Пусть D — интервал $(0,1)$, Q — прямоугольник $D\times(0,T)$ конечной высоты T, x, x_0 — точки области D, t — точка интервала $(0,T)$, $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\mu(t)$ — заданные при $x\in[0,1]$, $t\in[0,T]$ функции.

Рассматривается следующая обратная задача: найти функции $u(x,t)$, $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t)+q(t)u(x,t)=f(x,t)$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad u(x_0,t)=\mu(t),\quad u_x(0,t)=\varphi(t),\quad u_x(1,t)=\psi(t).$$

Для поставленной обратной задачи доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

Задачами в близкой постановке занимались И.Р. Валитов [1, 2], С.С. Павлов [3], С.Я. Якубов [4].

В работе [3] рассматривались многомерные обратные задачи с неизвестным коэффициентом $q(t)$, однако условия переопределения были другие, а именно, задавалось интегральное условие переопределения $\int_\Omega K(x)u(x,t)\,dx=\mu(t)$.

При доказательстве результата используется техника, основанная на переходе от исходной задачи к некоторой вспомогательной задаче, доказательстве разрешимости этой задачи и далее построении с помощью решения вспомогательной задачи решения исходной задачи. При решении вспомогательной задачи используются методы регуляризации, срезки и метод продолжения по параметру.

Литература

1. Валитов И. Р., Кожанов А. И. *Обратные задачи для гиперболических уравнений: случай неизвестных коэффициентов, зависящих от времени* // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2006. Т. 6, №1. С. 3–18.

2. Валитов И. Р. *О разрешимости двух обратных задач для гиперболических уравнений* // Тр. Стерлитамакского филиала Академии наук республики Башкортостан. Сер. Физ.-мат. и техн. науки. 2006. №3. С. 64–73.

3. Павлов С. С. *Нелинейные обратные задачи для многомерных гиперболических уравнений с интегральным переопределением* // Матем. заметки ЯГУ. 2011. Т. 19, №2. С. 128–154.

4. Якубов С. Я. *Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения.* Баку: Элм, 1985.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ТРЕХСЛОЙНЫХ ТЕЛ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

И.Б.Сороговец, М.В. Макаренко

Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь

Рассматривается пластина больших размеров, толщина которой значительно меньше других ее размеров (неограниченная пластина). Предполагается, что пластина составлена из трех слоев с различными теплофизическими характеристиками. Между слоями установлен идеальный тепловой контакт. Ось Ox проходит перпендикулярно плоскостям, ограничивающим пластину. Начало оси помещено на одной из ограничивающих поверхностей, а положительное направление выбрано внутрь пластины. Границам слоев соответствуют следующие значения x : $b_0=0$, b_1, b_2, b_3. Толщина

i-го слоя равна $b_i - b_{i-1}$ $(i = 1, 2, 3)$, а теплофизическими характеристиками слоев являются коэффициенты теплопроводности λ_i и коэффициенты температуропроводности a_i.

Пусть $T_i(x; t)$ $(x \in [b_{i-1}; b_i])$ — температура i-го слоя в зависимости от координаты x и времени t. Тогда математическая модель задачи определения температуры трехслойного тела включает в себя: уравнение теплопроводности, записанное для каждого слоя; условия сопряжения температур на внутренних гранях слоев; начальное условие; граничное условие.

Отметим, что граничные условия можно охарактеризовать парой чисел (I, J), $I, J = 1, 2, 3$. Смысл I: на граничной поверхности $x = 0$ задано граничное условие I-го рода; смысл J: на граничной поверхности $x = b_3$ задано граничное условие J-го рода. Возможны 6 различных типов граничных условий: (1,1), (1,2), (2,2), (1,3), (2,3), (3,3). В данной работе рассматриваются первые три из них.

Выпишем математическую модель с граничным условием (1,1):

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2}, \quad (i = 1, 2, 3); \quad T_i(b_i, t) = T_{i+1}(b_i, t),$$

$$\Big(\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} \frac{\partial T_i}{\partial x} = \frac{\partial T_{i+1}}{\partial x}\Big)\Big|_{x=b_i} \quad (i = 1, 2); \quad T_i(x, 0) = f_i(x) \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$T_1(0, t) = \varphi_1(t), \quad T_3(b_3, t) = \varphi_3(t).$$

Анализируя литературные источники, можно сделать заключение, что основным методом решения краевых задач для многослойных тел является метод интегральных преобразований. Одним из недостатком этого метода является тот факт, что от изображений не всегда удается удобным образом перейти к оригиналам.

В данной работе для решения указанных задач применен метод разделения переменных, т. е. каждое из уравнений теплопроводности решено методом разделения переменных. С учетом условий сопряжения получена система решений однородных краевых задач (когда $\varphi_1(t) = 0$, $\varphi_3(t) = 0$). Выпишем эти решения для задачи (1,1):

$$T_{1,n}(x, t) = C_n e^{-\mu_n^2 t} B_1(\mu_n) \sin \frac{\mu_n x}{\sqrt{a_1}},$$

$$T_{2,n}(x, t) = C_n e^{-\mu_n^2 t} \left(A_2(\mu_n) \cos \frac{\mu_n x}{\sqrt{a_2}} + \sin \frac{\mu_n x}{\sqrt{a_2}} \right),$$

$$T_{3,n}(x, t) = C_n e^{-\mu_n^2 t} \left(A_3(\mu_n) \cos \frac{\mu_n x}{\sqrt{a_3}} + B_3(\mu_n) \sin \frac{\mu_n x}{\sqrt{a_3}} \right), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где коэффициенты B_1, A_2, A_3, B_3 удовлетворяют определенной системе 4-х линейных уравнений с четырьмя неизвестными. Числа μ_n являются решениями характеристического уравнения

$$A_3(\mu) \cos \frac{\mu b_3}{\sqrt{a_3}} + B_3(\mu) \sin \frac{\mu b_3}{\sqrt{a_3}} = 0.$$

Решения неоднородной задачи с учетом начального условия получены в виде рядов Фурье по указанным выше системам функций.