Теорема. *Если функции* $\varphi_i \in C^{3-i}([0;l])$, $i=\overline{0,2}$ *и* $\psi_i \in C^{3-i}([0;+\infty))$, $i=\overline{0,1}$, $\mu_0 \in C^3([0;+\infty))$, *и выполняются условия согласования*

$$\varphi_0(0)=\psi_0(0),\quad \varphi_0'(0)=\psi_1(0),\quad \varphi_1(0)=\psi_0'(0),$$

$$\varphi_1'(0)=\psi_1'(0),\quad \varphi_2(0)=\psi_0''(0),\quad \varphi_2'(0)=\psi_1''(0),$$

$$a^2 d\varphi_0'''(0)+a^2\varphi_1''(0)-d\varphi_2'(0)=\psi_0'''(0),$$

$$\varphi_0(l)=\mu_0(0),\quad \varphi_1(l)=\mu_0'(0),\quad \varphi_2(l)=\mu_0''(0),$$

$$a^2 d\varphi_0'''(l)+a^2\varphi_1''(l)-d\varphi_2'(l)=\mu_0'''(0),$$

тогда в классе $C^3(\overline{Q})$ *существует единственное классическое решение задачи* (1)–(3).

Заметим, что эта же смешанная задача при $d<0$ будет является корректной, если на левой границе области Q, при $x=0$ задается одно граничное условие, а на правой границе, при $x=l$ — два.

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА — ГОДОНА — ФОКА В КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОЛУПОЛОСЕ

В.И. Корзюк [1], **А.А. Столярчук** [2]

[1] Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
korzyuk@bsu.by
[2] Институт подготовки научных кадров НАН Беларуси, Минск, Беларусь
ivan.telkontar@gmail.com

Уравнение Клейна — Гордона — Фока представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных, относящееся к классу гиперболических уравнений второго порядка. Оно описывает динамику релятивистской квантовой системы.

В одномерном случае для уравнения Клейна — Гордона — Фока в полуполосе рассматривается классическое решение первой смешанной задачи. Показывается при определенных условиях гладкости и условиях согласования заданных функций существование и единственность классического решения. Для численного решения поставленной задачи необходимо решать несложные интегральные уравнения Вольтерра второго рода.

Задача рассматривается в области Q, ограниченной нижним основанием $t=s(x)$, $x^{(0)} \leqslant x \leqslant x^{(-1)}$, боковыми линиями $x=\gamma^{(j)}(t)$, $j=0,1$, где $\gamma(0)(t)<\gamma(-1)(t)$ для всех $t\in[t*,\infty]$. Здесь $t*=\max(t^{(0)}=s(x^{(0)}),\ t^{(-1)}=s(x^{(-1)}))$. В данной области задается уравнение

$$\partial_{tt}u-a^2\partial_{xx}u-\lambda(t,x)u=f(t,x), \tag{1}$$

где $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, λ и f — функции, заданные на множестве $\overline{Q}$.

К уравнению (1) присоединяются начальные условия

$$u(s(x),x)=\varphi(x),\quad \partial_t u(s(x),x)=\psi(x),\quad x\in[0;l],$$

где $l\in\mathbb{R}$, $l<+\infty$, и граничные условия

$$u(t,\gamma^{(0)}(t))=\mu_0(t),\quad u(t,\gamma^{(-1)}(t))=\mu_l(t),\quad t\in[t^{(j)};\infty).$$

PolessU

Теорема. *Пусть* $\lambda(t,x)$ *является непрерывно дифференцируемой функцией, существует единственное решение уравнений* $z = x - as_k(x)$, $z = x + as_k(x)$, $z = \gamma^0(t) - at$, $z = \gamma^{-1}(t) + at$ *для всех* $k = \overline{0,\infty}$, *которые также являются дважды непрерывно-дифференцируемыми функциями. Функции, задающие границу принадлежат классу* C^2 *на множестве своего задания. Если выполняются условия согласования на начальные и граничные условия в точках* $(t^{(0)}, x^{(0)})$ *и* $(t^{(-1)}, x^{(-1)})$ *и функция* $f(t,x) \in C^2(\overline{Q})$ *и удовлетворяет условию* $f(t,\gamma^{(0)}(t)) = f(t,\gamma^{(0)}(t)) = 0$, *тогда существует единственное решение первой смешанной задачи для неоднородного уравнения Клейна — Гордона — Фока, которое принадлежит классу* $C^2(\overline{Q})$.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ ПРИ ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ВРЕМЕНИ ПЕРВОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

Ф.Е. Ломовцев, Ю.Ф. Новик

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

lomovcev@bsu.by, overon@tut.by

PolotskSU

Во множестве классических решений изучена корректность по Адамару краевой задачи

$$(\partial_t - a_2\partial_x + b_2)(\partial_t + a_1\partial_x + b_1)u(x,t) = f(x,t),$$
$$\{x,t\} \in G = [0,\infty[\times[0,\infty[, \quad a_1 > 0, \quad a_2 \geqslant 0, \tag{1}$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x < \infty, \tag{2}$$
$$(\alpha(t)u_t + \beta(t)u_x + \gamma(t)u)|_{x=0} = \mu(t), \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{3}$$

где $f, \varphi, \psi, \mu, \alpha, \beta, \gamma$ — заданные функции указанных выше независимых переменных x и t.

Методом характеристик в явном виде получена формула классических решений $u \in C^{(2)}(G)$ начально-краевой задачи (1)–(3), а также выведены необходимые и достаточные условия гладкости (4), (5) на правую часть f, начальные данные φ, ψ, граничное данное μ и условия согласования (6), (7) исходных данных, которые обеспечивают существование единственных классических решений этой краевой задачи. Доказана

Теорема. *Пусть коэффициенты граничного условия* $\alpha, \beta, \gamma \in C^{(1)}[0,\infty[$ *и* $\beta(t) \neq a\alpha(t)$, $t \in [0,\infty[$. *Для существования единственных классических решений* $u \in C^{(2)}(G)$ *начально-краевой задачи* (1)–(3) *необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

$$f \in C(G), \quad \varphi \in C^{(2)}[0,\infty[, \quad \psi \in C^{(1)}[0,\infty[, \quad \mu \in C^{(1)}[0,\infty[, \tag{4}$$

$$\int\limits_0^t f^{(1,0)}(x + (-1)^i a_i(t-\tau), \tau)\, d\tau \in C(G), \quad i = 1,\, 2, \tag{5}$$

$$\alpha(0)\psi(0) + \beta(0)\varphi'(0) + \gamma(0)\varphi(0) = \mu(0), \tag{6}$$

$$\alpha(0)[f(0,0) + (a_2 - a_1)\psi'(0) + a_1a_2\varphi''(0) - (b_1 + b_2)\psi(0) - (a_1b_2 - a_2b_1)\varphi'(0) - b_1b_2\varphi(0)] +$$
$$+ (\alpha'(0) + \gamma(0))\psi(0) + \beta(0)\psi'(0) + \beta'(0)\varphi'(0) + \gamma'(0)\varphi(0) = \mu'(0), \tag{7}$$