ОЦЕНКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.Х. Хаммади

Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
aliiraqmath@gmail.com

Изучаются статистические характеристики множества достижимости управляемой системы

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad u \in U(h^t\sigma, x), \quad (t, \sigma, x) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

которая порождена метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu, h^t)$ и функциями f и U.

Условие 1. Существует $\sigma \in \Sigma$, для которого выполнены следующие свойства:

1) для каждого $t \in \mathbb{R}$ функция $(x, u) \to f(h^t\sigma, x, u)$ непрерывна;

2) для каждой точки $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ функция $t \to f(h^t\sigma, x, u)$ кусочно-непрерывна;

3) функция $(t, x) \to U(h^t\sigma, x)$ принимает значения в пространстве $\mathrm{comp}\,(\mathbb{R}^m)$ непустых компактных подмножеств $\mathbb{R}^m$ и полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа.

Пусть задано множество

$$\mathfrak{M}(\sigma) = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in M(h^t\sigma)\}.$$

Обозначим через $D(t, \sigma, X)$ множество достижимости системы (1) в момент времени t при заданном $\sigma \in \Sigma$ из начального множества X.

Определение 1 (см. [1]). Верхней относительной частотой поглощения множества достижимости $D(t, \sigma, X)$ системы (1) множеством $\mathfrak{M}(\sigma)$ называется характеристика

$$\mathrm{freq}^*(\sigma, X) \doteq \overline{\lim_{\vartheta \to \infty}} \frac{\mathrm{mes}\{t \in [0, \vartheta] : D(t, \sigma, X) \subseteq M(h^t\sigma)\}}{\vartheta},$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. Аналогично определяется нижняя относительная частота $\mathrm{freq}_*(\sigma, X)$.

Рассмотрим скалярную задачу Коши $\dot{z} = w(h^t\sigma, z)$, $z(0, \sigma) = z_0(\sigma)$, для которой выполнено условие единственности решения. Для заданного $\sigma \in \Sigma$ рассмотрим характеристику

$$\varkappa^*(\sigma) \doteq \overline{\lim_{\vartheta \to \infty}} \frac{\mathrm{mes}\{t \in [0, \vartheta] :\ z(t, \sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta},$$

аналогично определяется $\varkappa_*(\sigma)$. Обозначим через $V(\sigma, x)$ функцию Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}(\sigma)$ и через $V^o_{\min}(\sigma, x)$ нижнюю производную функции $V(\sigma, x)$ в силу дифференциального включения, отвечающего системе (1) (определения приведены, в частности, в работе [1].)

Теорема. *Пусть для $\sigma \in \Sigma$ выполнено условие 1 и для каждой точки $x \in M(\sigma)$ все решения системы (1), удовлетворяющие начальному условию $\varphi(0, \sigma, x) = x$ продолжаемы на полуось $\mathbb{R}_+$. Предположим, что существуют функции $V(\sigma, x)$ и $w(\sigma, z)$ такие, что функция $V(\sigma, x)$ является функцией Ляпунова относительно множества $M(\sigma)$ и для всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство*

$$V^o_{\min}(\sigma, x) \geqslant w(\sigma, V(\sigma, x)).$$

Тогда, если $X \in \mathrm{comp}\,(\mathbb{R}^n)$ *и* $\min\limits_{x\in X} V(\sigma, x) \geqslant z_0(\sigma)$, *то имеют место неравенства*

$$\mathrm{freq}^*(\sigma, X) \leqslant \varkappa^*(\sigma), \quad \mathrm{freq}_*(\sigma, X) \leqslant \varkappa_*(\sigma).$$

Литература

1. Родина Л. И., Тонков Е. Л. *Статистически слабо инвариантные множества управляемых систем* // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 67–86.

К ВОПРОСУ СТАБИЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

В.Е. Хартовский

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
hartovskij@grsu.by

Объект исследования — линейная автономная система нейтрального типа

$$\dot{x}(t) - D(z)\dot{x}(t) = A(z)x(t) + B(z)u(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $D(s) \in \mathbb{R}^{n\times n}[s]$, $D(0) = 0$ ($\mathbb{R}^{k_1\times k_2}[s]$ — множество полиноминальных матриц размера $k_1 \times k_2$), $A(s) \in \mathbb{R}^{n\times n}[s]$, $B(s) \in \mathbb{R}^{n\times r}[s]$, x — вектор решения, u — вектор управления, z — оператор сдвига.

Систему (1) замкнем регулятором вида

$$\varphi(z)u(t) = Q^1(z)\dot{x}(t) + R^1(z)x(t) + \Gamma f(t), \quad t \geqslant 0,$$

$$f(t) = \Omega \cdot zf(t) + Q^2(z)\dot{x}(t) + R^2(z)x(t), \quad t \geqslant 0,$$

$$f(t) \equiv 0, \quad t < 0, \tag{2}$$

где $Q^i(z), R^i(z)$, $i = 1, 2$, — полиноминальные матрицы, $Q^i(0) = 0$, Γ, Ω — постоянные матрицы, $\varphi(z)$ — полином. Под замкнутой системой (1), (2) понимаем систему вида

$$\varphi(z)(E - D(z))\dot{x}(t) = \varphi(z)A(z)x(t) + B(z)(Q^1(z)\dot{x}(t) + R^1(z)x(t) + \Gamma f(t)). \tag{3}$$

В докладе приводятся условия существования и способ построения регулятора (2) такого, что:

1) при всех $t \geqslant t_0$ система (3) представима в виде

$$\varphi(z)(E - D(z))\dot{x}(t) = \varphi(z)A(z)x(t) + B(z)(Q^*(z)\dot{x}(t) + R^*(z)x(t)), \tag{4}$$

где $Q^*(z)$, $R^*(z)$ — полиноминальные матрицы, $Q^*(0) = 0$;

2) характеристический квазиполином замкнутой системы (1), (2) (т. е. системы (4)) является экспоненциально устойчивым, т. е. действительные части всех его корней меньше некоторого отрицательного числа.

Способ построения регулятора (2) основан на алгебраических операциях не предполагающих вычисление корней характеристического квазиполинома системы (1).

PolotskSU