кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть $\tau = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$.

В ограниченной области $\partial\Omega$ зададим дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $u(x)$ вида

$$\mathcal{L}u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)u + \mathcal{L}_1(x, D)u = f(x), \tag{1}$$

где

$$\mathcal{L}_1(x, D)u = p_0(x)\frac{\partial u}{\partial x_0} + \sum_{k=1}^{n} p_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} - \lambda(x)u.$$

Здесь a_i, b_i $i = 1, \ldots, n$ – постоянные, коэффициенты полинома $\mathcal{L}_1(x, D)u$, производные $\partial p_i(x)/\partial x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ измеримы и ограничены.

Обозначим через $\mathcal{L}_0(\tau) = (\tau_0 + b_1\tau_1 + \ldots + b_n\tau_n)(\tau_0^2 + a_1^2\tau_1^2 + \ldots + a_n^2\tau_n^2)$. В области Ω рассмотрим уравнение (1) относительно функции $u(x)$, которая удовлетворяет однородным граничным условиям

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \tau}\Big|_{\partial\Omega^-} = 0, \tag{2}$$

где $\partial\Omega^-$ — часть границы $\partial\Omega$, в точках которой $\mathcal{L}_0(\tau) < 0$.

Наряду с задачей (1), (2) рассматривается и соответствующая ей сопряженная. При некоторых дополнительных условиях на коэффициенты оператора $\mathcal{L}$, которые являются достаточными, методами функционального анализа доказывается в обобщенной постановке однозначная разрешимость уравнения (1) в произвольной области при наличии простейших граничных условий (условий типа Дирихле). Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если выполняются условия:*

1) $a_i \neq 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$;

2) $\dfrac{\partial p_0(x)}{\partial x_0} + \dfrac{\partial p_1(x)}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial p_n(x)}{\partial x_n} + 2\lambda(x) > 0,$

то *для любых u и v из $H_0^1(\Omega)$ справедливы неравенства*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c\|Lu\|_{H_0^{-1}(\Omega)}, \quad \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c^*\|L^*v\|_{H_0^{-1}(\Omega)},$$

где постоянные $c > 0$ и $c^* > 0$ не зависят от функций u и v.

О ПОСТРОЕНИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ $(2+1)$-МЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ БОМА И СТЕПЕННЫМ ЗАКОНОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ

С.В. Жестков, В.С. Новашинская

Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова, Могилев, Беларусь

zhestkov_s@rambler.ru, vichka-2468397@yandex.ru

Известно [1], что киральное уравнение Шредингера с потенциалом Бома является неинтегрируемым уравнением. Поэтому для его исследования в [1] использовались вариационный метод Хи и численные вычисления. Возникает вопрос о существовании математических моделей уравнения Шредингера с потенциалом Бома, допускающих точные солитонные решения, в частности, в виде топологических солитонов.

В настоящей работе рассматривается $(2+1)$-мерное НУШ вида

$$iu_t + a_1(u_{xx} + u_{yy}) + a_2|u|^{2m}u = i\left[a_3u + a_4|u|^{2m}u + a_5u\frac{|u|_{xx}}{|u|} + a_6u\frac{|u|_{yy}}{|u|}\right], \qquad (1)$$

где a_j, $j = \overline{1,6}$ — произвольные действительные числа, $m > 0$. Солитонное решение уравнения (1) строится в виде

$$u(t,x,y) = I(t,x,y)\exp\{i\xi\}, \quad \xi = k_1x + k_2y + \omega t + \varphi, \qquad (2)$$

где $I(t,x,y)$ — неотрицательная волновая функция, k_1, k_2, ω, φ — параметры солитона. Поставляя (2) в (1), найдем систему определяющих уравнений относительно неизвестной волновой функции $I(t,x,y)$. Решение полученной системы строится в виде

$$I(t,x,y) = f(\eta), \quad \eta = \alpha_1x + \alpha_2y - vt + \psi, \qquad (3)$$

где $f(\eta)$ — неизвестная волновая функция, α_1, α_2, v, ψ — параметры солитона. Подставляя (3) в систему определяющих уравнений, найдем два дифференциальных уравнения относительно неизвестной функции $f(\eta)$, которые при выполнении соотношения

$$v = 2a_1(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) \qquad (4)$$

совпадают по форме. Поэтому в качестве искомой функции $f(\eta)$ можно взять анзац вида [2]

$$f(\eta) = A\tanh^{\mu}\eta, \quad \eta > 0, \qquad (5)$$

где A — амплитуда солитона, $\mu > 0$ — неизвестный параметр. Подставляя (5) в полученные дифференциальные уравнения относительно $f(\eta)$, найдем законы распространения топологического солитона (2), (3), (5)

$$\mu = \frac{1}{m} = 1, \quad \omega = -a_1(2\alpha^2 + k^2), \quad A^2 = -2\alpha^2\frac{a_1}{a_2}, \quad A^2 = -\frac{2\Gamma}{a_4}, \quad a_3 - 2\Gamma = 0, \qquad (6)$$

где $\alpha^2 \equiv \alpha_1^2 + \alpha_2^2$, $k^2 \equiv k_1^2 + k_2^2$, $\Gamma \equiv a_5\alpha_1^2 + a_6\alpha_2^2$, если коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условию

$$a_1 < 0 \wedge a_2 > 0 \wedge a_4\Gamma < 0. \qquad (7)$$

Теорема. *Для того, чтобы уравнение* (1) *при* $m = 1$ *имело решение в виде топологического солитона* (2), (3), (5) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения* (4), (6), *где коэффициенты* a_j, $j = \overline{1,6}$, *удовлетворяют условию* (7).

Литература

1. Biswas A., Milovic D. *Chiral solitons with Bohm potential by He‘s variational principle* // Physics of Atomic Nuclei. 2011. Vol. 74, no. 5. P. 755–757.

2. Жестков С. В., Новашинская В. С. *К теории распространения светлых и темных солитонов* (2+1) *-мерных уравнений Шредингера со степенными законами нелинейности и затухания* // Весн. Магілеўскага дзярж. ун-та імя А.А. Куляшова. Сер. В. 2013. № 2(42). С. 32–44.