

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

И. Е. Андрушкевич, А. А. Вакульчик

Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь

В порядке улучшения алгебраического метода разделения переменных [1] доказан ряд теорем, позволивших сопоставить системе уравнений Максвелла в нестационарных неоднородных сферически-симметричных средах с электродинамическими параметрами $\varepsilon = \varepsilon_r(r)\varepsilon_t(t)$, $\mu = \mu_r(r)\mu_t(t)$, $\sigma = 0$, $\rho = 0$ эквивалентную ей систему обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющую вид:

$$(\phi_2(\varphi))' = \phi_4(\varphi)\lambda_{\varphi,2}, \quad (\phi_4(\varphi))' = \phi_2(\varphi)\lambda_{\varphi,4}, \quad \lambda_{\varphi,2} = -\lambda_{\varphi,4} = n, \quad n = 0, \pm 1, \dots; \quad (1)$$

$$(\varepsilon_t(t)\tau_2(t))' = \tau_5(t)\lambda_{t,2}, \quad (\mu_t(t)\tau_5(t))' = \tau_2(t)\lambda_{t,5}; \quad (2)$$

$$x = \cos \theta;$$

$$\left. \begin{aligned} (\varsigma_1(\theta))' &= \lambda_{\theta,5}\varsigma_2(\theta); & -n\varsigma_3(\theta) + (x\varsigma_2(\theta))' &= (-\lambda_{1,7}n + \lambda_{\theta,6})x\varsigma_1(\theta); \\ -n\varsigma_2(\theta) + (x\varsigma_3(\theta))' &= (-\lambda_{1,6}n + \lambda_{\theta,7})x\varsigma_4(\theta); & n\varsigma_1(\theta) &= \lambda_{1,5}nx\varsigma_3(\theta); \\ n\varsigma_4(\theta) &= \lambda_{1,4}nx\varsigma_2(\theta); & n\varsigma_3(\theta) + (x\varsigma_2(\theta))' &= (\lambda_{1,3}n + \lambda_{\theta,2})x\varsigma_1(\theta); \\ n\varsigma_2(\theta) + (x\varsigma_3(\theta))' &= (\lambda_{1,2}n + \lambda_{\theta,3})x\varsigma_4(\theta); & (\varsigma_4(\theta))' &= \lambda_{\theta,4}\varsigma_3(\theta); \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 0; & \lambda_{\theta,6} = \lambda_{\theta,2}, & \lambda_{\theta,7} = \lambda_{\theta,3}; \\ (\varsigma_1)' = \lambda_{\theta,5}\varsigma_2; & (x\varsigma_2)' = \lambda_{\theta,2}x\varsigma_1; & (\varsigma_4)' = \lambda_{\theta,4}\varsigma_3; & (x\varsigma_3)' = \lambda_{\theta,3}x\varsigma_4; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \kappa_7\lambda_{\theta,5}f_5(r) + \kappa_7(rf_6(r))' - \kappa_2\lambda_{t,2}r\varepsilon_r f_2(r) &= 0; \\ \lambda_{\theta,2}r\mu_r f_6(r) - (r^2\mu_r f_5(r))' &= 0; & \lambda_{\theta,3}r\varepsilon_r f_3(r) - (r^2\varepsilon_r f_4(r))' &= 0; \\ \kappa_7\lambda_{\theta,3}r f_7(r) + \kappa_2\lambda_{t,2}r^2\varepsilon_r f_4(r) &= 0; & \kappa_7(rf_7(r))' + \kappa_2\lambda_{t,2}r\varepsilon_r f_3(r) &= 0; \\ \kappa_2(rf_2(r))' - \kappa_7\lambda_{t,5}r\mu_r f_6(r) &= 0; & \kappa_2\lambda_{\theta,2}r f_2(r) - \kappa_7\lambda_{t,5}r^2\mu_r f_5(r) &= 0; \\ \kappa_2\lambda_{\theta,4}f_4(r) + \kappa_2(rf_3(r))' + \kappa_7\lambda_{t,5}r\mu_r f_7(r) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В случае, когда электродинамические параметры удовлетворяют условию:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_t\mu_t'' + \varepsilon_t'\mu_t' + \lambda^2\varepsilon_t\mu_t - 2\lambda\varepsilon_t\mu_t' - \lambda\varepsilon_t'\mu_t - \delta_t)e^{2\lambda t} + (\varepsilon_t\mu_t'' + \varepsilon_t'\mu_t' + \lambda^2\varepsilon_t\mu_t + \\ + 2\lambda\varepsilon_t\mu_t' + \lambda\varepsilon_t'\mu_t - \delta_t)e^{-2\lambda t} - 6\lambda^2\varepsilon_t\mu_t + 2\varepsilon_t\mu_t'' + 2\varepsilon_t'\mu_t' - 2\delta_t = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

частным решением системы (2) будут функции $\tau_2 = (\mu_t' - \mu_t \operatorname{th} \lambda t)(\lambda_{t,5} \operatorname{ch} \lambda t)^{-1}$, $\tau_5 = (\operatorname{ch} \lambda t)^{-1}$, и для компонент электромагнитного поля получаем:

$$\begin{aligned} E_\varphi &= \frac{\kappa_7}{\lambda_{\theta,2}} \frac{\mu_t' - \mu_t \operatorname{th} \lambda t}{\operatorname{ch} \lambda t} \varsigma_2 r \mu_r f_5, & H_\varphi &= \kappa_2 \frac{\lambda_{t,2}}{\lambda_{\theta,3}} \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda t} \varsigma_3 r \varepsilon_r f_4, & H_\theta &= \frac{\kappa_7}{\operatorname{ch} \lambda t} \varsigma_2 f_6, \\ E_\theta &= \frac{\kappa_2}{\lambda_{t,5}} \frac{\mu_t' - \mu_t \operatorname{th} \lambda t}{\operatorname{ch} \lambda t} \varsigma_3 f_3, & E_r &= \varsigma_4 f_4 \frac{-\kappa_2}{\lambda_{t,5}} \frac{\mu_t' - \mu_t \operatorname{th} \lambda t}{\operatorname{ch} \lambda t}, & H_r &= \frac{-\kappa_7}{\operatorname{ch} \lambda t} \varsigma_1 f_5. \end{aligned}$$

Литература

1. Андрушкевич И. Е. *Методы разделения переменных в волновых уравнениях*. Новополоцк: ПГУ, 2010. 240 с.