СВЯЗЬ МЕЖДУ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ГИЛЬБЕРТА ФУНКЦИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ЯДЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.Г. Яблонская

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
sidorag@bsu.by

Преобразование Фурье и сингулярные интегралы, в частности преобразование Гильберта, являются одними из основных инструментов теории дифференциальных уравнений. Пусть X — банахово пространство. Преобразование Гильберта функций $f:\mathbf{Q}_p\to X$ на пространстве квадратично интегрируемых по Бохнеру функций $L_2(\mathbf{Q}_p,X)$ задается как сингулярный интеграл

$$Hf(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\Gamma_p(0,\theta)}\int\limits_{\mathbf{Q}_p\setminus B[0,p^{-k}]}\frac{\theta(t)f(x-t)}{|t|_p}\,d\mu(t),$$

где μ — мера Хаара, θ — мультипликативный не тривиальный характер на единичной сфере $S(0,1)=\{t\in\mathbf{Q}_p:|t|_p=1\}\subset\mathbf{Q}_p^*$. Скалярный множитель $\Gamma_p(0,\theta)$ называется *локальной гамма-функцией* и вычисляется по формуле

$$\Gamma_p(0,\theta)=\int\limits_{\mathbf{Z}_p^*}\theta(t)e^{2\pi i\{p^{-k}t\}_p}\,dt,$$

где k — ранг локального характера θ.

Связь между преобразованием Фурье и преобразованием Гильберта на языке операторов можно задать следующим образом:

$$H=F^{-1}M_{\overline{\theta}}F,$$

где F — преобразование Фурье, $M_{\overline{\theta}}$ — оператор умножения на мультипликативный комплексно-сопряженный характер $\overline{\theta}$ $(\theta\neq 1)$.

Теорема 1. *Если банахово пространство X изоморфно гильбертову пространству, то преобразование Гильберта $H:L_2(\boldsymbol{Z}_p,X)\to L_2(\boldsymbol{Z}_p,X)$ является ограниченным оператором.*

Поскольку полное ядерное пространство может быть представлено в виде проективного предела некоторого семейства гильбертовых пространств, то справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если локально выпуклое пространство E является полным ядерным, то преобразование Гильберта $H:L_2(\boldsymbol{Z}_p,X)\to L_2(\boldsymbol{Z}_p,X)$ является непрерывным оператором.*

Литература

1. Радыно Е. М., Радыно Я. В., Сидорик А. Г. *Характеристика гильбертовых пространств с использованием преобразования Фурье на поле p-адических чисел* // Докл. НАН Беларуси. 1993. Т. 48, № 5. С. 17–22.

2. Сидорик А. Г. *Преобразование Фурье функций со значениями в локально выпуклом векторном пространстве* // Весн. Гродзенскага дзярж. ун-та ім. Я. Купалы. Сер. 2. Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. 2011. № 1(107). С. 30–35.