frac{1}{A}\frac{d}{dt}\left(\frac{A}{\alpha}\right), \quad m = -nx_0 - px_0^2 + \frac{A}{\alpha},$$

где $A := a + bx_0 + x_0^2$.

Доказательство основано на том, что прибавление к правой части дифференциального уравнения Риккати слагаемого $\alpha(t)(m + nx_0 + px_0^2)$ не меняет отражающую функцию [1] этого уравнения. А поскольку при таком прибавлении мы получаем новое уравнение Риккати с известным постоянным решением $x(t) \equiv x_0$, то мы найдем начальные данные всех 2ω-периодических решений исходного уравнения.

Функция $\alpha(t)$ находится из того условия, что отношение $A(t)/\alpha(t)$ доопределяется до непрерывной на $\mathbf{R}$ функции. Так, например, для дифференциального уравнения

$$\dot{x} = e^{\sin t}\sin t + x\cos t + x^2 e^{-\sin t}\sin t$$

число $x_0 = 0$, $n = 0$, $m = e^{\sin t}$, $p = e^{-\sin t}$.

Литература

1. Мироненко В. И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем.* Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2004.

О ПОСТРОЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

С.В. Подолян

Могилевский государственный технологический университет, Могилев, Беларусь
mti@mogilev.by

Рассматривается задача о периодических решениях с периодом ω уравнения

$$\frac{dX}{dt} = \lambda^2 A(t)X + \lambda XB(t) + F(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times m}, \tag{1}$$

где $A(t), B(t), F(t)$ — действительные непрерывные ω–периодические матрицы подходящих размеров, $\lambda \in \mathbb{R}$.

В настоящей работе, являющейся продолжением [1] и развитием [2, 3], на основе применения метода [4, гл. II] получены коэффициентные достаточные условия существования и единственности ω-периодического решения уравнения (1), а также дан алгоритм его построения.

Примем следующие обозначения:

$$\tilde{B}(\omega) = \int_0^\omega B(\tau)d\tau, \quad \gamma = \|\tilde{B}^{-1}(\omega)\|, \quad \varepsilon = |\lambda|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|,$$

$$q_1 = \frac{1}{2}\gamma\beta^2\omega^2 + \gamma\alpha\omega, \quad q_2 = \frac{1}{2}\gamma\alpha\beta\omega^2, \quad q(\varepsilon) = q_1\varepsilon + q_2\varepsilon^2,$$

где $t \in [0, \omega]$.

Теорема. *Пусть выполнены условия:* $\det\tilde{B}(\omega) \neq 0$, $0 < q(\varepsilon) < 1$. *Тогда уравнение* (1) *имеет единственное* ω*-периодическое решение* $X = X(t, \lambda)$; *это решение представимо в виде*

$$X(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k-1} X_{k-1}(t), \tag{2}$$

где матрицы $X_{k-1}(t)$ *определяются рекуррентым интегральным соотношением типа* [4, гл. II].