УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПОТЕНЦИАЛОМ ДИРАКА

С.Н. Барановская, Н.И. Юрчук

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

Bramka@rambler.ru, Yurchuk@bsu.by

Рассмотрим задачу Коши

$$L_\gamma(u) \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \triangle_x u(x,t) + \gamma\delta(x_0,t_0)u = f(x,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где $\delta(x_0,t_0)$ — δ-функция Дирака, сосредоточенная в точке (x_0,t_0), $\delta(x_0,t_0)u = u(x_0,t_0)$ и $\triangle_x$ — оператор Лапласа по пространственным переменным x_i, $i=\overline{1,n}$.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть функции f и φ непрерывны и удовлетворяют условиям*

$$|f(x,t)| \leqslant c\exp\{h\|x\|^2\}, \quad |\varphi(x)| \leqslant c\exp\{h\|x\|^2\}, \quad c>0,$$

$$|f(x,t) - f(x',t)| \leqslant B\|x-x'\|^\alpha, \quad \alpha > 0,$$

где $h < 1/(4T)$, а $\gamma \neq -1/t_0$. Тогда для каждых таких f и φ задача Коши (1), (2) *имеет единственное классическое решение, которое представимо формулой*

$$u(x,t) = v(x,t) - \gamma\frac{v(x_0,t_0)}{1+\gamma t_0}t.$$

Здесь функция

$$v(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(z)e^{-r^2/(4t)}dz + \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(z,\tau)e^{-r^2/(4t-4\tau)}dz,$$

где $r = \|x-z\| = \sqrt{|x_1-z_1|^2+\dots+|x_n-z_n|^2}$, $z=(z_1,\dots z_n)$, является решением задачи Коши (1), (2) *при $\gamma = 0$.*

МАКСИМАЛЬНЫЙ АТТРАКТОР ОДНОГО НЕАВТОНОМНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С.М. Бородич

Витебский госуниверситет, Витебск, Беларусь

sirius722@rambler.ru

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$ рассматривается неавтономное гиперболическое уравнение

$$\partial_t^2 u + \varepsilon\partial_t u = \Delta u - f(t,u) - g(x), \quad u|_{x\in\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$, $f(t,u) \in \mathrm{C}^{0,1}([0,+\infty)\times\mathbb{R})$, $g(x) \in L_2(\Omega)$. Предполагается, что выполнены условия:

$$\lim_{t\to+\infty} f(t,u) = \tilde{f}(u), \quad \tilde{f}(u) \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}),$$

$$f(t,u)u \geqslant -C, \quad f'_u(t,u) \geqslant -C,$$

$$|f'_u(t,u)| \leqslant C(u^2+1), \quad |\tilde{f}'(u)| \leqslant C(|u|^\alpha + 1) \quad (0 \leqslant \alpha < 2),$$

$$|f(t,u) - \tilde{f}(u)| \leqslant k(t)(|u|^3+1),$$

где $C > 0$, $k(t) \in \mathrm{C}([0;+\infty))$, $k(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Уравнение (1) порождает в пространстве $E = H_0^1(\Omega)\times L_2(\Omega)$ семейство эволюционных операторов $\{S_{t,\tau},\ t \geqslant \tau \geqslant 0\}$:

$$S_{t,\tau} : y_0 \to y(t),$$

где $y_0 = (u_0, p_0) \in E$, $y(t) = (u(t), \partial_t u(t))$, $u(t)$ — решение уравнения (1) с начальными условиями $u|_{t=\tau} = u_0$, $\partial_t u|_{t=\tau} = p_0$.

Максимальным аттрактором семейства $\{S_{t,\tau}\}$ назовем компактное в E множество $\mathfrak{M}$, притягивающее при $t \to +\infty$ траекторию $S_{t,0}B$ любого ограниченного в E множества B и содержащееся в любом другом компактном множестве, обладающем таким же свойством притяжения.

Автономное уравнение

$$\partial_t^2 v + \epsilon\partial_t v = \Delta v - \tilde{f}(v) - g(x), \quad v|_{x\in\partial\Omega} = 0,$$

порождает в E полугруппу операторов $\{S_t,\ t \geqslant 0\}$ (см.[1]). Предположим,что $\{S_t\}$ имеет конечное число стационарных точек; пусть $y_i = (z_i, 0)$ — какая-либо из них. Обозначим через $M^H(y_i)$ совокупность всех точек $y \in E$, через которые проходят траектории $S_t y_0$, продолжаемые для всех $t \leqslant 0$ и удовлетворяющие условию: $S_t y_0 \to \to y_i$ в E при $t \to -\infty$. Пусть $M = \bigcup_i M^H(y_i)$.

Теорема. *Семейство эволюционных операторов* $\{S_{t,\tau}\}$, *отвечающее уравнению* (1), *имеет максимальный аттрактор* $\mathfrak{M}$, *причем* $\mathfrak{M} \subset \bigcup_i M^H(z_i)$ *и* $S_t\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ $\forall t \geqslant 0$.

Литература

1. Бабин А. В., Вишик М. И. *Аттракторы эволюционных уравнений.* М.: Наука, 1989. 294 с.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ВТОРОГО РОДА

И.Б. Гарипов, Р.М. Мавлявиев

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

ilnur_garipov@mail.ru, mavly72@mail.ru

В настоящее время активно изучаются задачи с интегральными условиями. Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения была рассмотрена в работе [1]. Гиперболическое уравнение с оператором Бесселя и с нелокаль-