где $P_i(x,y) = \sum_{r+s=i} a_{rs}x^r y^s$, $Q_i(x,y) = \sum_{r+s=i} b_{rs}x^r y^s$, $a_{rs}, b_{rs} \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $(P,Q) = 1$, $|P_n(x,y)| + |Q_n(x,y)| \not\equiv 0$.

Если для системы (1) выполняется условие

$$Q_n(x,y) \equiv y\varphi_{n-1}(x,y), \quad P_n(x,y) \equiv x\varphi_{n-1}(x,y), \tag{2}$$

где $\varphi_{n-1}(x,y)$ — однородный многочлен степени $n-1$, то система (1) называется проективно особой системой по терминологии [1], а по [2] — системой с вырожденной бесконечностью. Будем говорить, что система (1) имеет инвариантное множество M_A^r, если состоянию равновесия A этой системы инцидентны r инвариантных прямых, где $r \leqslant n$.

Теорема 1. *Если система* (1) *является проективно особой и имеет инвариантное множество* M_A^n, *то она посредством афинного преобразования переменных* x *и* y *может быть приведена к системе:*

$$\begin{aligned} dx/dt &= x[Q_{n-1}(x,y) + P_{n-2}(x,y) + Q_{n-3}(x,y) + \ldots + Q_1(x,y) + b_{00}], \\ dy/dt &= y[Q_{n-1}(x,y) + Q_{n-2}(x,y) + Q_{n-3}(x,y) + \ldots + Q_1(x,y) + b_{00}], \end{aligned} \tag{3}$$

где $Q_i(x,y)$ *— однородные многочлены степени* i $(i = \overline{1,n-1})$, $P_{n-2}(x,y)$ *— однородный многочлен степени* $n-2$, *причем* $P_{n-2}(x,y) \not\equiv Q_{n-2}(x,y)$.

Теорема 2. *Пусть* M_O^n *и* M_N^n *— инвариантные множества проективно особой системы* (1), *не имеющей параллельных инвариантных прямых. Тогда эта система имеет не более одного состояния равновесия на экваторе сферы Пуанкаре.*

Следствие 1. *Проективно особая система* (1) *при* $n = 4$ *не имеет бесконечно удаленного состояния равновесия, если* $M_{K_1}^n$ *и* $M_{K_2}^n$ *— инвариантные множества этой системы, а на инвариантной прямой* K_1K_2 *расположено четыре состояния равновесия* (1).

Следствие 2. *Пусть проективно особая система* (1) *при* $n = 3$ *имеет два инвариантных множества* $M_{K_1}^3$ *и* $M_{K_2}^3$, *но не имеет параллельных инвариантных прямых. Тогда для наличия у этой системы бесконечно удаленного состояния равновесия необходимо отсутствие инвариантной прямой* $L \notin M_{K_1}^3 \cup M_{K_2}^3$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках единого заказа наряда для Адыгейского госуниверситета.

Литература

1. Горбузов В. Н. *Проективный атлас траекторий дифференциальных систем второго порядка.* arXiv:1401.1000. http://arxiv.org/pdf/1401.1000.pdf

2. Долов М. В. *О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвертой степени с вырожденной бесконечностью* // Вестн. Нижегородского ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2010. №8. С. 132–137.

СИСТЕМА С ПЛОСКО-ПОЛУРЕГУЛЯРНОЙ ФУНКЦИЕЙ СООТВЕТСТВИЯ

Д.Н. Чергинец

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
chirgin@tut.by

Система

$$\dot{x} = -\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{k+4} - \sum_{k=0}^{\infty} b_k x y^{k+3} - x^2 y, \quad \dot{y} = \frac{-xy^2}{n+2} + x^2 y\left(B + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k\right) + Cx^3, \tag{1}$$

а также условия монодромности ее начала координат

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{2n} = 0, \quad b_0 = b_1 = \cdots = b_n = 0, \quad a_{2n+1} > 0, \quad (n+2)B^2 - 4(n+1)C < 0$$

получены в работе [1]. Целью дальнейших исследований является получение условий на параметры системы (1), при выполнении которых положение равновесия $O(0,0)$ является центром. При $n = 0$ необходимые условия центра получены в [2]. Диаграмма Ньютона, построенная для системы (1) способом, указанным в [3], имеет ограниченное ребро с угловым коэффициентом $-\frac{n+1}{1}$, поэтому значение параметра $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ существенно влияет на построение функции последования.

Построим асимптотическое представление функции последования, используя метод, указанный в работе [2]. Функция последования является композицией функций соответствия, которые для системы (1) имеют вид

$$r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \exp\left(-\frac{k_{-2(n+1)}}{c^{2(n+1)}} + \cdots + \frac{k_{-1}}{c} + k_0 + \ln c + k_1 c + k_2 c^2 + \cdots + o(c^m)\right),$$

где $r(0) = c$, $k_{-2(n+1)} > 0$. Функции, имеющие такое представление, называются плоско-полурегулярными.

Асимптотическое разложение функции последования имеет вид

$$r(2\pi) = K_1 c + K_2 c^2 + K_3 c^3 + K_4 c^4 + K_5 c^5 + \ldots,$$

где

$$K_1 = \exp\left(\frac{2\pi B(n+2)^{3/2}}{(n+1)\sqrt{4C(n+1) - B^2(n+2)}}\right).$$

Пусть $B = 0$. Тогда $K_1 = 1$, $K_2 = K_4 = 0$. Второе условие центра получаем из коэффициента

$$K_3 = (8C^2 b_1 + c_2)\tilde{K}_3, \quad \tilde{K}_3 \neq 0.$$

Теорема. *Для того чтобы начало координат системы* (1) *являлось центром, необходимо выполнение следующих двух условий*:

1) $B = 0$;
2) $8C^2 b_1 + c_2 = 0$.

Литература

1. Садовский А. П. *Условия возникновения проблемы центра и фокуса для A_3 -системы* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 10. С. 1743–1753.

2. Чергинец Д. Н. *Проблема различения центра и фокуса для одного класса систем с ненулевыми кубическими членами* // Вестник Гродненского гос. ун-та. Сер. 2. Естественные науки. 2006. № 3. С.10–16.

3. Садовский А. П. *Проблема центра и фокуса для аналитических систем с нулевой линейной частью. I* // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 5. С. 790–799.