3. Корзюк В. И., Козловская И. С. *Задача Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных* // Тр. Третьей междунар. науч. конф. «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения», Брест, 2012. С. 171–176.

4. Korzyuk V. I., Kozlouskaya I. S., Kozlov A. I. *Caushy Problem in Half-Plane for Hyperbolic Equation with Constant Coefficients* // Analitic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE 2012. Cambridge Scientific Publishers. 2013. P. 45–71.

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В.И. Корзюк [1], А.А. Мандрик [2]

[1] Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
korzyuk@bsu.by
[2] Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
mndkaa@gmail.com

Изучение смешанных задач для гиперболических уравнений третьего порядка продиктовано не только развитием теории дифференциальных уравнений с частными производными. Они возникают при описании конкретных физических явлений. Например, гиперболические уравнения третьего порядка появляются при математическом моделировании распространения линейных аккустических волн в среде с дисперсией.

Исследование или отыскание классических решений задач всегда было актуальным для теории дифференциальных уравнений с частными производными. Это важно и для численных методов решения граничных задач, так как они во многих случаях основаны на классических решениях. Заметим, что классические решения определяются не только правильным выбором вида граничных условий для дифференциальных уравнений с частными производными, но и условиями согласования для функций, входящих в условия и уравнения.

Рассматривается область $Q=(0;+\infty)\times(0;l)$ двух независимых переменных $(t,x)\in Q\subset\mathbb{R}^2$. В этой области рассмотрим линейное дифференциальное уравнение 3-го порядка гиперболического типа

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+d\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=0,\ \ (t,x)\in Q, \tag{1}$$

где $a,\ d,\ l$ — положительные (для определенности) действительные числа, $a\neq d$. К уравнению (1) присоединим начальные условия:

$$u(0,x)=\varphi_0(x),\quad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t}=\varphi_1(x),\quad \frac{\partial^2 u(0,x)}{\partial t^2}=\varphi_2(x),\quad x\in[0;l]. \tag{2}$$

Кроме начальных условий (2) задаются граничные условия:

$$u(t,0)=\psi_0(t),\quad \frac{\partial u(t,0)}{\partial x}=\psi_1(t),\quad u(t,l)=\mu_0(t),\quad t\in[0;+\infty). \tag{3}$$

Исходя из общего решения уравнения (1) определяется решение задачи (1)–(3) при некоторых дополнительных условиях. Результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема. *Если функции* $\varphi_i \in C^{3-i}([0;l])$, $i = \overline{0,2}$ *и* $\psi_i \in C^{3-i}([0;+\infty))$, $i = \overline{0,1}$, $\mu_0 \in C^3([0;+\infty))$, *и выполняются условия согласования*

$$\varphi_0(0) = \psi_0(0), \quad \varphi_0'(0) = \psi_1(0), \quad \varphi_1(0) = \psi_0'(0),$$

$$\varphi_1'(0) = \psi_1'(0), \quad \varphi_2(0) = \psi_0''(0), \quad \varphi_2'(0) = \psi_1''(0),$$

$$a^2 d\varphi_0'''(0) + a^2\varphi_1''(0) - d\varphi_2'(0) = \psi_0'''(0),$$

$$\varphi_0(l) = \mu_0(0), \quad \varphi_1(l) = \mu_0'(0), \quad \varphi_2(l) = \mu_0''(0),$$

$$a^2 d\varphi_0'''(l) + a^2\varphi_1''(l) - d\varphi_2'(l) = \mu_0'''(0),$$

тогда в классе $C^3(\overline{Q})$ *существует единственное классическое решение задачи* (1)–(3).

Заметим, что эта же смешанная задача при $d < 0$ будет является корректной, если на левой границе области Q, при $x = 0$ задается одно граничное условие, а на правой границе, при $x = l$ — два.

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА — ГОДОНА — ФОКА В КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОЛУПОЛОСЕ

В.И. Корзюк [1], **А.А. Столярчук** [2]

[1] Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
korzyuk@bsu.by
[2] Институт подготовки научных кадров НАН Беларуси, Минск, Беларусь
ivan.telkontar@gmail.com

Уравнение Клейна — Гордона — Фока представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных, относящееся к классу гиперболических уравнений второго порядка. Оно описывает динамику релятивистской квантовой системы.

В одномерном случае для уравнения Клейна — Гордона — Фока в полуполосе рассматривается классическое решение первой смешанной задачи. Показывается при определенных условиях гладкости и условиях согласования заданных функций существование и единственность классического решения. Для численного решения поставленной задачи необходимо решать несложные интегральные уравнения Вольтерра второго рода.

Задача рассматривается в области Q, ограниченной нижним основанием $t = s(x)$, $x^{(0)} \leqslant x \leqslant x^{(-1)}$, боковыми линиями $x = \gamma^{(j)}(t)$, $j = 0, 1$, где $\gamma(0)(t) < \gamma(-1)(t)$ для всех $t \in [t*, \infty]$. Здесь $t* = \max(t^{(0)} = s(x^{(0)}),\ t^{(-1)} = s(x^{(-1)}))$. В данной области задается уравнение

$$\partial_{tt}u - a^2\partial_{xx}u - \lambda(t,x)u = f(t,x), \tag{1}$$

где $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, λ и f — функции, заданные на множестве $\overline{Q}$.

К уравнению (1) присоединяются начальные условия

$$u(s(x),x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(s(x),x) = \psi(x), \quad x \in [0;l],$$

где $l \in \mathbb{R}$, $l < +\infty$, и граничные условия

$$u(t,\gamma^{(0)}(t)) = \mu_0(t), \quad u(t,\gamma^{(-1)}(t)) = \mu_l(t), \quad t \in [t^{(j)};\infty).$$