

Далее в работе представленные результаты обобщаются на линейные автономные системы нейтрального типа с непрерывным решением вида:

$$\frac{d}{dt}(x(t) + \sum_{i=1}^m L_i x(t-ih)) = \sum_{i=0}^m A_i x(t-ih) + \sum_{i=0}^m B_i u(t-ih), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

где  $L_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , — постоянные матрицы соответствующего размера. В качестве начального условия системы (4) берется набор (2).

## НЕЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ *F*-УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

О.Б.Цехан

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь  
tsekhant@grsu.by

Рассматривается линейная стационарная сингулярно возмущенная система с запаздыванием в состоянии (ЛССВСЗ):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_1 x(t) + A_2 y(t) + C_1 x(t-h) + C_2 y(t-h) + B_1 u(t), \quad x \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad y \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad u \in \mathbb{R}^r, \\ \mu \dot{y}(t) &= A_3 x(t) + A_4 y(t) + C_3 x(t-h) + C_4 y(t-h) + B_2 u(t), \quad t \in T = [0, t_1], \\ \{x_0(\cdot, \mu), y_0(\cdot, \mu)\} &= \{\varphi(\theta), \psi(\theta), \theta \in [-h, 0]\}, \quad \{x(0), y(0)\} = \{x_0, y_0\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $A_i, C_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ ,  $B_j$ ,  $j = \overline{1, 2}$ , — постоянные матрицы соответствующих размерностей,  $0 < h$  — число,  $u(t)$ ,  $t \in T$ , —  $r$ -вектор-функция управления,  $u(\cdot) \in U$  — множество кусочно-непрерывных на  $T$   $r$ -вектор-функций,  $\varphi(\theta), \psi(\theta)$  — кусочно-непрерывные начальные  $n_1$ - и  $n_2$ -вектор-функции соответственно,  $\mu$  — параметр,  $\mu \in (0, \mu^0]$ ,  $\mu^0 \ll 1$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^{n_2}$ .

Пусть  $\mathbb{R}^m$  —  $m$ -мерное евклидово пространство,  $L_m^2[t_1-h, t_1]$  — гильбертово пространство суммируемых на  $[t_1-h, t_1]$   $m$ -вектор-функций,  $\mathcal{M}_m^2 \triangleq L_m^2[t_1-h, t_1] \times \mathbb{R}^m$ .

По параметрам системы (1) построим числовую матрицу

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

определим оператор

$$H = \begin{pmatrix} H^{11} & H^{22} \\ H^{31} & H^{42} \end{pmatrix},$$

где  $H^{ij} : L_{n_i}^2 \rightarrow L_{n_j}^2$ :  $(H^{ij}\psi)(\theta) = C_i \psi(-\theta - h) \chi(\theta)$ ,  $i = \overline{1, 4}$ ,  $j = \overline{1, 2}$ ,  $\theta \in [-h, 0]$ ,  $\chi(\theta)$  — характеристическая функция интервала  $[-h, 0]$ , а также полиномиальные матрицы  $\tilde{P}(z) \in \mathbb{C}^{n \times rn}$ ,  $\tilde{N}(\lambda, z) \in \mathbb{C}^{n \times (n+r)}$ ,  $\tilde{L}(\lambda) \in \mathbb{C}^{n+c \times (n+c+r)}$ , где  $n = n_1 + n_2$ ,  $c = \text{rank } C$ . При фиксированном  $\mu > 0$  обозначим многообразие достижимых из нуля конечных состояний ЛССВСЗ (1):  $\{X, Y\}(\mu) = \{(x(t, \mu), y(t, \mu)), t \in (t_1-h, t_1), \{x(t_1, \mu), y(t_1, \mu)\}; u(t) \in U\}$  и введем оператор структуры  $F_\mu : \mathcal{M}_{n_1+n_2}^2 \rightarrow \mathcal{M}_{n_1+n_2}^2$ ,  $F_\mu = \text{diag}\{M(\mu), M(\mu)H\}$ , где  $M(\mu) = \text{diag}\{E_{n_1}, \mu^{-1}E_{n_2}\}$ .

**Определение.** При фиксированном  $\mu \in (0, \mu^0]$  назовем ЛССВСЗ (1)  $F(\mu)\{x, y\}$ -управляемой, если замыкание множества  $F(\mu)\{X, Y\}(\mu)$ , образованного при этом  $\mu$ , совпадает с замыканием множества  $\text{Im } F(\mu)$ .

**Теорема.** Если выполнены условия:

- 1)  $\text{rank } \tilde{P}(z) = n_1 + n_2$  для некоторого комплексного  $z$ ;
- 2)  $\text{rank } \tilde{N}(\lambda, z) = n_1 + n_2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} : e^{\lambda h} = z, \text{rank } \tilde{P}(z) < n_1 + n_2$ ;
- 3)  $\text{rank } \tilde{L}(\lambda) = n_1 + n_2 + c$  для некоторого комплексного  $\lambda$ ;

то ЛССВСЗ (1)  $\{x, y\}$ -управляема в пространстве  $\mathcal{M}_{n_1+n_2}^2$  для всех достаточно малых  $\mu > 0$ .

**Доказательство** основано на применении к ЛССВСЗ метода пространства состояний [1], ранговых условий  $F$ -управляемости систем с запаздыванием [2] и анализе зависимости этих условий от малого параметра, выполненном аналогично [3].

Работа поддержанна Министерством образования Республики Беларусь в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2011–2015 гг. (шифр задания «Конвергенция 1.3.02»).

#### Литература

1. Kopeikina T. B. *Some approaches to the controllability investigation of singularly perturbed dynamic systems* // Systems Science. 1995. Vol. 21, no. 1. P. 17–36.
2. Manitius A. *F-Controllability and observability of linear retarded systems* // Applied Mathematics and Optimization. 1982. Vol. 9. P. 73–95.
3. Цехан О. Б. *О свойствах решений одной системы уравнений, зависящих от параметра* // Весн. Гродненскага дзярж. ун-та. Сер. 2. 2013. № 2(151). С. 51–60.

## THEOREM ON EXISTENCE OF A UNIQUE SOLUTION WITH GIVEN PROPERTIES TO RELAY SYSTEM

V.V. Yevstafyeva

Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia  
vica@apmath.spbu.ru

The problem on existence of forced periodic solutions in control systems containing discontinuous hysteresis nonlinearity is concerned. We study the  $n$ -dimensional system of ordinary differential equations with relay nonlinearity and external continuous influence. Systems of the considered class can be used as systems of the electric drive constructed with semi-conductor diodes and intended to regulate rotation frequency of a rotor with an asynchronous electric motor. It is also possible to use these systems when processes in electric chains of control systems with a nonideal relay and elements from ferromagnetic materials are described. We offer an approach for choosing coefficients (including feedback coefficients as well) of the system such that there exist the forced harmonic or subharmonic oscillatory modes with the certain configuration in phase space. This approach is based on general problems of nonlinear system dynamics stated by V. I. Zubov, methods of canonical transformation theory, and the method of sections for system parameter space suggested for autonomous systems by R. A. Nelepin. To investigate the system, we use exact analytical methods, namely, the method of images and the fixed point method. We stress that the approach allows to find analytically switching instants and switching points of the image point of the required solution from an auxiliary system of transcendental equations. The auxiliary system constructing and conditions of its solvability are given in [1]. This work develops the results obtained in [1].