данного задания. По нашему мнению, это говорит о том, что студенты усваивают данную тему хорошо.

Аналогичные задания составлены по всему курсу «Введение в математику», т. е. студенты педагогических специальностей по всему курсу «Введение в математику» получают индивидуальные задания и отчитываются перед преподавателем.

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КУРСЕ «ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ»

Е.В. Никулина

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия
lena.vnik@gmail.com

Более десяти лет в Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова на 4 курсе математического факультета читается специальный курс «Теория массового обслуживания» (далее — ТМО). Он преследует несколько целей. Во-первых, познакомить учащихся с основными понятиями и идеями ТМО. Во-вторых, показать студентам-старшекурсникам одно из возможных практических применений полученных теоретических знаний по математике. В-третьих, спецкурс призван обобщить имеющиеся у студентов сведения из различных разделов математики. Последнее подтверждается тем, что рассматриваемая дисциплина является интеграционной и опирается на имеющиеся к 4 курсу знания у студентов по теории вероятностей, дифференциальных уравнений, математическому анализу, программированию. Более подробно остановимся на взаимосвязи ТМО и теории дифференциальных уравнений.

В первой половине спецкурса ТМО (всего курс рассчитан на 34 аудиторных часа лекционных занятий и 17 часов практических) рассматриваются системы массового обслуживания (далее — СМО), работающие не в стационарном режиме. В зависимости от характеристик исходных СМО их работа описывается различными системами дифференциальных уравнений. Неизвестными функциями в них являются вероятности $P_k(t)$ ($P_k(t)$ — вероятность того, что в момент времени t в системе находится k заявок). Выбор начальных условий объясняется тем фактом, что процесс работы СМО начинается в тот момент, когда система пуста. В курсе подробно рассматриваются следующие СМО [1]:

1) системы с потерями, без очереди (системы дифференциальных уравнений, управляющих изменением вероятностей состояний СМО во времени, конечны);

2) системы с ожиданием, без ограничений на длину очереди, время пребывания заявки в очереди и в системе (описываются бесконечными системами дифференциальных уравнений);

3) замкнутые системы (системы дифференциальных уравнений конечны).

Найденные из систем уравнений значения вероятностей $P_k(t)$ позволяют вычислить практически все характеристики, необходимые для оптимизации систем массового обслуживания: среднее число заявок в СМО, среднее число занятых приборов, среднюю длину очереди, вероятность того, что система пуста, что все приборы заняты, что занят хотя бы один прибор, что поступившая заявка получит отказ и т.п.

На занятиях спецкурса студенты выводят системы дифференциальных уравнений для общих случаев СМО и решают достаточное количество конкретных систем, проводят анализ и делают выводы на основании полученных данных. В процессе освоения теоретической части совместно с преподавателем они изучают так называемый процесс чистого размножения, когда, по существу, рассматривается лишь входной поток заявок в СМО, который описывается бесконечной системой дифференциальных уравнений и в результате приводит к играющему очень важную роль в ТМО пуассоновскому входному потоку заявок.

Литература

1. Кузнецова В. А., Никулина Е. В. *Введение в теорию массового обслуживания: Текст лекций.* Ярославль: ЯрГУ, 2005. 60 с.

УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА С УЧЕТОМ ЧЛЕНОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ ПО ВРЕМЕНИ

В.М. Овсянников

Университет машиностроения МАМИ, Москва, Россия

Формула Гаусса — Остроградского применима только к непрерывным функциям P, Q, R, обладающим непрерывными производными по координатам x, y, z. Однако в газовой динамике эти условия в точности не выполняются, в результате чего происходит потеря членов высокого порядка малости, ответственных за устойчивость и неустойчивость течения, генерацию волн давления. В 1752 г. Эйлер геометрическим путем вывел уравнение неразрывности для течения несжимаемой жидкости. Его геометрические построения для двухмерного плоского течения можно пояснить так. В качестве контрольной фигуры выбирается квадрат единичной площади, расположенный в первом квадранте, имеющий одну из вершин в начале координат. Вдоль оси X делается растяжение единичного квадрата на величину $t\,\partial u/\partial x$, где u — скорость течения жидкости вдоль оси X, t — время деформации квадрата, а затем вдоль оси Y делается сжатие или растяжение на величину $t\,\partial v/\partial y$, где v — скорость течения вдоль оси Y. При этом, вблизи угловой точки появляется малый прямоугольник, площадь которого зависит одновременно от деформаций вдоль оси X и вдоль оси Y, и пропорциональна квадрату времени t^2. Точное условие сохранения площади после деформаций требует приравнивания нулю трех площадей, получившихся от деформации вдоль оси X, вдоль оси Y и одновременной деформации вдоль обеих осей.

На порах становления гидрогазодинамики Эйлер пренебрег квадратичным членом, учитывающим двойные деформации. Возникает вопрос, в каком месте вывода уравнения неразрывности с использованием формулы Гаусса — Остроградского пренебрегают двойными деформациями. Анализ получения уравнения неразрывности вида $\operatorname{div} V = 0$ показал, что существуют две формы формулы Гаусса — Остроградского. Точная формула без направляющих косинусов (4) из раздела 651 третьего тома учебника Г. М. Фихтенгольца и формула (5) с направляющими косинусами. Формула (4) является точной, так как получена трехкратным взятием определенного интеграла. При замене функций P, Q, R на компоненты скорости и придания им смысла проникновения жидкой частицы внутрь контрольной фигуры или непроникновения оказывается, что введение направляющих косинусов при неучете синусов означает привлечение в формуле (5) дополнительной «гипотезы прилипания» жидкости, сводящейся к занулению тангенциальной к границе компоненты скорости. Таким образом, введение в формулу Гаусса — Остроградского (5) направляющих косинусов является способом пренебрежения двойными деформациями жидкости. Учебник Г.М.Фихтенгольца не делает этих замечаний и не отмечает потери точности формулы (5) по сравнению с формулой (4) в условиях гидродинамических течений. Неточность