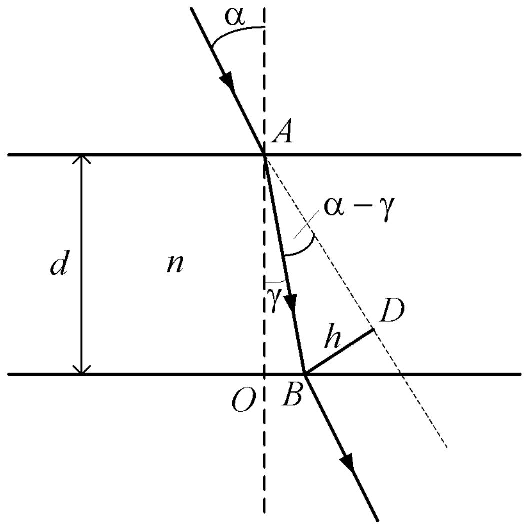
Примеры решения задач по физике (3часть)

Геометрическая оптика



ЗАДАЧА 3.1

На плоскопараллельную стеклянную $(n = 1{,}5)$ пластинку толщиной d = 8 см падает под углом α = 60° луч света. Определить боковое смещение луча h, прошедшего сквозь эту пластинку.

Дано:

$n = 1{,}5$

$d = 8 \cdot 10^{-2}$ м

$\alpha = 60°$

h – ?

Решение

Вышедший из пластинки луч будет параллелен падающему, т.е. плоскопараллельная пластинка не изменяет направление падающих на нее лучей, а только смещает их относительно первоначального хода.

Это смещение h и надо определить.

Из ΔABD (см. рис.)

$$h = AB \sin(\alpha - \gamma). \qquad (1)$$

Из ΔAOB найдем:

$$AB = \frac{AO}{\cos\gamma} = \frac{d}{\cos\gamma}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим:

$$h = \frac{d \sin(\alpha - \gamma)}{\cos\gamma}. \qquad (3)$$

Угол γ найдем, используя закон преломления:

$$\sin\alpha = n \sin\gamma;$$

$$\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{n} = 0{,}58;$$

$$\gamma = 35°45';$$

$$\cos\gamma = 0{,}81.$$

Подставив числовые значения в формулу (3), получим:

$$h = \frac{8 \cdot 10^{-2} \sin 24°15'}{\cos 35°45'} = 0{,}04 \text{ м}.$$

Ответ: $h = 0{,}04$ м.

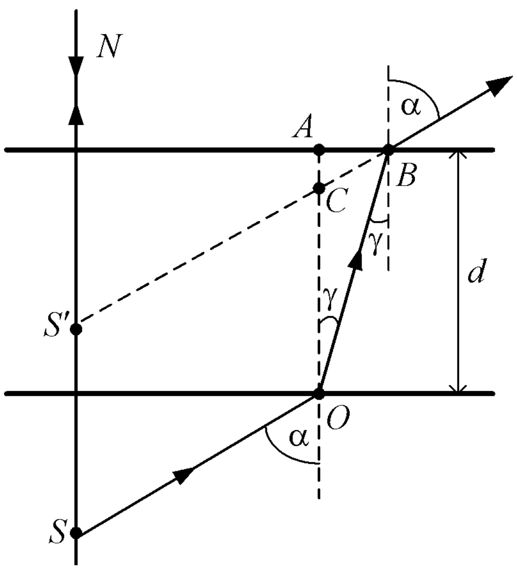
ЗАДАЧА 3.2

Наблюдатель рассматривает светящуюся точку через плоскопараллельную стеклянную пластину с показателем преломления 1,5 толщиной 3 см так, что луч зрения нормален к пластине. Определить расстояние между светящейся точкой и ее изображением (см. рис.).

Дано:
$n = 1{,}5$
$d = 3 \cdot 10^{-2}$ м
SS' – ?

Решение

В глаз наблюдателя попадает световой пучок, лучи которого образуют между собой весьма малые углы. Продолжения этих лучей пересекаются в одной точке S', являющейся изображением светящейся точки S. Пусть два луча выходят из точки S и попадают в глаз. Один из них, луч SN, падает нормально на пластинку. Другой луч SO попадает под произвольным весьма малым углом α. Этот луч, дважды преломившись, выйдет из пластинки параллельно отрезку SO.



Чтобы определить положение точки S', в которой пересекутся продолжения этих двух лучей, проведем отрезок OA, параллельный лучу SN.

