РЕГУЛЯТОР ПОЛНОГО УСПОКОЕНИЯ И ОДНОВРЕМЕННОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

А.В. Метельский, В.В. Карпук

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь
ametelskii@gmail.com

Пусть объект управления описывается дифференциальной системой с запаздыванием

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=0}^{m}A_i x(t-ih)+bu(t),\quad t>0,\quad x(t)=\eta(t),\quad t\in[-mh,0]. \tag{1}$$

Здесь x — n-вектор-столбец решения системы (1) ($n\geqslant 2$); $0<h$ — постоянное запаздывание; A_i — постоянные $n\times n$-матрицы ($i=\overline{0,m}$); b — постоянный n-вектор; η — начальное кусочно-непрерывное состояние; u — скалярное управление. Считаем, что в уравнении (1) $b=e_n=[0;\ldots;0;1]'$ (штрих $'$ обозначает операцию транспонирования).

Пусть $A(\lambda)=A_0+A_1\lambda+\ldots+A_m\lambda^m$ ($\lambda\in\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел), $w(p,e^{-ph})=|pE_n-A(e^{-ph})|$ — характеристический квазиполином ($p\in\mathbb{C}$) системы (1). Множество корней $\sigma=\{p\in\mathbb{C}\mid w(p,e^{-ph})=0\}$ характеристического уравнения называют спектром системы (1). Для разрешимости задачи назначения конечного спектра (FSA — finite spectrum assignment) в классе регуляторов с распределенными запаздываниями необходимо и достаточно чтобы

$$\operatorname{rank}[pE_n-A(e^{-ph}),b]=n\quad \forall p\in\mathbb{C}. \tag{2}$$

Это условие, называемое условием спектральной управляемости, необходимо и достаточно также для полной управляемости системы (1). Поэтому возникает вопрос: нельзя ли одним регулятором обеспечить конечный спектр и асимптотическую устойчивость замкнутой системы и полное успокоение исходной системы: $x(t)\equiv 0$, $t\geqslant t_1$, где $t_1>0$ — некоторый момент времени — один и тот же для всех начальных состояний? Такой регулятор назовем FSC-регулятором (F=finite spectrum, S=stabilization, C=calming). В докладе предлагается алгоритм построения FSC-регулятора для спектрально управляемой системы (1).

Пусть $a_1(\lambda),a_2(\lambda)$ — полиномы, $q'(\lambda)=[q_1(\lambda),\ldots,q_{n+1}(\lambda)]$, $g'(\lambda)=[g_1(\lambda),\ldots,g_{n+1}(\lambda)]$ — векторные полиномы с действительными коэффициентами; $\hat{q}'_{ki}(\lambda)=[\hat{q}_{ki1}(\lambda),\ldots,\hat{q}_{ki,n+1}(\lambda)]$ — векторные полиномы, возможно, с комплексными коэффициентами ($k=\overline{1,L}$, $i=\overline{0,L_1}$, L,L_1 — натуральные числа); $P^*=\{p_k\in\mathbb{C},\ k=\overline{1,L}\}$ — самосопряженный набор различных комплексных чисел, в частности, действительных; λ_D — оператор сдвига: $\lambda_D^i\varphi(t)=\varphi(t-ih)$ (φ — функция, $i=0,1,\ldots$). Рассмотрим динамический регулятор по типу обратной связи:

$$u(t)=-e_n'A(\lambda_D)x(t)+x_{n+1}(t),$$

$$\dot{x}_{n+1}(t)=q'(\lambda_D)\tilde{x}(t)+\sum_{k=1}^{L}\sum_{i=0}^{L_1}\int\limits_0^h\hat{q}'_{ki}(\lambda_D)\tilde{x}(t-s)e^{p_ks}\frac{s^i}{i!}ds+a_1(\lambda_D)y(t),$$

