НЕКЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Р.Н. Тураев

Институт Математики при Национальным Университете Узбекистана

rasul.turaev@mail.ru

Неклассические краевые задачи часто возникают при построении математических моделей различных явлений физики, биологии и экологии. Неклассические задачи с нелокальными граничными условиями используются для математического моделирования процессов загрязнения в реках, морях, обусловленного сточными водами [1, 2]. Задачи с интегральным граничным условием встречаются в процессах распространения тепла в тонком нагретом стержне, если задан закон изменения общего количества тепла стержня [3]. Для параболических уравнений задачи с интегральным условием рассмотрены в работах [4, 5], а задачи со свободной границей — в работах [6, 7].

В настоящей работе рассматривается задача со свободной границей типа Флорина с интегральным условием. Требуется найти пару функций $u(x,t)$, $s(t)$, таких, что $s(t)$ определена и непрерывно дифференцируема в промежутке $0 \leqslant t \leqslant T$, а функция $u(x,t)$ в области $D = \{(x,t) : 0 < x < s(t),\ 0 < t \leqslant T\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t = u_{xx}, \quad (x,t) \in D, \tag{1}$$

начальным и граничным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant s(0) = s_0 > 0, \tag{2}$$

$$u_x(0,t) = f(u(0,t),t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

$$\int\limits_{x_0}^{s(t)} u(x,t)dx = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

$$u(s(t),t) = p, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ — заданная функция, $f(t,\xi)$ определена и непрерывна при $t \geqslant 0$, $|\xi| < \infty$, она ограничена вместе с производными в замкнутом множестве своих аргументов, также постоянные x_0, p удовлетворяют неравенствам $0 < x_0 < s_0$, $p > 0$.

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала задача (1)–(5) сводится к задаче типа Стефана с нелокальным граничным условием. Затем получаются некоторые априорные оценки для решений $s(t)$, $u(x,t)$ и их производных. Далее на основе полученных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, доказываются единственность решения и глобальная разрешимость задачи.

Литература

1. Самарский А. А., Михайлов А. П. *Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры.* М.: Наука. Физматлит, 1997. 320 с.

2. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии.* М.: Высшая школа, 1995. 301 с.

3. Cannon J. R. *The solution of the heat equation subject to the specification of energy* // Quart. Appl. Math. 1963. Vol. XXI, no. 2. P. 155–160.

4. Ионкин Н. И. *Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием* // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.

5. Юрчук Н. И. *Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений* // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 12. С. 2117–2126.
6. Cannon J. R. *The one phase Stefan problem subject to the specification of energy* // J. Math. Anal. Appl. 1982. Vol. 861. P. 281–291.
7. Comparini E. and Tarzia D. A. *A Stefan problem for the heat equation subject to an integral condition* // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1985. Vol. 73. P. 119–136.

ТРЕТЬЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МЛАДШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Е.С. Чеб

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
cheb@bsu.by

В полуполосе $Q = [0, \infty) \times \Omega \subset \mathbb{R}^2$ относительно функции $u : \overline{Q} = [0, \infty) \times \overline{\Omega} \ni \ni (t, x) \to u(t, x),$ где $\overline{\Omega}$ — замыкание области $\Omega = (0, l),$ рассмотрим гиперболическое уравнение второго порядка

$$(\partial_t - a^{(1)}\partial_x + b^{(1)})(\partial_t u - a^{(2)}\partial_x u + b^{(2)}u) = f(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(t, x)\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \partial_t u\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \Omega. \tag{2}$$

Будем рассматривать случай, когда коэффициенты $a^{(1)} > 0$, $a^{(2)} < 0$, $|a^{(1)}| < |a^{(2)}|$, $b^{(1)}, b^{(2)} \geqslant 0$.

Общее решение уравнения (1) из класса дважды непрерывно дифференцируемых функций $C^2(\mathbb{R}^2)$ представляется в виде суммы

$$u(t, x) = e^{-b^{(1)}t}\, x g_1(x + a^{(1)}t) + e^{-b^{(2)}t} g_2(x + a^{(1)}t), \tag{3}$$

где g_1 и g_2 — любые функции из $C^2(\mathbb{R}^2)$. Требуется определить общий вид функций g_1 и g_2 в представлении (3) при условии, что будут выполняться начальные (2) и некоторые граничные условия.

Для уравнения (1) рассматриваются граничные условия вида

$$\partial_x u(t, 0) + \sigma^{(1)} u(t, 0) = \mu^{(1)}(t), \quad \partial_x u(t, l) + \sigma^{(2)} u(t, l) = \mu^{(2)}(t), \quad t \in (0, \infty). \tag{4}$$

Методом характеристик [1, 2] построено классическое решение задач (1), (2), (4), и получены условия согласования начальных и граничных условий. В случае, когда $b^{(1)} = b^{(2)} = 0,$ они имеют вид:

$$\varphi'(0) + \sigma^{(1)}\varphi(0) = \mu^{(1)}(0), \quad \varphi'(l) + \sigma^{(2)}\varphi(l) = \mu^{(2)}(0),$$

$$\psi'(0) + \sigma^{(1)}\psi(0) = \mu^{(1)'}(0), \quad \psi'(l) + \sigma^{(2)}\psi(l) = \mu^{(2)'}(0).$$

В общем случае они более громоздкие и здесь не приводятся.