Из параллелограмма $SS'CO$ следует:

$$SS' = OC = OA - AC = d - h.$$

При этом отрезок $AC = h$ можно выразить через толщину пластинки d и ее показатель преломления n. Для этого заметим, что если бы в точке O находился источник света, его изображением явилась бы точка C, так как здесь пересекались бы лучи, выходящие из точки O, после преломления на верхней грани пластинки:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n.$$

Из треугольника OAB

$$AB = AO\,\mathrm{tg}\gamma,$$

из треугольника CAB

$$AB = AC\,\mathrm{tg}\alpha,$$

тогда получим:

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\gamma} = \frac{AO}{AC} = \frac{d}{h}.$$

Так как углы малы, то

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\gamma} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{h} = n; \qquad h = \frac{d}{n}.$$

Отсюда

$$SS' = d - \frac{d}{n} = \frac{d(n-1)}{n};$$

$$SS' = \frac{3 \cdot 10^{-2}(1,5-1)}{1,5} = 10^{-2} \text{ м.}$$

Изображение S' смещено относительно светящейся точки на 1 см в сторону наблюдателя.

Ответ: $SS' = 10^{-2}$ м.

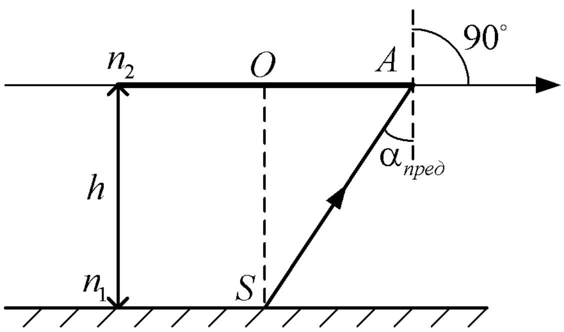
ЗАДАЧА 3.3

На дно сосуда, наполненного скипидаром до высоты 10 см, помещен источник света S. На поверхности скипидара плавает круглая непрозрачная пластина так, что ее центр находится над источником света. Какой наименьший радиус должна иметь эта пластинка, чтобы ни один луч не мог выйти из скипидара (см. рис.)? Определить скорость света в скипидаре.

Дано:	Решение
$n_1 = 1,48$ $n_2 = 1$ $h = 10^{-2}$ м $c = 3 \cdot 10^8$ м/с	Луч света идет из среды более оптически плотной (скипидар) в менее плотную среду (воздух). При угле падения, равном предельному, угол преломления будет равен 90°. При угле падения больше $\alpha_{пред}$ луч будет отражаться от границы раздела (полное внутреннее отражение);
R, υ – ?	

$$\frac{\sin\alpha_{пред}}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{n_1};$$

$$\sin\alpha_{пред} = \frac{1}{1,48} = 0,68.$$



Тогда из треугольника SOA можно определить при $OA = R$:

$$\mathrm{tg}\alpha_{пред} = \frac{OA}{OS};$$

$$R = \frac{h\sin\alpha_{пред}}{\sqrt{1-\sin^2\alpha_{пред}}};$$

$$R = \frac{0,1 \cdot 0,68}{\sqrt{1-0,68^2}} = 9 \cdot 10^{-2} \text{м}.$$

Для определения скорости света в скипидаре воспользуемся соотношением

$$\frac{\sin\alpha_{пред}}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{n_1} = \frac{\upsilon}{c}; \quad \text{отсюда} \quad \upsilon = \frac{c}{n_1}; \quad \upsilon = \frac{3 \cdot 10^8}{1,48} = 2,03 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Ответ: $R = 9 \cdot 10^{-2}$ м; $\upsilon = 2,03 \cdot 10^8$ м/с.

Волновая оптика

Интерференция света

ЗАДАЧА 3.4

Разность фаз колебаний двух интерферирующих лучей монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм равна $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Определить разность хода этих лучей.

Дано:	Решение
$\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}$	Разность фаз колебаний можно определить, используя формулы
Δ – ?	

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta}{\lambda} \qquad \text{или} \qquad \frac{3\pi}{2} = 2\pi\frac{\Delta}{\lambda}$$

Тогда разность хода лучей

$$\Delta = \frac{3\lambda}{4}; \qquad \Delta = \frac{3 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{4} = 3{,}75 \cdot 10^{-7}\,\text{м}.$$

Ответ: $\Delta = 375$ нм.

ЗАДАЧА 3.5

На экране наблюдается интерференционная картина в результате наложения лучей от двух когерентных источников с длиной волны 500 нм. На пути одного из лучей перпендикулярно к нему поместили стеклянную пластинку с показателем преломления 1,6 толщиной 5 мкм. Определить, на сколько полос при этом сместится интерференционная картина.

Дано:	Решение
$\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м $n = 1{,}6$ $d = 5 \cdot 10^{-6}$ м	При внесении стеклянной пластинки оптическая разность хода между лучами изменится на $\Delta = nd - d = d(n-1)$, где d – толщина пластинки; n – ее показатель преломления.
m – ?	

