1) $\alpha^{(1)}(t)a-\beta^{(1)}(t)=0$ *или* $\alpha^{(2)}(t)a-\beta^{(2)}(t)=0$, $\gamma^{(j)}(t)\neq 0$, *функции* $f\in C^1(\overline{\Omega})$, $\varphi\in C^3(\overline{\Omega})$, $\psi\in C^2(\overline{\Omega})$, $\mu^{(j)}\in C^2[0,\infty)$, $j=1,2$,
или
2) $\alpha^{(i)}(t)a-\beta^{(i)}(t)\neq 0$, $i=1,2$, *функции* $f\in C^1(\overline{\Omega})$, $\varphi\in C^2(\overline{\Omega})$, $\psi\in C^1(\overline{\Omega})$, $\mu^{(j)}\in C^1[0,\infty)$, $j=1,2$,
а также выполняются некоторые условия согласования, тогда в классе функций $C^2(\overline{Q})$ *существует единственное классическое решение* $u(t,x)$ *задачи* (1)–(3).

ЗАДАЧА КОШИ НА ПОЛУПЛОСКОСТИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В.И. Корзюк [1], И.С. Козловская [2], А.И. Козлов [2]

[1] Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь korzyuk@bsu.by
[2] Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
kozlovskaja@bsu.by

На полуплоскости $\overline{Q}=[0,\infty)\times\mathbb{R}$ плоскости $\mathbb{R}^2$ двух независимых переменных t и x рассматривается относительно искомой функции $u:\mathbb{R}^2\supset\overline{Q}\ni(t,x)\to u(t,x)\in\mathbb{R}$ дифференциальное уравнение порядка $m\in\mathbb{N}$:

$$\mathfrak{L}^{(m)}u(t,x)=\prod_{k=1}^{m}(\partial_t-a^{(k)}\partial_x-b^{(k)})u(t,x)=f(t,x),\quad (t,x)\in\overline{Q},\tag{1}$$

где $a^{(k)}$, $b^{(k)}$ — заданные из $\mathbb{R}$ действительные числа, $f:\mathbb{R}^2\supset\overline{Q}\ni(t,x)\to f(t,x)\in\in\mathbb{R}$ — заданная на $\overline{Q}$ функция. $\overline{Q}$ — замыкание области $Q=(0,\infty)\times\mathbb{R}$. На границе $\partial Q=\{(t,x)\in\overline{Q}|t=0\}$ области Q задаются условия Коши

$$\partial_t^j u|_{t=0}=\varphi^{(j)}(x),\quad x\in\mathbb{R},\quad j=\overline{0,m-1},\tag{2}$$

где $\partial_t^j=\partial^j/\partial t^j$.

Уравнение (1) может быть как строго гиперболическим так и нестрого гиперболическим. Задача Коши (1), (2) рассмотрена в [1, 2] в случае, когда оператор $\mathfrak{L}^{(m)}$ является строго гиперболическим. Решение u построено в аналитическом виде при некоторых условиях гладкости на функции $f,\varphi^{(j)}(j=\overline{1,m-1})$ и доказана его единственность. Здесь же выписано в виде формулы общее решение для любого уравнения вида (1). В [3] рассмотрена задача (1), (2) в случае, когда уравнение (1) является нестрого гиперболическим и когда все характеристики совпадают. В [4] представлены решения задачи Коши (1), (2) в аналитическом виде для всех случаев нестрого гиперболического уравнения третьего порядка вида (1).

В настоящее время доказаны существование и единственность классического решения общего вида уравнения (1). Указаны методики построения и доказательства единственности такого решения.

Литература

1. Корзюк В. И., Козловская И. С. *Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных* // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 5. С. 700–709.

2. Корзюк В. И., Козловская И. С. *Решение задачи Коши гиперболического уравнения для однородного дифференциального оператора в случае двух независимых переменных* // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № 5. С. 9–13.

3. Корзюк В. И., Козловская И. С. *Задача Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных* // Тр. Третьей междунар. науч. конф. «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения», Брест, 2012. С. 171–176.

4. Korzyuk V. I., Kozlouskaya I. S., Kozlov A. I. *Caushy Problem in Half-Plane for Hyperbolic Equation with Constant Coefficients* // Analitic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE 2012. Cambridge Scientific Publishers. 2013. P. 45–71.

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В.И. Корзюк [1], А.А. Мандрик [2]

[1] Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
korzyuk@bsu.by
[2] Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
mndkaa@gmail.com

Изучение смешанных задач для гиперболических уравнений третьего порядка продиктовано не только развитием теории дифференциальных уравнений с частными производными. Они возникают при описании конкретных физических явлений. Например, гиперболические уравнения третьего порядка появляются при математическом моделировании распространения линейных аккустических волн в среде с дисперсией.

Исследование или отыскание классических решений задач всегда было актуальным для теории дифференциальных уравнений с частными производными. Это важно и для численных методов решения граничных задач, так как они во многих случаях основаны на классических решениях. Заметим, что классические решения определяются не только правильным выбором вида граничных условий для дифференциальных уравнений с частными производными, но и условиями согласования для функций, входящих в условия и уравнения.

Рассматривается область $Q=(0;+\infty)\times(0;l)$ двух независимых переменных $(t,x)\in$ $\in Q\subset\mathbb{R}^2$. В этой области рассмотрим линейное дифференциальное уравнение 3-го порядка гиперболического типа

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+d\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=0,\ \ (t,x)\in Q, \tag{1}$$

где $a,\ d,\ l$ — положительные (для определенности) действительные числа, $a\neq d$. К уравнению (1) присоединим начальные условия:

$$u(0,x)=\varphi_0(x),\quad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t}=\varphi_1(x),\quad \frac{\partial^2 u(0,x)}{\partial t^2}=\varphi_2(x),\quad x\in[0;l]. \tag{2}$$

Кроме начальных условий (2) задаются граничные условия:

$$u(t,0)=\psi_0(t),\quad \frac{\partial u(t,0)}{\partial x}=\psi_1(t),\quad u(t,l)=\mu_0(t),\quad t\in[0;+\infty). \tag{3}$$

Исходя из общего решения уравнения (1) определяется решение задачи (1)–(3) при некоторых дополнительных условиях. Результат сформулируем в виде теоремы.