5. Юрчук Н. И. *Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений* // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 12. С. 2117–2126.

6. Cannon J. R. *The one phase Stefan problem subject to the specification of energy* // J. Math. Anal. Appl. 1982. Vol. 861. P. 281–291.

7. Comparini E. and Tarzia D. A. *A Stefan problem for the heat equation subject to an integral condition* // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1985. Vol. 73. P. 119–136.

ТРЕТЬЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МЛАДШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Е.С. Чеб

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
cheb@bsu.by

В полуполосе $Q = [0,\infty) \times \Omega \subset \mathbb{R}^2$ относительно функции $u : \overline{Q} = [0,\infty) \times \overline{\Omega} \ni \ni (t,x) \to u(t,x)$, где $\overline{\Omega}$ — замыкание области $\Omega = (0,l)$, рассмотрим гиперболическое уравнение второго порядка

$$(\partial_t - a^{(1)}\partial_x + b^{(1)})(\partial_t u - a^{(2)}\partial_x u + b^{(2)}u) = f(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(t,x)\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \partial_t u\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \Omega. \tag{2}$$

Будем рассматривать случай, когда коэффициенты $a^{(1)} > 0$, $a^{(2)} < 0$, $|a^{(1)}| < |a^{(2)}|$, $b^{(1)}, b^{(2)} \geqslant 0$.

Общее решение уравнения (1) из класса дважды непрерывно дифференцируемых функций $C^2(\mathbb{R}^2)$ представляется в виде суммы

$$u(t,x) = e^{-b^{(1)}t} x g_1(x + a^{(1)}t) + e^{-b^{(2)}t} g_2(x + a^{(1)}t), \tag{3}$$

где g_1 и g_2 — любые функции из $C^2(\mathbb{R}^2)$. Требуется определить общий вид функций g_1 и g_2 в представлении (3) при условии, что будут выполняться начальные (2) и некоторые граничные условия.

Для уравнения (1) рассматриваются граничные условия вида

$$\partial_x u(t,0) + \sigma^{(1)}u(t,0) = \mu^{(1)}(t), \quad \partial_x u(t,l) + \sigma^{(2)}u(t,l) = \mu^{(2)}(t), \quad t \in (0,\infty). \tag{4}$$

Методом характеристик [1, 2] построено классическое решение задач (1), (2), (4), и получены условия согласования начальных и граничных условий. В случае, когда $b^{(1)} = b^{(2)} = 0$, они имеют вид:

$$\varphi'(0) + \sigma^{(1)}\varphi(0) = \mu^{(1)}(0), \quad \varphi'(l) + \sigma^{(2)}\varphi(l) = \mu^{(2)}(0),$$

$$\psi'(0) + \sigma^{(1)}\psi(0) = \mu^{(1)'}(0), \quad \psi'(l) + \sigma^{(2)}\psi(l) = \mu^{(2)'}(0).$$

В общем случае они более громоздкие и здесь не приводятся.

Теорема. *Предположим, что функции* $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$, $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$, $\mu^{(1)} \in C^1[0,\infty)$, $\mu^{(2)} \in C^1[0,\infty)$, $b^{(i)} = 0$, $i = 1,2$, $f(t,x) = 0$ *и для них выполняются условия согласования* (4). *Тогда в классе функций* $C^2(\overline{Q})$ *существует единственное классическое решение и задачи* (1), (2), (4).

Литература

1. Корзюк В. И., Чеб Е. С., Карпечина А. А. *Классическое решение первой граничной задачи в полуполосе для линейного гиперболического уравнения второго порядка* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2012. Т. 20, № 2. С. 64–67.
2. Корзюк В. И., Чеб Е. С., Карпечина А. А. *Гиперболическое уравнение второго порядка в случае двух независимых переменных* // Весцi НАН Беларусi. 2013. № 1. С. 71–78.

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДАМИ F-МОНОГЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В.А. Шилинец

Белорусский государственный педагогический университет, Минск, Беларусь
shilinets@bspu.unibel.by

Для исследования дифференциальных уравнений в частных производных используются разные методы. Одним из таких методов является метод функций, моногенных в смысле В. С. Федорова (F-моногенных) [1, 2]. В частности, при помощи F-моногенных функций удается построить функционально-инвариантные решения системы Максвелла для электромагнитного поля в пустоте и функционально-инвариантные вектор-аналитические функции. Кроме этого, при помощи указанных функций удается для отдельных видов дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений строить решения в замкнутой форме.

Предметом нашего исследования является система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка следующего вида:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,\\
&\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0,\\
&\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0,
\end{aligned} \tag{1}
$$

где u, v, w — искомые комплекснозначные функции трех действительных переменных x, y, z класса $C^2(D)$, D — некоторая односвязная область евклидова пространства (x, y, z) . Рассматривается задача нахождения общего решения системы дифференциальных уравнений (1).

Теорема 1. *Система дифференциальных уравнений в частных производных* (1) *эквивалентна уравнению в формальных производных*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

где

$$f = u + \lambda v + \lambda^2 w, \quad t = z\lambda^2 \quad (\lambda^3 = -1), \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda^2\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right).$$