Теорема 1. *Пусть при всех* $t \in [0, T]$ *самосопряженные положительные операторы* $A(t)$ *в* H *имеют ограниченные обратные операторы* $A^{-1}(t) \in \mathcal{B}([0,T], \mathcal{L}(H))$, *которые в* H *сильно непрерывны по* t *и имеют по* t *ограниченную сильную производную* $dA^{-1}(t)/dt \in \mathcal{B}([0,T], \mathcal{L}(H))$, *удовлетворяющую неравенству* $((dA^{-1}(t)/dt)g, g) \leqslant \leqslant c_1(A^{-1}(t)g, g)$, $g \in H$, $c_1 \geqslant 0$. *Тогда для любых* $f \in \mathcal{H}^-$, $u_0 \in H$, $u_1 \in H_0^-$ *существуют слабые решения* $u \in \mathcal{H}$ *задачи* (1).

Здесь символом $\mathcal{H}^- = L_2([0,T[, H_t^-)$ обозначено банахово пространство, где H_t^- — антидвойственные банаховы пространства с негативными нормами $[\cdot]_{(-t)}$ к гильбертовым пространствам H_t^+, полученным наделением областей определения $D(A^{1/2}(t))$ квадратного корня $A^{1/2}(t)$ из операторов $A(t)$ позитивными эрмитовыми нормами $[\cdot]_{(t)} = |A^{1/2}(t) \cdot |$, $t \in [0, T]$.

С помощью рассуждений от противного установлена теорема 2 единственности.

Теорема 2. *Пусть выполняются предположения теоремы* 1 *и при почти всех* $t \in]0, T[$ *в* H *существует вторая ограниченная сильная производная* $d^2A^{-1}(t)/dt^2 \in \in L_\infty(]0,T[, \mathcal{L}(H))$, *удовлетворяющая неравенству* $|((d^2A^{-1}(t)/dt^2)g, v)| \leqslant c_2|g| \times \times \sqrt{(A^{-1}(t)v, v)}$, $g, v \in H$, $c_2 \geqslant 0$. *Тогда для всех* $f \in \mathcal{H}^-$, $u_0 \in H$, $u_1 \in H_0^-$ *слабые решения* $u \in \mathcal{H}$ *задачи* (1) *единственны.*

В отличие от работы [2] мы не используем абстрактные сглаживающие операторы $A_\varepsilon^{-1}(t) = (I + \varepsilon A(t))^{-1}$, $\varepsilon > 0$, со множествами значений $D(A(t))$ в H при доказательстве теоремы 1 и интегральные сглаживающие операторы $J_\delta^{-1}(t) = (I - \delta(d/dt))^{-1}$, $\delta > 0$, со множеством значений $D(J) = \{w \in \mathcal{H} : dw/dt \in \mathcal{H}, w(T) = 0\}$ в $\mathcal{H}$ при доказательстве теоремы 2.

На основании теорем 1 и 2 из проекционной теоремы Ж.-Л. Лионса выводится априорная оценка для слабых решений $u \in \mathcal{H}$ задачи Коши (1):

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \leqslant c_3 \left(\int_0^T [f(t)]^2_{(-t)} dt + |u_0|^2 + [u_1]^2_{(-0)} \right), \quad c_3 = 4 \max\{1, \sup_{0<t<T} \|A^{-1/2}(t)\|^2_{\mathcal{L}(H)}\},$$

из которой вытекает непрерывная зависимость слабых решений $u \in \mathcal{H}$ от правой части $f \in \mathcal{H}^-$ и начальных данных $u_0 \in H$, $u_1 \in H_0^-$.

Литература

1. Ломовцев Ф. Е. *Дифференцирование по параметру линейных операторов с зависящей от параметра областью определения* // Докл. Академии наук. 2012. Т. 445, № 6. С. 628–630.

2. Ляхов Д. А., Ломовцев Ф. Е. *О слабых решениях задачи Коши для гиперболического дифференциально-операторного уравнения второго порядка с переменной областью определения* // Докл. НАН Беларуси. 2010. Т. 54, № 1. С. 44–49.

