заданы, считаем произвольными кусочно-непрерывными функциями. Параметры регулятора (3) выбираются такими, что после применения формулы Эйлера: $e^{p_k s} = e^{\alpha_k s}(\cos(\beta_k s) + \mathbf{i}\sin(\beta_k s))$, если $p_k = \alpha_k + \mathbf{i}\beta_k$ ($\mathbf{i}$ — мнимая единица) и упрощения, все числовые коэффициенты регулятора (3) — действительные числа.

Теорема. *Условие спектральной управляемости* (2) *необходимо и достаточно для существования FSC-регулятора вида* (3) *для системы* (1).

ДИНАМИКА СЛОЕВ АНОРМАЛЬНЫХ ЭКСТРЕМАЛЕЙ НА СВОБОДНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

Д.И. Пирштук

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
PirshtukDI@bsu.by

Основной целью работы является исследование анормальных экстремалей для субримановой задачи оптимального управления. В отличие от регулярных экстремалей, анормальные экстремали определяются условием Гоха и зависят только от неголономного распределения, на котором задана субриманова метрика [1, с. 303–305]. Таким образом, поведение анормальных экстремалей может быть использовано для исследования общих свойств неголономный распределений.

Основными результатами являются алгоритм описания сингулярных точек анормальных экстремалей на свободных нильпотентных группах Ли и исследование динамики слоев проекций кокасательного расслоения $T^*M \to M$ вдоль анормальных экстремалей для свободных градуированных нильпотентных алгебр Ли.

В [2] предложен способ восстановления по базису Холла свободной нильпотентной алгебры Ли $g = g_{m,r}$ семейства m векторных полей $X_1, X_2, \ldots, X_m$, порождающих алгебру Ли векторных полей, изоморфную $g_{m,r}$. В настоящей работе предполагается, что свободное распределение $D \subset TM$ порождено именно таким семейством векторных полей, причем $m = 2$.

В терминологии и обозначениях следуем работе [3]. Пусть u_i — квазиимпульсы, C — характеристика распределения D, а J — поднятие распределения D на $(D^2)^\perp \backslash (D^3)^\perp$ ([3]). Рассмотрим монотонную последовательность флагов $J^{(i)} = J^{(i-1)} + [C, J^{(i-1)}]$, $J^{(0)} = J$. Известно ([3]), что динамика этих флагов вдоль любой анормальной экстремали определяется кривой флагов, изотропных и коизотропных подпространств в симплектических линейных пространствах, а $\dim J^{(i)}(\lambda) - \dim J^{(i-1)}(\lambda) \leqslant 1$ и $\dim J^{(i)}(\lambda) \leqslant 2n-4$.

В случае $r = 4$ характеристика C коллинеарна полю Эйлера $\sum_i u_i\, \partial/\partial u_i$, а, помимо D^3-аннигилятора, множество сингулярных точек (2-го порядка) задается является уравнением

$$p_1 := u_4^2 u_8 - 2u_4 u_5 u_7 + u_5^2 u_6 = 0. \tag{1}$$

В случае $r = 5$ множество первых сингулярных точек (7-го порядка) в последовательности $J^{(i)}$ состоит из множества, заданного уравнениями (1) и

$$p_2 := 3u_{10} u_4 u_5^2 - 3u_{11} u_4^2 u_5 + u_{12} u_4^3 + 2u_{13} u_4 u_5^2 - u_{14} u_4^2 u_5 - u_5^3 u_9 = 0.$$

Опишем p_1 и p_2 как результанты некоторых многочленов (см., например, [4]).

Утверждение. *Имеет место соотношение* $p_2 = -C(p_1)$. *Кроме того:*

1) p_1 *— результант многочленов* $u_4 x + u_5 y$ *и* $u_6 x^2 + 2u_7 xy + u_8 y^2$ *(с точки зрения классической теории инвариантов это единственный* $GL(2)$*-инвариант* $(2,1)$*-бисистемы)*;

2) p_2 — *результант* $u_9x^3 + (3u_{10} + 2u_{13})x^2y + (3u_{11} + u_{14})xy^2 + u_{12}y^3$.

Аналогичное утверждение имеет место и в случае $r = 6$ для системы из 3 уравнений.

Таким образом, основным направлением продолжения исследования является проверка гипотезы о том, что при любом r все сингулярные точки описывается системой уравнений, каждое из которых является инвариантом некоторой бисистемы.

Литература

1. Аграчев А. А., Сачков Ю. Л. *Геометрическая теория управления.* М.: Физматлит, 2005.
2. Grayson M., Grossman. R. *Models for Free Nilponent Lie Algerbras* // J. Algebra. 1988. Vol. 35. P. 177–191.
3. Doubrov B., Zelenko I. *On local geometry of nonholonomic rank 2 distributions* // Journal of London Mathematical Society. 2009. Vol. 80. Iss. 3. P. 545–566
4. Olver P. *Classical Invariant Theory.* London: Cambridge University Press, 1999.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ДВА МАЛЫХ ПАРАМЕТРА

Н.А.Письменный

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
n.pismennyy@gmail.com

Рассматривается следущая система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1) + \mu_1\gamma_1(t, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_2) + \mu_2\gamma_2(t, x_1). \tag{1}$$

Предполагается, что $f_1, f_2 : R^n \to R^n$, $\gamma_1, \gamma_2 : R^1 \times\ R^n \to R^n$, γ_1, γ_2 являются T-периодическими функциями по первой переменной, μ_1, μ_2 — малые положительные параметры. Функции $f_1, f_2, \gamma_1, \gamma_2$ имеют непрерывные производные по соответствующим пространственным переменным x_1, x_2.

При нулевых значениях параметров μ_1 и μ_2 система (1) распадается на два автономных уравнения:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i), \quad i = 1, 2 \tag{2}$$

каждое из которых имеет $T-$периодические решение $\varphi_i(t)$. Также предполагается, что 1 является простым собственным значением у операторов сдвига по траектории линеаризованных на φ_i уравнений (2).

Найдены условия устойчивости периодических решений системы (1).

СТАТИСТИЧЕСКИ СЛАБО ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Л.И. Родина

Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
box0589@udmnet.ru

Предлагается новый подход к расширению понятия инвариантности, который исследовался в работах [1, 2]. Этот подход состоит в изучении статистически инвари-