ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ФДУ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Р.К. Романовский, Е.М. Назарук

Омский государственный технический университет, Омск, Россия
elmarnaz@mail.ru

Работа примыкает к [1, 2]. Рассматривается задача Коши

$$\dot{x}(t)=\int_0^1 [d_sT(s,t)]x(t-s)\quad (t\geqslant 1),\quad x|_{[0,1]}=\varphi\in H^1[0,1]. \tag{1}$$

Здесь $T:[0,1]\times[1,\infty)\to\mathbb{C}^{N\times N}$, $\operatorname{Var}_s(T)<\infty$, $T\in C$ по t, $|T|\leqslant\mathrm{const}$, $T(0,t)=0$, $\varphi:[0,1]\to\mathbb{C}^N$. Обозначим $\mathcal{H}^1=\{x:[0,\infty)\to\mathbb{C}^N,\ x\in H^1_{\mathrm{loc}}\}$.

Лемма 1. *Функции из* $\mathcal{H}^1$ *абсолютно непрерывны. Задача Коши* (1) *в классе* $\mathcal{H}^1$ *эквивалентна разностной задаче Коши*

$$u_n=\Lambda_n u_{n-1}\quad (n\geqslant 1),\quad u_0=[\dot{\varphi}(\tau),\varphi(0)]^T,\quad \varphi\in H^1_0,$$

где

$$u_n=\begin{bmatrix}\dot{x}(\tau+n)\\ x(n)\end{bmatrix},\quad \tau\in[0,1],\quad \Lambda_n=\begin{bmatrix}(I-A_n)^{-1}(\Gamma_nS-B_n) & (I-A_n)^{-1}\Gamma_nS\\ S & I_0\end{bmatrix},$$

$$A_n=\int_0^\tau T(\tau-s,\tau+n)\bullet ds,\quad B_n=\int_\tau^1[T(1,\tau+n)-T(1+\tau-s,\tau+n)]\bullet ds,\quad S=\int_0^1\bullet ds,$$

$\Gamma_n=T(1,\tau+n)$, I, I_0 — единицы в $L_2[0,1]$, $\mathbb{C}^N$ соответственно.

Будем отождествлять $\varphi\in H^1[0,1]$ с вектором $u=[\dot{\varphi},\varphi(0)]^\top$. Положим $\langle u,v\rangle=$ $=\int_0^1\dot{\psi}^*\dot{\varphi}\,d\tau+\psi^*(0)\varphi(0)$, где $v=[\dot{\psi},\psi(0)]^\top$.

Лемма 2. *Норма* $||u||=\langle u,u\rangle^{1/2}$ *топологически эквивалентна стандартной норме в* $H^1[0,1]$.

Введем класс J операторных матриц $V_n\in\operatorname{End}H^1[0,1]$, $n\geqslant 0$:

$$V_n=\begin{bmatrix}F_n & H_nS\\ SH_n^* & G_n\end{bmatrix},\quad F_n\,H_n\in\operatorname{End}H^1[0,1],\quad G_n\in\mathbb{C}^N,\quad F_n^*=F_n,\quad G_n^*=G_n,$$

$$\varepsilon_1\operatorname{diag}(I,I_0)\leqslant V_n\leqslant\varepsilon_2\operatorname{diag}(I,I_0),\quad \varepsilon_i>0.$$

Теорема. *Для того, чтобы решение* $x=0$ *системы* (1) *было экспоненциально устойчивым в* H^1*-топологии:* $||u_n||\leqslant\mu\,e^{-\nu(n-m)}||u_m||$ $(n\geqslant m,\ \mu,\nu>0)$, *необходимо и достаточно существование матрицы* $V_n\in J$ *такой, что*

$$\Lambda_n^*V_n\Lambda_n-V_{n-1}\leqslant-\varepsilon\operatorname{diag}(I,I_0),\quad \varepsilon>0.$$

Литература

1. Романовский Р.К., Назарук Е.М. // Докл. АН ВШ РФ. 2013. №2(21). С. 6–15.
2. Романовский Р.К., Назарук Е.М. // Матем. заметки. 2014. Т. 95. №1. С. 129–135.