С другой стороны, внесение пластинки приведет к смещению интерференционной картинки на m полос, т.е. дополнительная разность хода равна $m\lambda$.

Следовательно,

$$d(n-1) = m\lambda.$$

Откуда найдем искомое m:

$$m = \frac{d(n-1)}{\lambda}; \qquad m = \frac{5 \cdot 10^{-6}(1{,}6-1)}{5 \cdot 10^{-7}} = 6.$$

Ответ: $m = 6$.

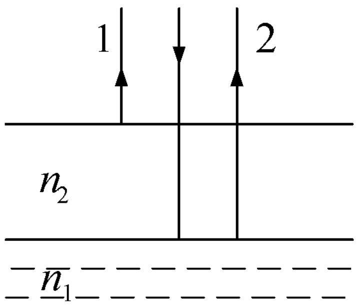
ЗАДАЧА 3.6

Для уменьшения потерь света при отражении от стекла на поверхность объектива с показателем преломления 1,7 нанесена тонкая прозрачная пленка с показателем преломления 1,3. При какой наименьшей толщине ее произойдет максимальное ослабление света, длина волны которого приходится на среднюю часть видимого спектра $(\lambda_0 = 0{,}56 \text{ мкм})$? Считать, что лучи падают нормально к поверхности объектива.

Дано:	Решение
$n_1 = 1{,}7$ $n_2 = 1{,}3$ $\lambda_0 = 5{,}6 \cdot 10^{-7}$ м	Свет, падая нормально на объектив, отражается как от передней, так и от задней поверхностей пленки. Отраженные лучи 1 и 2 интерферируют (см. рис.). Условие минимума интенсивности света при интерференции выражается формулой
h – ?	

$$\Delta = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2} \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где Δ – разность хода лучей, отраженных от двух поверхностей тонкой пленки, окруженной одинаковыми средами.



В данном случае пленка окружена различными средами – воздухом ($n = 1$) и стеклом ($n_1 = 1{,}7$). Из неравенства $n < n_2 < n_1$ следует, что оба луча, 1 и 2, отражаясь от границы с оптически более плотной средой, «теряют» полволны, т.е. меняют фазу на π, так что это не влияет на их разность хода, и условие минимума будет записано так:

$$\Delta = 2hn_2\cos\gamma_2 = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2}; \qquad \gamma_2 = 0, \quad \cos\gamma_2 = 1.$$

Для наименьшей толщины $m = 0$

$$2hn_2 = \frac{\lambda_0}{2}; \qquad h = \frac{\lambda_0}{4n_2}; \qquad h = \frac{5{,}6\cdot 10^{-7}}{4\cdot 1{,}3} = 1{,}08\cdot 10^{-7} \text{м}.$$

Ответ: $h = 1{,}08\cdot 10^{-7}$ м.

ЗАДАЧА 3.7

Какую наименьшую толщину должна иметь пленка из скипидара, разлитого на воде, если на нее под углом $\alpha = 30°$ падает белый свет и она в отраженном свете окажется красной? Длина волны красных лучей $\lambda = 0{,}63$ мкм.

Дано:

$\alpha = 30°$

$n_1 = 1$

$n_2 = 1{,}33$

$n = 1{,}48$

$\lambda = 6{,}3 \cdot 10^{-7}$ м

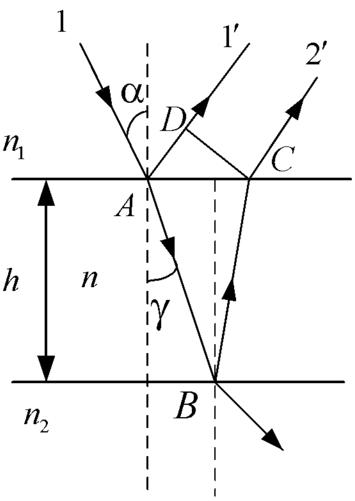
h_{min} – ?

Решение

На рисунке показан ход луча света в пленке.

В точках A и B падающий пучок света частично отражается и частично преломляется.

При отражении в точке A, т.е. от среды, оптически более плотной $(n > n_1)$, происходит изменение фазы волны на π, что соответствует изменению разности хода на $\dfrac{\lambda}{2}$.



При отражении в точке B, т.е. от среды оптически менее плотной $(n > n_2)$, изменение фазы волны не происходит.

