показано, что рассматриваемые системы обладают переменной диссипацией с нулевым средним, означающей, что в среднем за период по имеющейся периодической координате диссипация в системе равна нулю, хотя в разных областях фазового пространства в системе может присутствовать как подкачка энергии, так и ее рассеяние. На базе полученного материала проанализированы динамические системы, возникающие в динамике твердого тела. В результате обнаружен ряд случаев полной интегрируемости уравнений движения в трансцендентных функциях и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Получены некоторые обобщения на условия интегрируемости более общих классов неконсервативных динамических систем (динамика четырехмерного твердого тела).

Изучаются некоторые общие условия интегрируемости в элементарных функциях для систем на двумерной плоскости и касательных расслоениях одномерной сферы (двумерный цилиндр) и двумерной сферы (четырехмерное многообразие). При этом приводится интересный пример трехмерного фазового портрета системы маятникового типа, которая описывает движение сферического маятника, помещенного в поток набегающей среды (см. также [3–5]).

Приводятся достаточные условия существования первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций, для многопараметрических систем третьего порядка. В работе мы имеем дело с тремя, на первый взгляд, независимыми свойствами: (*i*) выделенный класс систем с симметриями; (*ii*) обладание этим классом систем переменной диссипацией с нулевым средним (по имеющейся периодической переменной), что позволяет их рассматривать как «почти» консервативные системы; (*iii*) в некоторых случаях обладание ими полным набором трансцендентных первых интегралов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 12-01-00020-а).

Литература

1. Шамолин М. В. *Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела.* М.: «Экзамен», 2007.

2. Шамолин М. В. *Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования* // Докл. РАН. 2011. Т. 440. № 2. С. 187–190.

3. Шамолин М. В. *Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования* // Докл. РАН. 2012. Т. 444. № 5. С. 506–509.

4. Шамолин М. В. *Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования* // Докл. РАН. 2013. Т. 449. № 4. С. 416–419.

5. Шамолин М. В. *Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле* // Докл. РАН. 2013. Т. 453. № 1. С. 46–49.

ПРОНИКНОВЕНИЕ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ ЧЕРЕЗ СФЕРИЧЕСКУЮ УПРУГУЮ ОБОЛОЧКУ

Г.Ч. Шушкевич, Н.Н. Киселева

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

g-shu@rambler.ru

Пусть пространство R^3 разделено концентрическими сферами $S_1(r_1 = a_1)$ и $S_2(r_1 = a_2)$ с центром в точке O_1 на три области $D_0(r_1 > a_1)$, $D_1(a_2 < r_1 < a_1)$,

$D_2(0 \leqslant r_1 < a_2)$. В области D_0 находится идеально тонкая незамкнутая сферическая оболочка Γ_1 с углом раствора θ_0, расположенная на сфере Γ радиуса a с центром в точке O. Область пространства, ограниченную сферой Γ, обозначим через $D_0^{(0)}(0 \leqslant r < a)$ и $D_0^{(1)} = D_0 \backslash (D_0^{(0)} \cup \Gamma)$. Расстояние между точками O и O_1 обозначим через h.

В точке O расположен точечный излучатель звуковых волн, колеблющихся с круговой частотой ω. Области D_j, $j = 0, 2$, заполнены материалом, в котором не распространяются сдвиговые волны. Плотность среды и скорость звука в области D_j обозначим соответственно через $\tilde{\rho}_j$, c_j, $j = 0, 2$. Область D_1 — сферический упругий слой. Под воздействием звукового поля упругий слой совершает колебания, его деформация определяется вектором смещения $\vec{u}$, который удовлетворяет уравнению Ламе [1]:

$$\tilde{\mu}\Delta\vec{u} + (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} + \omega^2\tilde{\rho}\vec{u} = 0,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа, $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ — коэффициенты Ламе, $\tilde{\rho}$ — плотность материала упругой среды.

Для решения задачи свяжем с точками O и O_1 сферические координаты. Обозначим через p_c давление звукового поля источника, $p_0^{(0)}$ — давление рассеянного звукового поля в области $D_0^{(0)}$, $p_0 = p_0^{(1)} + p_0^{(2)}$ — давление рассеянного звукового поля в области $D_0^{(1)}$, p_2 — давление рассеянного звукового поля в области D_2.

Решение дифракционной задачи сводится к нахождению вектора смещения $\vec{u}$, давлений звукового поля $p_0^{(j)}$, $j = 0, 1, 2$, p_2, которые удовлетворяют:

1) граничному условию на поверхности сферической акустически жесткой оболочки Γ_1 :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(p_c + p_0^{(0)}\right)\Big|_{\Gamma_1} = 0;$$

2) граничным условиям взаимодействия звукового поля с упругим слоем на оболочках S_j, $j = 1, 2$:

$$u_r|_{S_j} = \begin{cases} \omega^{-2}\tilde{\rho}_0^{-1}\dfrac{\partial p_0}{\partial r_1}\Big|_{S_1}, & j = 1, \\ \omega^{-2}\tilde{\rho}_2^{-1}\dfrac{\partial p_2}{\partial r_1}\Big|_{S_2}, & j = 2, \end{cases} \qquad \frac{1}{r_1}\frac{\partial u_r}{\partial \theta_1} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r_1} - \frac{1}{r_1}u_\theta\Big|_{s_j} = 0,$$

$$(2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})\frac{\partial u_r}{\partial r_1} + \frac{2\tilde{\lambda}}{r_1}u_r + \frac{\tilde{\lambda}}{r_1}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta_1} + \frac{\tilde{\lambda}}{r_1}\,\mathrm{ctg}\,\theta_1 u_\theta\Big|_{s_j} = \begin{cases} -p_0|_{s_1}, & j = 1, \\ -p_2|_{s_2}, & j = 2, \end{cases}$$

и условию на бесконечности [1].

Используя соответствующие теоремы сложения, решение поставленной краевой задачи сведено к решению бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором. Численно исследовано влияние некоторых параметров задачи на значение коэффициента ослабления (экранирования) звукового поля в D_2.

Литература

1. Новацкий В. *Теория упругости.* М.: Мир, 1970.