О СИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ ВЯЗКОЙ СРЕДЫ

Д.П. Ющенко [1], Ю.А. Ермоленко [2]

[1] Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель,Беларусь
yuschenko@gsu.by
[2] ООО «Интервэйл-Гомель», Гомель, Беларусь
jlabych@yandex.ru

Обобщенная однородная система Навье — Стокса, описывающая колебательное состояние вязких микрополярных несжимающихся жидкостей, имеет вид [1]:

$$(\mu-\gamma)\Delta v - 2\gamma\,\mathrm{rot}\,\omega - \mathrm{grad}\,p + \rho\sigma^2 v = 0,$$

$$\theta\Delta\omega + (\eta+\tau)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\omega - \gamma\,\mathrm{rot}\,v + 2\gamma\omega + \rho\sigma^2\omega = 0, \quad \mathrm{div}\,v = 0, \tag{1}$$

где $v=(v_1,\,v_2,\,v_3)$ — линейная скорость течения жидкости, $\omega=(\omega_1,\,\omega_2,\,\omega_3)$ — угловая скорость, p — давление, μ — коэффициент сдвиговой вязкости, η, τ, θ — коэффициенты вращательной вязкости, γ — мера сцепления жидкой частицы со своим окружением, ρ — плотность жидкости, σ — частота колебаний.

Для системы (1) построена матрица фундаментальных решений $\Phi(x,\,y)$, имеющая точечную особенность в точке $x=y$, причем сингулярная часть матрицы $\Phi(x,\,y)$ имеет вид:

$$\Phi_0(x,y) = \|a_{i,j}\|,$$

где

$$a_{ij} = \frac{1}{8\pi(\mu-\gamma)}\left[\frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{(x_i-y_i)(x_j-x_j)}{r^3}\right],$$

$$a_{i+3,j+3} = \frac{1}{16\pi\theta(\eta+\tau+\theta)}\left[(\eta+\tau+2\theta)\frac{\delta_{ij}}{r} + (\eta+\tau)\frac{(x_i-y_i)(x_j-x_j)}{r^3}\right],$$

$$a_{i+3,j} = a_{i,j+3} = 0, \quad a_{i7} = a_{7i} = \frac{1}{4\pi}\frac{x_i-y_i}{r^3}, \quad a_{7\,7} = (\mu-\gamma)\delta(x-y), \quad i,j=1,2,3,$$

$\delta(x-y)$ — дельта-функция Дирака, r — евклидово расстояние от точки $x=(x_1,x_2,x_3)$ до точки $y=(y_1,y_2,y_3)$.

Наличие в матрице $\Phi(x,\,y)$ особенностей разных порядков (первого, второго, дельта-функции) обусловлено разными порядками старших производных в обобщенной системе Навье — Стокса.

Установлено, что в окрестности бесконечности матрица $\Phi(x,\,y)$ ведет себя как матрица $B=\|b_{i\,j}\|$, где

$$b_{ij} = \frac{1}{r}, \quad b_{i+3,j+3} = \frac{1}{r^3}, \quad b_{i+3,j} = b_{j,i+3} = \frac{1}{r^2},$$

$$b_{i7} = b_{7i} = \frac{1}{r^2}, \quad b_{77} = b_{i+3,7} = b_{7,i+3} = 0, \quad i,j=1,2,3.$$

Для областей, ограниченных достаточно гладкими поверхностями, получены формулы Грина и интегральные представления решений системы (1). Установлено также, что любое решение внутри таких областей имеет производные любого порядка.

Литература

1. Аэро Э. Л., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В. *Асимметрическая гидромеханика* // ПММ. 1964. Т. 29. С. 297–308.