Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX(t,\omega) = f(t, X(t,\omega),\omega)dt + g(t, X(t,\omega),\omega)dW(t,\omega) + \sigma(t, X(t,\omega),\omega)dB^H(t,\omega), \quad (1)$$

с начальным условием

$$X(0,\omega) = \xi(\omega). \quad (2)$$

Определение 1. Отображение $h : R_+ \times R^d \times \Omega \to R^{d\times l}$ имеет *линейный порядок роста*, если для любого $T \in R_+$ существует $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина $M_T(\omega)$ такая, что для почти всех $\omega \in \Omega$ для любых $(t, X) \in [0,T] \times R^d$ выполняется неравенство $|h(t, X,\omega)| \leqslant M_T(\omega)(1 + |X|)$.

Определение 2. Пусть $\alpha,\ \beta \in (0,1]$. Отображение $h : R_+ \times R^d \times \Omega \to R^{d\times l}$ удовлетворяет (α,β)-*условию Гельдера*, если для любого $T \in R_+$ существует $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина $K_T(\omega)$ такая, что для почти всех $\omega \in \Omega$ для любых $t,\ s \in [0,T],\ X, Y \in R^d$ справедливо неравенство $|h(t, X,\omega) - h(s, Y,\omega)| \leqslant K_T(\omega)(|t - s|^\alpha + |X - Y|^\beta)$.

Определение 3. Отображение $h : R_+ \times R^d \times \Omega \to R^{d\times l}$ удовлетворяет *локальному условию Липшица*, если для любых $a,\ T \in R_+$ существует $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина $L_{a,T}(\omega)$ такая, что для почти всех $\omega \in \Omega$ для любых $t \in [0,T],\ X,\ Y \in R^d$, $|X| \leqslant a,\ |Y| \leqslant a$, выполняется неравенство $|h(t, X,\omega) - h(t, Y,\omega)| \leqslant L_{a,T}(\omega)|X - Y|$.

Определение 4. Будем говорить, что выполняется условие A, если отображения $f,\ g$ удовлетворяют локальному условию Липшица и имеют линейный порядок роста, отображение σ удовлетворяет $(\delta, 1)$-условию Гельдера, где $\delta > 1 - H$.

Определение 5. *Решением* уравнения (1) с начальным условием (2) будем называть $\mathcal{F}_t$-согласованный процесс $X(t,\omega),\ t \in R_+,\ \omega \in \Omega$, имеющий почти наверное непрерывные по Гельдеру траектории любого порядка $\alpha \in (1-H, \min\{\delta, 1/2\})$, такой, что для каждого $t \in R_+$ почти наверное выполняется равенство $X(t,\omega) = \xi(\omega) + \int_0^t f(s, X(s,\omega),\omega)\, ds + \int_0^t g(s, X(s,\omega),\omega)\, dW(s,\omega) + \int_0^t \sigma(s, X(s,\omega),\omega)\, dB^H(s,\omega)$.

Определение 6. Решение $X(t,\omega)$ уравнения (1) с начальным условием (2) является *единственным*, если для любого решения $Y(t,\omega)$ уравнения (1) с начальным условием (2) выполняется $P(X(t,\omega) = Y(t,\omega)\ \forall t \in R_+) = 1$.

Теорема. *Если выполняется условие A, то уравнение* (1) *с начальным условием* (2) *имеет единственное решение.*

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА С ВЫРОЖДЕНИЕМ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

С.С. Орлов

Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия
orlov_sergey@inbox.ru

Представляемая работа посвящена исследованию вопросов существования и единственности обобщенного и классического решений интегрального уравнения

$$Bu(t) - \int_0^t g(t-s)Au(s)ds = f(t),$$

и задачи Коши $Bu^{(N)}(t) - \int_0^t g(t-s)Au(s)\,ds = f(t)$, $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$, ..., $u^{(N-1)}(0) = u_{N-1}$. Здесь $u(t)$ и $f(t)$ — неизвестная и заданная функции аргумента $t \geqslant 0$ со значениями в банаховых пространствах E_1 и E_2 соответственно, B и A — замкнутые линейные операторы с плотными в E_1 областями определения и $D(B) \subseteq D(A)$. Оператор B предполагается фредгольмовым, т. е. $\overline{R(B)} = R(B)$ и $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n < +\infty$, а $g(t)$ — числовой функцией, имеющей нуль порядка r в точке $t = 0$.

Для исследования поставленных абстрактных задач используется теория распределений со значениями в банаховых пространствах [1], центральное место в которой занимает конструкция фундаментальной оператор-функции интегро-дифференциального оператора [2]. В предположении полноты A-жорданова набора фредгольмова оператора B восстановлен явный вид фундаментальной оператор-функции рассматриваемых интегрального и интегро-дифференциального операторов. На этой основе доказана однозначная разрешимость соответствующих задач в классе распределений с ограниченным слева носителем, а также получены условия, при которых построенные обобщенные решения совпадут с классическими. Абстрактные результаты проиллюстрированы на примерах содержательных начально-краевых задач, возникающих в математической теории упругости и физике плазмы.

Наличие нуля у ядра $g(t)$ в точке $t = 0$ приводит к возникновению нового эффекта. Показано, что порядок сингулярности обобщенных решений помимо известной зависимости от жордановой структуры растет с увеличением r. Естественным образом увеличивается и количество ограничений на входные данные задач в теоремах существования и единственности их классических решений. Этим свойством рассматриваемые классы уравнений принципиально отличаются от изученных автором ранее в [3, 4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 14-01-31175 мол_а.

Литература

1. *Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications* / N. Sidorov [et al.]. Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.

2. Фалалеев М. В. *Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов* // Сиб. матем. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1167–1182.

3. Фалалеев М. В., Орлов С. С. *Обобщенные решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах и их приложения* // Труды ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 286–297.

4. Орлов С. С. *Обобщенные решения интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков в банаховых пространствах.* Дисс... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. ИГУ. Иркутск, 2013.

ОПЕРАТОР ВЛАДИМИРОВА И ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА НА ПОЛЕ p-АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Е.М. Радыно

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
yauhen.radyna@gmail.com

Рассмотрим стандартное определение пространств Соболева на действительной прямой:

$$W^{k,2}(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f^{(k)} \in L^2(\mathbb{R})\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$