Оптическая разность хода с учетом потери полуволны для лучей $1'$ и $2'$ равна:

$$\Delta = (AB + BC)n - ADn_1 - \frac{\lambda}{2}.$$

Из рисунка

$$AB = BC = \frac{h}{\cos\gamma}; \qquad AD = 2h\sin\alpha \operatorname{tg}\gamma.$$

Тогда

$$\Delta = 2h\left(\frac{n - n_1\sin\alpha\sin\gamma}{\cos\gamma}\right) - \frac{\lambda}{2}.$$

Учитывая, что

$$\sin\gamma = \frac{n_1\sin\alpha}{n} \quad \text{и} \quad \cos\gamma = \sqrt{\frac{n^2 - n_1^2\sin^2\alpha}{n}},$$

получаем:

$$\Delta = 2h\sqrt{n^2 - n_1^2\sin^2\alpha} - \frac{\lambda}{2}. \qquad (1)$$

Запишем условие максимума освещенности при интерференции:

$$\Delta = 2m\frac{\lambda}{2}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует:

$$2h\sqrt{n^2 - n_1^2\sin^2\alpha} - \frac{\lambda}{2} = 2m\frac{\lambda}{2};$$

$$2h\sqrt{n^2 - n_1^2\sin^2\alpha} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}. \qquad (3)$$

При $m = 0$ $\quad h = h_{min}$ и уравнение (3) запишется в виде:

$$2h_{min}\sqrt{n^2 - n_1^2\sin^2\alpha} = \frac{\lambda}{2},$$

откуда

$$h_{\min} = \frac{\lambda}{4\sqrt{n^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha}};$$

$$h_{\min} = \frac{6{,}3 \cdot 10^{-7}}{4\sqrt{1{,}48^2 - 1^2 \cdot \sin^2 30°}} = 0{,}15 \text{ мкм};$$

Ответ: $h_{\min} = 0{,}15$ мкм.

ЗАДАЧА 3.8

На стеклянный клин с показателем преломления 1,5 и преломляющим углом $\alpha = 40''$ нормально падает монохроматический свет с длиной волны 600 нм. Определить в интерференционной картине расстояние между двумя соседними максимумами.

Дано:	Решение
$n = 1{,}5$ $\alpha = 40'' = 1{,}94 \cdot 10^{-4}$ рад $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м	Параллельный пучок света, падая нормально к грани клина, отражается от его верхней и нижней граней. Так как угол клина мал, то отраженные лучи 1 и 2 практически параллельны.
b – ?	

Отраженные лучи когерентны, и на поверхности клина будет наблюдаться интерференционная картина (см. рис.).

Условие минимума для клина в отраженном свете:

$$2dn\cos\gamma_2 + \frac{\lambda}{2} = (2m+1)\frac{\lambda}{2},$$

где d – толщина клина в месте темной полосы, соответствующей номеру m; γ_2 – угол преломления; $\frac{\lambda}{2}$ – дополнительная разность хода, обусловленная отражением световой волны 1 от оптически более плотной среды.

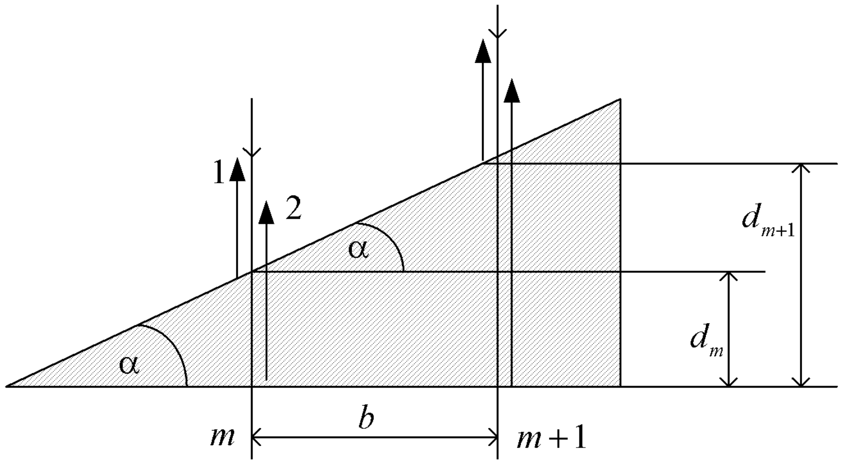
Угол падения, согласно условию, $\gamma_1 = 0$, следовательно, угол преломления $\gamma_2 = 0$.

Тогда условие минимума запишется в виде:

$$2dn = m\lambda; \qquad d = \frac{m\lambda}{2n}.$$

Из рисунка видно, что

$$\sin\alpha = \frac{d_{m+1} - d_m}{b}.$$



Так как угол мал, то $\sin\alpha \approx \alpha$;

$$\alpha\frac{(m+1)\lambda}{2nb} - \frac{m\lambda}{2nb}; \qquad \alpha = \frac{\lambda}{2nb}.$$

Отсюда

$$b = \frac{\lambda}{2n\alpha}; \qquad b = \frac{6\cdot 10^{-7}}{2\cdot 1{,}5\cdot 1{,}94\cdot 10^{-4}} = 1{,}03\cdot 10^{-3}\,\text{м}.$$

Ответ: $b = 1{,}03\cdot 10^{-3}$м.