$$\dot{y}(t)=g'(\lambda_D)\tilde{x}(t)+a_2(\lambda_D)y(t),\quad t>0, \tag{3}$$

где $\tilde{x}(t)=[x_1(t),\ldots,x_{n+1}(t)]'$; $x_{n+1}(t),y(t)$ — вспомогательные переменные. Для отрицательных значений аргумента переменные $x_i(t)$, $i=\overline{1,n+1}$, $y(t)$, если они не заданы, считаем произвольными кусочно-непрерывными функциями. Параметры регулятора (3) выбираются такими, что после применения формулы Эйлера: $e^{p_k s} = e^{\alpha_k s}(\cos(\beta_k s) + \mathbf{i}\sin(\beta_k s))$, если $p_k = \alpha_k + \mathbf{i}\beta_k$ ($\mathbf{i}$ — мнимая единица) и упрощения, все числовые коэффициенты регулятора (3) — действительные числа.

Теорема. *Условие спектральной управляемости* (2) *необходимо и достаточно для существования FSC-регулятора вида* (3) *для системы* (1).

ДИНАМИКА СЛОЕВ АНОРМАЛЬНЫХ ЭКСТРЕМАЛЕЙ НА СВОБОДНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

Д.И. Пирштук

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
PirshtukDI@bsu.by

Основной целью работы является исследование анормальных экстремалей для субримановой задачи оптимального управления. В отличие от регулярных экстремалей, анормальные экстремали определяются условием Гоха и зависят только от неголономного распределения, на котором задана субриманова метрика [1, с. 303–305]. Таким образом, поведение анормальных экстремалей может быть использовано для исследования общих свойств неголономный распределений.

Основными результатами являются алгоритм описания сингулярных точек анормальных экстремалей на свободных нильпотентных группах Ли и исследование динамики слоев проекций кокасательного расслоения $T^*M \to M$ вдоль анормальных экстремалей для свободных градуированных нильпотентных алгебр Ли.

В [2] предложен способ восстановления по базису Холла свободной нильпотентной алгебры Ли $g = g_{m,r}$ семейства m векторных полей $X_1, X_2, \ldots, X_m$, порождающих алгебру Ли векторных полей, изоморфную $g_{m,r}$. В настоящей работе предполагается, что свободное распределение $D \subset TM$ порождено именно таким семейством векторных полей, причем $m = 2$.

В терминологии и обозначениях следуем работе [3]. Пусть u_i — квазиимпульсы, C — характеристика распределения D, а J — поднятие распределения D на $(D^2)^\perp \backslash (D^3)^\perp$ ([3]). Рассмотрим монотонную последовательность флагов $J^{(i)} = J^{(i-1)} + [C, J^{(i-1)}]$, $J^{(0)} = J$. Известно ([3]), что динамика этих флагов вдоль любой анормальной экстремали определяется кривой флагов, изотропных и коизотропных подпространств в симплектических линейных пространствах, а $\dim J^{(i)}(\lambda) - \dim J^{(i-1)}(\lambda) \leqslant 1$ и $\dim J^{(i)}(\lambda) \leqslant 2n - 4$.

В случае $r = 4$ характеристика C коллинеарна полю Эйлера $\sum_i u_i\, \partial/\partial u_i$, а, помимо D^3-аннигилятора, множество сингулярных точек (2-го порядка) задается является уравнением

$$p_1 := u_4^2 u_8 - 2u_4 u_5 u_7 + u_5^2 u_6 = 0. \qquad (1)$$

В случае $r = 5$ множество первых сингулярных точек (7-го порядка) в последовательности $J^{(i)}$ состоит из множества, заданного уравнениями (1) и

$$p_2 := 3u_{10} u_4 u_5^2 - 3u_{11} u_4^2 u_5 + u_{12} u_4^3 + 2u_{13} u_4 u_5^2 - u_{14} u_4^2 u_5 - u_5^3 u_9 = 0.$$

Опишем p_1 и p_2 как результанты некоторых многочленов (см., например, [4]).

Утверждение. *Имеет место соотношение* $p_2 = -C(p_1)$. *Кроме того:*

1) p_1 *— результант многочленов* $u_4 x + u_5 y$ *и* $u_6 x^2 + 2u_7 xy + u_8 y^2$ *(с точки зрения классической теории инвариантов это единственный* $GL(2)$*-инвариант* $(2,1)$*-бисистемы)*;