ОБ ОДНОЙ РАБОТЕ Ц. БУРСТИНА И В. МАЙЕРА ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

К.Д. Лукин, Г.Ф. Кобяк

Минский Филиал МЭСИ, Минск, Беларусь {klukin,gkobjak}@mesi.ru

В [1] рассматривались две статьи Ц. Бурстина и В. Майера. При этом основное внимание было уделено первой статье. Здесь мы рассматриваем подробнее результаты второй статьи [2], в которой исследуется система двух уравнений в частных производных второго порядка:

$$r = f(x, y, z, p, q, s), \quad t = \varphi(x, y, z, p, q, s). \tag{1}$$

Из соотношений

$$\frac{ds}{dx}=\frac{dr}{dy}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q+\frac{\partial f}{\partial p}s+\frac{\partial f}{\partial q}\phi+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y},\quad \frac{ds}{dy}=\frac{dt}{dx}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p+\frac{\partial\varphi}{\partial p}f+\frac{\partial\varphi}{\partial q}s+\frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}$$

следует, что если $\Delta=1-\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial\varphi}{\partial s}\neq 0$, то их можно разрешить относительно $\frac{\partial s}{\partial x}$ и $\frac{\partial s}{\partial y}$.

Тогда решение исходной системы (1) сводится к интегрированию системы Пфаффа

$$dz=pdx+qdy,\quad dp=fdx+sdy,\quad dq=sdx+\varphi dy,\quad ds=\frac{\partial s}{\partial x}dx+\frac{\partial s}{\partial y}. \qquad (2)$$

Далее, с применением процесса исключения и использованием условия интегрируемости системы (2), определяются четыре различные результата исключения (Eliminftionsresultate). Эти случаи различаются по виду (типу) системы исключения, а именно: система исключения имеет вид: $a)$ $s=s(x,y,z,p,q)$, $b)$ $q=q(x,y,z,p)$, $c)$ $p=p(x,y,z)$, $d)$ $z=z(x,y)$. Затем исследуется каждый тип. Например, уравнения типа $a)$ сводятся к исследованию системы Пфаффа (2) без последнего уравнения.

Для примера, приведенного в конце работы [1], результат исключения приводится к виду:

$$s=\frac{2zq}{px^2}+\frac{q}{x^2},\quad s=\frac{6zq}{px^2}\frac{q}{x^2}.$$

Продолжая процесс, получим следующий результат исключения: $s=2q/x$, $z=px/2$. Подставляя s и z в исходную систему, получаем систему, которая легко интегрируется.

Литература

1. Лукин К.Д. , Поликарпова О.К. *Об одной работе Ц. Бурстина и В. Майера* // IX Белорусская математическая конференция. Гродно, 3–6 ноября 2004 г. Тез. докл. ГрГУ, 2004. Ч. 2. С. 87–88.

2. Burstin C., Mayer W. *Beitrag zur Integration der Systemen von partiellen Differentialgleichungen mit zwei unabhangigen und einer abhangigen Variablen* // Матэматычныя працы Бурстына і Майера. Мн., 1933.

ИНТЕГРАЛЫ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ЛАППО-ДАНИЛЕВСКОГО В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А.Ф. Проневич, П.Ф. Проневич

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
pronevich@tut.by, pavelpronevich@gmail.com

Рассматривается задача о построении интегрального базиса для полной нормальной линейной однородной системы уравнений в частных производных

$$\partial_{x_j}y+\sum_{\xi=1}^{s_j}\alpha_{j\xi}(\widehat{x})A_{j\xi}\widetilde{x}\partial_{\widetilde{x}}y=0,\quad s_j\in\mathbb{N},\quad j=1,\ldots,m, \qquad (1)$$

где $y\in\mathbb{R}$, векторы $\widehat{x}=(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^m$, $\widetilde{x}=(x_{m+1},\ldots,x_{m+n})\in\mathbb{R}^n$, функции $\alpha_{j\xi}:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$, $\xi=1,\ldots,s_j$, являются линейно независимыми на области $\mathcal{X}\subset\mathbb{R}^m$ при каждом $j=1,\ldots,m$, а постоянные вещественные матрицы n-го порядка $A_{j\xi}$ попарно перестановочны.