ЗАДАЧА 3.9

Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм, падающим нормально на плоскую поверхность линзы. Пространство между линзой ($n_1 = 1{,}55$) и плоской прозрачной пластинкой ($n_2 = 1{,}5$) заполнено жидкостью с показателем преломления $n = 1{,}6$. Найти радиус кривизны линзы *R*, если радиус четвертого ($m = 4$) светлого кольца в проходящем свете $r_4 = 1\cdot 10^{-3}$ м.

Дано:	**Решение**
$\lambda = 6\cdot 10^{-7}$ м $n_1 = 1{,}55$ $n_2 = 1{,}5$ $n = 1{,}6$ $r_4 = 1\cdot 10^{-3}$ м $m = 4$	В тонкой жидкой пленке неодинаковой толщины каждый луч разделяется на два когерентных. В проходящем свете m-й максимум образуется вследствие интерференции луча 1, прошедшего через точку A в пластинку, и части этого луча (луч 2), отразившейся в точках A и B и прошедшей в пластинку через точку C. Так как $n > n_2$ и $n > n_1$, то при отражении в точках A и B потери полуволны не происходит.
R – ?	

Следовательно, приобретаемая лучами 1 и 2 оптическая разность хода

$$\Delta = 2hn. \tag{1}$$

Для определения h воспользуемся рисунком, из которого следует, что радиус интерференционного кольца

$$r = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{2Rh}.$$

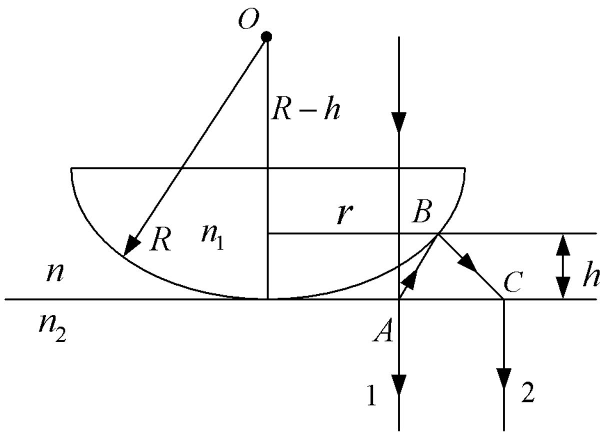
Тогда

$$h = \frac{r^2}{2R}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и учитывая условие максимума, находим:

$$2\frac{r^2 n}{2R} = 2m\frac{\lambda}{2}.$$

Откуда радиус кривизны линзы



$$R = \frac{r^2 n}{m\lambda};$$

$$R = \frac{\left(10^{-3}\right)^2 \cdot 1{,}6}{4 \cdot 6 \cdot 10^{-7}} \approx 66 \cdot 10^{-2}\text{м}.$$

Ответ: $R = 66$ см.

Дифракция света

ЗАДАЧА 3.10

На круглое отверстие диаметром d = 4 мм падает нормально параллельный пучок лучей $(\lambda = 0{,}5\ \text{мкм})$. Точка наблюдения находится на оси отверстия на расстоянии $r_0 = 1$ м от него. Сколько зон Френеля укладывается в отверстии? Темное или светлое пятно получится в центре дифракционной картины, если в месте наблюдения поместить экран?

Дано:

$d = 4 \cdot 10^{-3}$м

$\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$м

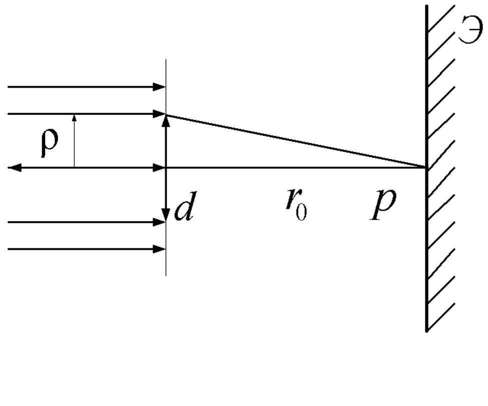
$r_0 = 1$ м

m – ?

