Теорема. *Предположим, что функции* $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$, $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$, $\mu^{(1)} \in C^1[0,\infty)$, $\mu^{(2)} \in C^1[0,\infty)$, $b^{(i)} = 0$, $i = 1, 2$, $f(t,x) = 0$ *и для них выполняются условия согласования* (4). *Тогда в классе функций* $C^2(\overline{Q})$ *существует единственное классическое решение и задачи* (1), (2), (4).

Литература

1. Корзюк В. И., Чеб Е. С., Карпечина А. А. *Классическое решение первой граничной задачи в полуполосе для линейного гиперболического уравнения второго порядка* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2012. Т. 20, № 2. С. 64–67.

2. Корзюк В. И., Чеб Е. С., Карпечина А. А. *Гиперболическое уравнение второго порядка в случае двух независимых переменных* // Весцi НАН Беларусi. 2013. № 1. С. 71–78.

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДАМИ F-МОНОГЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В.А. Шилинец

Белорусский государственный педагогический университет, Минск, Беларусь
shilinets@bspu.unibel.by

Для исследования дифференциальных уравнений в частных производных используются разные методы. Одним из таких методов является метод функций, моногенных в смысле В. С. Федорова (F-моногенных) [1, 2]. В частности, при помощи F-моногенных функций удается построить функционально-инвариантные решения системы Максвелла для электромагнитного поля в пустоте и функционально-инвариантные вектор-аналитические функции. Кроме этого, при помощи указанных функций удается для отдельных видов дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений строить решения в замкнутой форме.

Предметом нашего исследования является система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка следующего вида:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,\\
&\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0,\\
&\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

где u, v, w — искомые комплекснозначные функции трех действительных переменных x, y, z класса $C^2(D)$, D — некоторая односвязная область евклидова пространства (x, y, z) . Рассматривается задача нахождения общего решения системы дифференциальных уравнений (1).

Теорема 1. *Система дифференциальных уравнений в частных производных* (1) *эквивалентна уравнению в формальных производных*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

где

$$f = u + \lambda v + \lambda^2 w, \quad t = z\lambda^2 \quad (\lambda^3 = -1), \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda^2\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right).$$

Теорема 2. *Общее решение уравнения* (2) *имеет вид*

$$f = V_1 + V_2 \exp(-t), \tag{3}$$

где $V_1 = V_1[p, q, D]$, $V_2 = V_2[p, q, D]$ — *произвольные функции, F-моногенные по функциям* p *и* q *в области* D $(p = x + 2y\lambda + z\lambda^2,\ q = y\lambda + z\lambda^2,\ t = z\lambda^2)$.

Изучив структуру произвольной функции $V_1 = V_1[p, q, D]$, F-моногенной по функциям $p = x + 2y\lambda + z\lambda^2$ и $q = y\lambda + z\lambda^2$ в области D, и выделив компоненты при базисных единицах $1, \lambda, \lambda^2$ общего решения (3) дифференциального уравнения в формальных производных (2), было найдено общее решение u, v, w системы дифференциальных уравнений в частных производных (1).

Литература

1. Федоров В. С. *Основные свойства обобщенных моногенных функций* // Изв. вузов. Математика. 1958. № 6. С. 257–265.

2. Стельмашук Н. Т., Шилинец В. А. *О преобразовании к каноническому виду системы линейных уравнений в частных производных с помощью двойных дифференциальных операторов* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2008. № 2. С. 61–65.

ДИСКРЕТНЫЕ АНАЛОГИ ТЕОРЕМ СРАВНЕНИЯ

Д.А. Щадинский

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
denisfpmi@gmail.com

В работе доказываются разностные аналоги теорем сравнения для решения задачи Коши для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти теоремы используются при анализе возникновения неустойчивых решений в задачах Неймана для уравнения теплопроводности и их аппроксимациях [1].

Предположим, что существует классическое решение $u(t) \in C^1(0, T] \cap C[0, T]$ задачи

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \quad 0 < t \leqslant T, \quad u(0) = u_0.$$

В дальнейшем ограничимся случаем, когда функция $f(t, v)$, удовлетворяет неравенствам

$$f_2(t)g_2(v) \leqslant f(t, v) \leqslant f_1(t)g_1(v),$$

где $f_k(t), g_k(v)$, $k = 1, 2$ — непрерывные положительные и монотонно возрастающие функции при всех $t \in [0, T]$, $v \in D_\varepsilon(u)$. В соответствии с [2], решение $u(t)$ в этом случае является нижним и верхним решением следующих дифференциальных задач:

$$\frac{dv_1}{dt} = f_1(t)g_1(v_1), \quad \frac{dv_2}{dt} = f_2(t)g_2(v_2), \quad v_k(0) = u_0, \quad k = 1, 2, \tag{1}$$

т. е. $v_1(t) \leqslant u(t) \leqslant v_2(t)$.

На отрезке $[0, T]$ введем неравномерную сетку $\bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{0\}$, $\omega_\tau = \{t_{n+1} = t_n + \tau_n$, $\tau_n > 0$, $n = 0, 1, \ldots, N_0 - 1$, $t_0 = 0$, $t_{N_0} = T\}$, на которой рассмотрим следующие разностные схемы:

$$\frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\tau_n} = \varphi_k(t_{n+1})q_k(v_k^{n+1}), \quad v_k^0 = u_0, \quad k = 1, 2,$$