

для соответствующего марковского диффузионного процесса, который описывает случайное изменение со временем относительной концентрации x_t реагентов химической реакции, $x_t \in [0, 1]$, где $p(x, t)$ — плотность распределения случайных значений x_t , $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in [0, 1]$ — параметры, модели. Интерес представляют решения, которые удовлетворяют граничному условию отсутствия потока через границу

$$f(x)p(x, t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial [g^2(x)p(x, t)]}{\partial x} = 0.$$

Оказывается, что финальная плотность $p(x)$, которая является пределом при $t \rightarrow \infty$ решений $p(x, t)$, испытывает бифуркационную перестройку при изменении параметров системы. В отличие от работы [1], эта перестройка исследована для любых допустимых значений параметров. Бифуркационная перестройка выражается в том, что плотность $p(x)$ превращается из унимодальной в бимодальную при переходе через критическую поверхность в пространстве параметров $\langle \lambda, \sigma^2, \alpha \rangle$. Уравнение этой поверхности получается из условия одновременного обращения в нуль производных $p'(x) = p''(x) = 0$ и имеет вид:

$$\lambda^4 + \lambda^2(1 - 5\sigma^2 - \sigma^4/2) - \lambda(9\sigma^4 + 18\sigma^2 - 4\lambda^2)(\alpha - 1/2) - 4\sigma^2(1 - \sigma^2/4)^3 - 27\sigma^4(\alpha - 1/2)^2 = 0.$$

При этом нужно выделить только такие решения, для которых выполняется условие

$$\left| \frac{2\lambda(1 + 2\sigma^2) + (18\alpha - 9)\sigma^2}{12\sigma^2 - 3\sigma^4 - 4\lambda^2} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Изучена геометрия «фазовой диаграммы» бифуркационной перестройки посредством двумерных сечений — семейства кривых четвертого порядка при фиксированном значении α . Показано, что каждая кривая имеет особую точку типа «касп», расположенную на некотором «критическом» эллипсе в полуплоскости $\langle \lambda, \sigma^2 \rangle$.

Литература

1. Хорстхемке В., Лефевр Р. *Индукцированные шумом переходы: Теория и применение в физике, химии и биологии*. М.: Мир, 1987.

МНОГООБРАЗИЕ СЛУЧАЕВ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ СИЛ

М.В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

Работа представляет собой обзор по полученным ранее, а также новым случаям интегрируемости в динамике двумерного, трехмерного и четырехмерного твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с так называемой переменной диссипацией с нулевым средним [1, 2].

Задача поиска полного набора трансцендентных первых интегралов систем с диссипацией также является достаточно актуальной, и ей было ранее посвящено множество работ. Введен в рассмотрение класс динамических систем, имеющих периодическую координату. Благодаря наличию в таких системах нетривиальных групп симметрий,

показано, что рассматриваемые системы обладают переменной диссипацией с нулевым средним, означающей, что в среднем за период по имеющейся периодической координате диссипация в системе равна нулю, хотя в разных областях фазового пространства в системе может присутствовать как подкачка энергии, так и ее рассеяние. На базе полученного материала проанализированы динамические системы, возникающие в динамике твердого тела. В результате обнаружен ряд случаев полной интегрируемости уравнений движения в трансцендентных функциях и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Получены некоторые обобщения на условия интегрируемости более общих классов неконсервативных динамических систем (динамика четырехмерного твердого тела).

Изучаются некоторые общие условия интегрируемости в элементарных функциях для систем на двумерной плоскости и касательных расслоениях одномерной сферы (двумерный цилиндр) и двумерной сферы (четырёхмерное многообразие). При этом приводится интересный пример трехмерного фазового портрета системы маятникового типа, которая описывает движение сферического маятника, помещенного в поток набегающей среды (см. также [3–5]).

Приводятся достаточные условия существования первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций, для многопараметрических систем третьего порядка. В работе мы имеем дело с тремя, на первый взгляд, независимыми свойствами: (i) выделенный класс систем с симметриями; (ii) обладание этим классом систем переменной диссипацией с нулевым средним (по имеющейся периодической переменной), что позволяет их рассматривать как «почти» консервативные системы; (iii) в некоторых случаях обладание ими полным набором трансцендентных первых интегралов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 12-01-00020-а).

Литература

1. Шамолин М. В. *Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела*. М.: «Экзамен», 2007.
2. Шамолин М. В. *Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования* // Докл. РАН. 2011. Т. 440. № 2. С. 187–190.
3. Шамолин М. В. *Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования* // Докл. РАН. 2012. Т. 444. № 5. С. 506–509.
4. Шамолин М. В. *Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования* // Докл. РАН. 2013. Т. 449. № 4. С. 416–419.
5. Шамолин М. В. *Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле* // Докл. РАН. 2013. Т. 453. № 1. С. 46–49.

ПРОНИКНОВЕНИЕ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ ЧЕРЕЗ СФЕРИЧЕСКУЮ УПРУГУЮ ОБОЛОЧКУ

Г. Ч. Шушкевич, Н. Н. Киселева

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
g-shu@rambler.ru

Пусть пространство R^3 разделено концентрическими сферами $S_1(r_1 = a_1)$ и $S_2(r_1 = a_2)$ с центром в точке O_1 на три области $D_0(r_1 > a_1)$, $D_1(a_2 < r_1 < a_1)$,