Решение

Радиус отверстия (см. рис.) соответствует m-й зоне Френеля при условии, что отверстие пропускает m зон, т.е

$$\rho_m = \frac{d}{2} \qquad (1)$$



Используя формулу радиуса зоны Френеля для плоской волны

$$\rho_m = \sqrt{m r_0 \lambda},$$

где ρ – радиус зоны; m – номер зоны; r_0 – расстояние от круглого отверстия до точки наблюдения, расположенной на оси отверстия; λ – длина световой волны

и выражение (1), получим

$$\frac{d}{2}=\sqrt{mr_0\lambda}\,; \qquad m=\frac{d^2}{4\lambda r_0}; \qquad m=\frac{(4\cdot 10^{-3})^2}{4\cdot 5\cdot 10^{-7}\cdot 1}=8 \text{ зон.}$$

Поскольку число открытых зон четное, центр дифракционной картины будет темным.

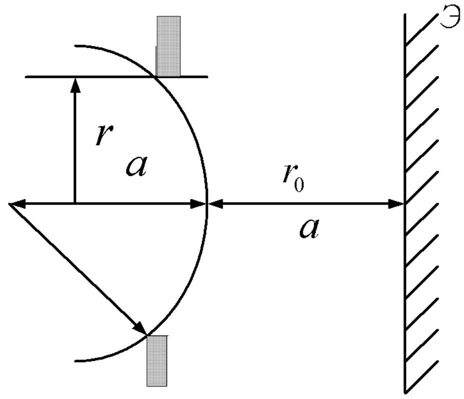
Ответ: $m=8$, пятно темное.

ЗАДАЧА 3.11

Сферическая волна, распространяющаяся от точечного монохроматического источника света $(\lambda=600 \text{ нм})$, встречает на своем пути диафрагму с круглым отверстием. Определить, при каком радиусе r отверстия центр дифракционной картины, наблюдаемой на экране, будет максимально освещенным. Считать расстояние от источника света до диафрагмы и от диафрагмы до экрана равным $a=1$ м.

Дано:	**Решение**
$\lambda=6\cdot 10^{-7}$ м $a=1$ м	Применим формулу для радиусов зон Френеля для сферической волны, полагая, что $R=r_0=a$ (см. рис.).
r – ?	

Радиус отверстия будет соответствовать радиусу m-й зоны Френеля



$$r=\rho_m=\sqrt{\frac{Rr_0m\lambda}{(R+r_0)}}=\sqrt{\frac{a^2m\lambda}{2a}}=\sqrt{\frac{m\lambda a}{2}}.$$

Чтобы центр дифракционной картины был максимально освещен, в отверстие должна укладываться только одна зона Френеля, т.е. $m=1$.

Тогда $r=\sqrt{\dfrac{\lambda a}{2}}$;

$$r=\sqrt{\frac{1\cdot 6\cdot 10^{-7}}{2}}=0{,}55 \text{ мм}.$$

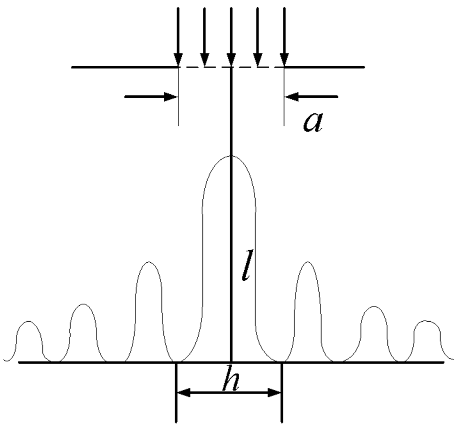
Ответ: $r=0{,}55$ мм.

ЗАДАЧА 3.12

На щель шириной $a=0{,}1$ мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda=0{,}5$ мкм. Дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном параллельно щели. Определить расстояние l от щели до экрана, если ширина центрального дифракционного максимума $h=1$ см.

Дано:	**Решение**
$a=10^{-4}$ м	Ширина центрального дифракционного максимума – это

$\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м $h = 10^{-2}$ м	расстояние между первыми дифракционными минимумами (см. рис.).
l – ?	



Из рисунка видно, что

$$\frac{h}{2} = l\,\mathrm{tg}\varphi,$$

$$\text{т.е. } l = \frac{h}{2\,\mathrm{tg}\varphi}. \qquad (1)$$

Угол φ найдем, используя формулу

$$a \sin\varphi = \pm m\lambda.$$

При $m = 1$ $\quad \sin\varphi = \frac{\lambda}{a}$, тогда

$$\varphi = \arcsin\frac{\lambda}{a}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим:

$$l = \frac{h}{2\,\mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{\lambda}{a}\right)}; \qquad l = \frac{10^{-2}}{2\,\mathrm{tg}(\arcsin\frac{5 \cdot 10^{-7}}{10^{-4}})} = 1 \text{ м}.$$

Ответ: $l = 1$ м.

