ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ ОПЕРЕЖАЮЩЕ-ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С НЕГЛАДКОЙ ЛИНИЕЙ ВЫРОЖДЕНИЯ

А.Н. Зарубин

Орловский государственный университет, Орел, Россия
aleks_zarubin@mail.ru

Рассмотрим уравнение смешанного эллиптико-гиперболического опережающе-запаздывающего типа с параллельными линиями вырождения

$$U_{xx}(x,y) + \operatorname{sgn} y(2h-y)U_{yy}(x,y) =$$
$$= [R_x^{\tau} H(x) + R_x^{-\tau} H(2\tau - x)][H((2h-y)(y-h))U(x, y-h) +$$
$$+ H(y(h-y))U(x, y+h) + H(y(y-2h))U(x, 2h-y)],$$

$0 < \tau$, $h \equiv \text{const}$, $H(\xi)$ — функция Хевисайда; R_x^{Θ} — оператор сдвига по x : $R_x^{\Theta} q(x) = q(x-\Theta)$; в области $D = D^+ \cup D^- \cup I_0 \cup I_1$, где $D^+ = \{(x,y) : 0 < x < 2\tau,\ 0 < y < 2h\} = \bigcup_{k,n=0}^{1} D_{kn}^+ \cup J_0 \cup J_1$ и $D^- = \bigcup_{k,n=0}^{1} D_{kn}^-$ — эллиптическая и гиперболическая части области D, причем

$$D_{kn}^+ = \{(x,y) : k\tau < x < (k+1)\tau,\ \ nh < y < (n+1)h\} \quad (k,n = 0,1),$$
$$D_{kn}^- = \{(x,y) : (-1)^n(2nh - y) + k\tau < x < (-1)^n(y - 2nh) + (k+1)\tau,$$
$$-2nh - \tau/2 < (-1)^n y < -2nh\} \quad (k,n = 0,1),$$

а $J_0 = \{(x,y) : x = \tau,\ 0 < y < 2h\}$, $J_1 = \{(x,y) : 0 < x < 2\tau,\ \ y = h\}$, $I_n = \bigcup_{k=0}^{1} I_{kn}$, где $I_{kn} = \{(x,y) : k\tau < x < (k+1)\tau,\ \ y = 2nh\}$ $(n = 0,1)$.

Пусть $D_{kn} = D_{kn}^+ \cup D_{kn}^- \cup I_{kn} (k,n = 0,1)$ и $D_k = \bigcup_{n=0}^{1} D_{kn}$ $(k = 0,1)$.

Задача T. Найти в области D функцию $U(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D \setminus J_0) \cap C^2(D \setminus (J_0 \cup \cup J_1 \cup I_0 \cup I_1))$, удовлетворяющую уравнению (1), краевым условиям $U(0,y) = U(2\tau, y) = 0$, $0 \leqslant y \leqslant 2h$, $U(x, 2nh - (-1)^n(x - k\tau)) = \psi_{kn}(x)$, $k\tau \leqslant x \leqslant (2k+1)\tau/2$ $(k,n = 0,1)$, условиям сопряжения $U(x, 2nh+) = U(x, 2nh-) = \omega_n(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 2\tau$ $(n = 0,1)$, $U_y(x, 2nh+) = U_y(x, 2nh-) = \nu_n(x)$, $0 < x < 2\tau$, $x \neq \tau$ $(n = 0,1)$, условиям согласования $\psi_{0n}(0) = 0$ $(n = 0,1)$, где $\psi_{kn}(x)$ — заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

Теорема. *Если функции* $\psi_{kn}(x) \in C[k\tau, (2k+1)\tau/2] \cap C^2(k\tau, (2k+1)\tau/2)$ $(k,n = 0,1)$, *абсолютно интегрируемы на* $[k\tau, (2k+1)\tau/2]$ $(k = 0,1)$, $\psi'_{kn}(x)$ *при* $x \to k\tau$ $(k = 0,1)$ *допускает интегрируемую особенность,* $\psi_{0n}(0) = 0$, *то существует единственное при* $h \leqslant 1/2$, $\tau \leqslant 1/\sqrt{2}$ *решение* $U(x,y)$ *задачи* T.

Единственность решения задачи T следует из полученных в D^- и D^+ на $y = 2kh$, $0 < x < 2\tau$ $k = 0,1)$ неравенств соответственно $\beta_k = (-1)^k \int_0^{2\tau} \omega_k(x)\nu_k(x)\,dx \geqslant 0$ $(k = 0,1)$ и $\beta_0 + \beta_1 \leqslant 0$, $\beta_0 + \beta_1 + \iint_{D^+}[(1 - 2\tau^2 H(x-\tau))U_x^2(x,y) + (1 - 4h^2 H(\tau - x) \times H(y-h))U_y^2(x,y) + U^2(x,y)]\,dxdy \leqslant 0$.

Вопрос существования решения задачи T в области $D_{00} = D^+{}_{00} \cup D^-{}_{00} \cup I_{00}$ редуцируется к разрешимости разностного уравнения

$$(1 + iR_x^{2ih})\left(\nu(x) + \int_0^x \nu(t)\frac{\partial}{\partial x} I_0(i\sqrt{t(x-t)})\,dt\right) = q(x),$$

где $q(x) \in C^1(0,\tau)$.