Из соотношений

$$\frac{ds}{dx}=\frac{dr}{dy}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q+\frac{\partial f}{\partial p}s+\frac{\partial f}{\partial q}\phi+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y},\quad \frac{ds}{dy}=\frac{dt}{dx}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p+\frac{\partial \varphi}{\partial p}f+\frac{\partial \varphi}{\partial q}s+\frac{\partial \varphi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}$$

следует, что если $\Delta = 1-\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial \varphi}{\partial s}\neq 0$, то их можно разрешить относительно $\frac{\partial s}{\partial x}$ и $\frac{\partial s}{\partial y}$.

Тогда решение исходной системы (1) сводится к интегрированию системы Пфаффа

$$dz = pdx + qdy,\quad dp = fdx + sdy,\quad dq = sdx + \varphi dy,\quad ds = \frac{\partial s}{\partial x}dx + \frac{\partial s}{\partial y}. \tag{2}$$

Далее, с применением процесса исключения и использованием условия интегрируемости системы (2), определяются четыре различные результата исключения (Eliminftionsresultate). Эти случаи различаются по виду (типу) системы исключения, а именно: система исключения имеет вид: $a)$ $s = s(x,y,z,p,q)$, $b)$ $q = q(x,y,z,p)$, $c)$ $p = p(x,y,z)$, $d)$ $z = z(x,y)$. Затем исследуется каждый тип. Например, уравнения типа $a)$ сводятся к исследованию системы Пфаффа (2) без последнего уравнения.

Для примера, приведенного в конце работы [1], результат исключения приводится к виду:

$$s = \frac{2zq}{px^2}+\frac{q}{x^2},\quad s = \frac{6zq}{px^2}\frac{q}{x^2}.$$

Продолжая процесс, получим следующий результат исключения: $s = 2q/x$, $z = px/2$. Подставляя s и z в исходную систему, получаем систему, которая легко интегрируется.

Литература

1. Лукин К.Д. , Поликарпова О.К. *Об одной работе Ц. Бурстина и В. Майера* // IX Белорусская математическая конференция. Гродно, 3–6 ноября 2004 г. Тез. докл. ГрГУ, 2004. Ч. 2. С. 87–88.

2. Burstin C., Mayer W. *Beitrag zur Integration der Systemen von partiellen Differentialgleichungen mit zwei unabhangigen und einer abhangigen Variablen* // Матэматычныя працы Бурстына і Майера. Мн., 1933.

ИНТЕГРАЛЫ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ЛАППО-ДАНИЛЕВСКОГО В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А.Ф. Проневич, П.Ф. Проневич

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
pronevich@tut.by, pavelpronevich@gmail.com

Рассматривается задача о построении интегрального базиса для полной нормальной линейной однородной системы уравнений в частных производных

$$\partial_{x_j} y + \sum_{\xi=1}^{s_j}\alpha_{j\xi}(\widehat{x})A_{j\xi}\widetilde{x}\partial_{\widetilde{x}}y = 0,\quad s_j\in\mathbb{N},\quad j=1,\ldots,m, \tag{1}$$

где $y\in\mathbb{R}$, векторы $\widehat{x}=(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^m$, $\widetilde{x}=(x_{m+1},\ldots,x_{m+n})\in\mathbb{R}^n$, функции $\alpha_{j\xi}:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$, $\xi=1,\ldots,s_j$, являются линейно независимыми на области $\mathcal{X}\subset\mathbb{R}^m$ при каждом $j=1,\ldots,m$, а постоянные вещественные матрицы n-го порядка $A_{j\xi}$ попарно перестановочны.

Полную нормальную систему уравнений в частных производных (1) будем называть системой Лаппо-Данилевского, так как она принадлежит классу многомерных дифференциальных систем Лаппо-Данилевского [1, с. 63–64], т. е. удовлетворяет требованию перестановочности матрицы коэффициентов со своим интегралом [2].

На основании частных интегралов с учетом их кратности и условных частных интегралов [3, с. 187–238] разработан спектральный метод [4, 5] построения первых интегралов якобиевых линейных однородных систем уравнений в частных производных. С использованием данных подходов для системы Лаппо-Данилевского (1) построен интегральный базис. Первые интегралы строятся в зависимости от кратности собственных чисел по собственным и присоединенным векторам матриц $B_{j\xi}$, транспонированных к матрицам $A_{j\xi}$, соответственно.

В случае простых элементарных делителей при построении используется

Теорема. *Пусть* $\nu \in \mathbb{C}^n$ *есть общий существенно комплексный собственный вектор матриц* $B_{j\xi}$, *которому соответствуют собственные числа* $\lambda_{j\xi}$, $\xi = 1, \ldots, s_j$, $j = 1, \ldots, m$. *Тогда первыми интегралами системы Лаппо-Данилевского* (1) *будут функции*

$$F_1 : x \to ((\operatorname{Re}\nu \cdot \widetilde{x})^2 + (\operatorname{Im}\nu \cdot \widetilde{x})^2) \exp\left(-2\int \sum_{j=1}^{m} \sum_{\xi=1}^{s_j} \operatorname{Re}\lambda_{j\xi}\alpha_{j\xi}(\widehat{x})\, dx_j\right)$$

и

$$F_2 : x \to \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}\nu \cdot \widetilde{x}}{\operatorname{Re}\nu \cdot \widetilde{x}} - \int \sum_{j=1}^{m} \sum_{\xi=1}^{s_j} \operatorname{Im}\lambda_{j\xi}\alpha_{j\xi}(\widehat{x})\, dx_j \quad \forall x = (\widehat{x}, \widetilde{x}) \in \widetilde{\mathfrak{X}} \subset \mathbb{R}^{m+n}.$$

Литература

1. Гайшун И. В. *Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения.* М.: Едиториал УРСС, 2004.

2. Лаппо-Данилевский И. А. *Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Гостехиздат, 1957.

3. Горбузов В. Н. *Интегралы дифференциальных систем.* Гродно: ГрГУ, 2006.

4. Горбузов В. Н., Проневич А. Ф. *Спектральный метод построения интегрального базиса якобиевой системы в частных производных* // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2001. № 3. С. 17–45.

5. Проневич А. Ф. *Интегралы якобиевых систем уравнений в частных производных.* Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Р.Р. Сафиуллова

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Россия

regina-saf@yandex.ru

Для уравнений гиперболического типа второго порядка исследуется разрешимость некоторой обратной задачи с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени, рассматривается вопрос нахождения вместе с решением $u(x,t)$ дополнительной неизвестной функции $q(t)$.