ЗАДАЧА 3.13

Найти постоянную дифракционной решетки *d*, если при наблюдении в монохроматическом свете $(\lambda = 600 \text{ нм})$ максимум пятого порядка отклонен на угол $\varphi = 18°$. Какое число штрихов *N* нанесено на единицу длины этой решетки?

Дано:	**Решение**
$\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м $\varphi = 18°$ $m = 5$	Согласно условию наблюдения главных максимумов дифракционной решетки $$d \sin\varphi = m\lambda,$$
d, N – ?	откуда $d = \frac{5\lambda}{\sin\varphi}$; $\quad d = \frac{5 \cdot 6 \cdot 10^{-7}}{\sin 18°} = 9{,}7 \cdot 10^{-6}$ м.

Число штрихов *N*, приходящихся на единицу длины решетки, связано с периодом решетки *d* соотношением

$$N = \frac{1}{d},$$

откуда

$$N = 103006 \text{ м}^{-1} = 103 \text{ мм}^{-1}.$$

Ответ: $d = 9{,}7 \cdot 10^{-6}$ м; $N = 103$ мм$^{-1}$.

ЗАДАЧА 3.14

На дифракционную решетку длиной l = 15 мм, содержащую $N = 3000$ штрихов, падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 570$ нм. Определить максимально возможный порядок спектра, наблюдаемый с помощью этой решетки.

Дано:	Решение
$\lambda = 5{,}7 \cdot 10^{-7}$ м $N = 3000$ $l = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м	Максимально возможный порядок дифракционного спектра определяется из условия максимумов дифракционной решетки:
m_{max} – ?	$$d \sin\varphi = m\lambda. \qquad (1)$$

Поскольку значение $\sin\varphi$ не может превышать единицы, то

$$m_{max}\lambda = d. \qquad (2)$$

Постоянная дифракционной решетки

$$d = \frac{l}{N}. \qquad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) получим:

$$m_{max} = \frac{l}{N\lambda};$$

$$m_{max} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-2}}{3000 \cdot 5{,}7 \cdot 10^{-7}} = 8.$$

Ответ: $m_{max} = 8$.

ЗАДАЧА 3.15

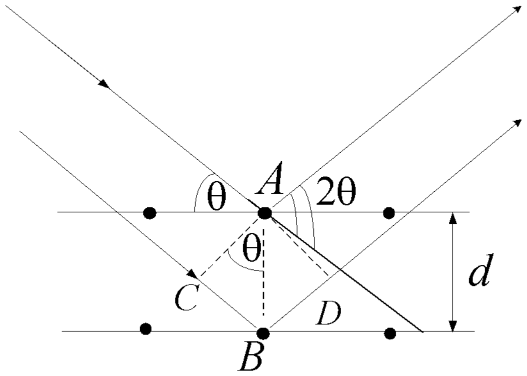
Определить расстояние между атомными плоскостями в кристалле каменной соли, если дифракционный максимум первого порядка наблюдается при падении рентгеновских лучей с длиной волны 0,147 нм под углом $15°12'$ к поверхности кристалла.

Дано:	Решение
$\lambda = 1{,}47 \cdot 10^{-10}$ м $\theta = 15°12'$ $m = 1$	Дифракция рентгеновских лучей на кристаллах – это результат интерференции рентгеновского излучения, зеркально отражающегося от системы параллельных плоскостей, которые проходят через
d – ?	

узлы – атомы (например, A, см. рис.) кристаллической решетки.

Эти плоскости называют атомными.

Отражение наблюдается лишь в направлениях, соответствующих дифракционным



максимумам, которым удовлетворяют выражения

$$\Delta = |BC| + |BD| = 2d\sin\theta \quad \text{и}$$

$$2d\sin\theta = m\lambda, \qquad (1)$$

где $m = 1, 2, 3....$ – порядок дифракционного максимума; θ – угол скольжения, т.е. угол между падающим лучом и плоскостью кристалла; d – расстояние между соседними плоскостями, называемое межплоскостным.

Исходя из условия (1) и учитывая, что $m = 1$, имеем:

$$d = \frac{\lambda}{2\sin\theta}; \qquad d = \frac{1{,}47 \cdot 10^{-10}}{2\sin 15°12'} = 0{,}28 \text{ нм}.$$

Ответ: $d = 0{,}28$ нм.

Поляризация света

ЗАДАЧА 3.16

Луч света, проходя слой льда, падает на алмазную пластинку, частично отражается, частично преломляется. Определить, каким должен быть угол падения, чтобы отраженный луч был максимально поляризован. Определить скорость света во льду.

Дано:

$n_1 = 1{,}31$

$n_2 = 2{,}42$

α – ?

Решение

Отраженный свет максимально поляризован при угле падения $\alpha = \alpha_Б$, удовлетворяющем закону Брюстера:

$$\mathrm{tg}\alpha_Б = n_{21}, \qquad (1)$$

где $n_{21} = \dfrac{n_2}{n_1}$ – относительный показатель преломления отражающей среды.

Если $\alpha = \alpha_Б$, то отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны. Проходящий свет поляризован лишь частично.

Из выражения (1) находим:

$$\alpha_Б = \mathrm{arctg}\frac{n_2}{n_1};$$

$$a_Б = \operatorname{arctg}\frac{2,42}{1,31} = 61,5^\circ.$$

Абсолютный показатель преломления среды $n = \dfrac{c}{\upsilon}$, тогда, приняв $n_{льда}$ = 1,31, найдем скорость распространения света во льду:

$$\upsilon = \frac{c}{n_1};$$

$$\upsilon = \frac{3 \cdot 10^{-8}}{1,33}\ \frac{м}{с} = 2,21 \cdot 10^8\ \frac{м}{с}.$$

Ответ: $\alpha_Б$ = 61,5°; $\upsilon = 2,21 \cdot 10^8\ \dfrac{м}{с}$.

ЗАДАЧА 3.17

Определить степень поляризации P света, являющегося смесью естественного света с плоскополяризованным, если интенсивность поляризованного света и естественного равны.

Дано:	**Решение**
$I_{поляр} = I_{естеств}$	Для определения степени поляризации P исследуемый свет пропускают через анализатор и измеряют максимальную $I_{\max}$ и минимальную $I_{\min}$ интенсивность.
$P - ?$	

Выражение $P = \dfrac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ называется степенью поляризации.

В общем случае $I_{\max} = I_{поляр} + \dfrac{1}{2} I_{естеств}$, так как из закона Малюса следует, что анализатор пропускает половину интенсивности падающего на него естественного света;

$$I_{\min} = \frac{1}{2} I_{естеств}.$$

Учитывая условия данной задачи, имеем:

$$I_{\max} = \frac{3}{2} I_{поляр}; \qquad I_{\min} = \frac{1}{2} I_{поляр};$$

$$P = \frac{\frac{3}{2} I_{поляр} - \frac{1}{2} I_{поляр}}{\frac{3}{2} I_{поляр} + \frac{1}{2} I_{поляр}} = \frac{1}{2} = 0,5,$$

а, следовательно, P = 0,5.

Ответ: $P = 0,5$.

ЗАДАЧА 3.18

Угол между плоскостями поляризации двух поляроидов 70°. Как изменится интенсивность пошедшего через них света, если этот угол уменьшится в 5 раз?

Дано:	Решение
$\alpha_1 = 70°$ $\alpha_2 = 14°$	После прохождения света через оба поляроида его интенсивность
$\frac{I_2}{I_1} - ?$	$$I = \frac{I_0}{2}\cos^2\alpha.$$

Тогда

$$I_1 = \frac{I_0}{2}\cos^2\alpha_1; \qquad I_2 = \frac{I_0}{2}\cos^2\alpha_2;$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\cos^2\alpha_2}{\cos^2\alpha_1};$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\cos^2 14°}{\cos^2 70°} = \frac{0{,}942}{0{,}117} = 8,$$

т.е. интенсивность возрастет в 8 раз.

Ответ: $\frac{I_2}{I_1} = 8$; интенсивность возрастет в 8 раз.

ЗАДАЧА 3.19

Какой угол образуют плоскости поляризации двух николей, если свет, вышедший из второго николя, был ослаблен в 5 раз? Учесть, что поляризатор поглощает 10, а анализатор – 8 % падающего на них света.

Дано:	Решение
$n = 5$ $K_1 = 0{,}1$ $K_2 = 0{,}08$	Естественный луч света, падая на грань призмы николя, претерпевает двойное лучепреломление. В результате возникают два луча – обыкновенный и необыкновенный.
$\varphi - ?$	

Оба луча поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях, интенсивность их одинакова и равна половине интенсивности естественного света. Интенсивность света, прошедшего через первую призму (поляризатор), с учетом поглощения равна

$$I_1 = \frac{I_0}{2}(1 - K_1), \tag{1}$$

где I_0 – интенсивность естественного света, падающего на первый николь, K_1 = 0,1 – относительная потеря интенсивности света в поляризаторе.

Поляризованный свет, попадая на вторую призму (анализатор), вновь испытывает поглощение, но кроме этого, его интенсивность уменьшается из-за несовпадения плоскостей поляризации поляризатора и анализатора.

Уменьшение интенсивности определяется законом Малюса:

$$I_2 = I_1 \cos^2 \varphi .$$

Учитывая потери интенсивности света в анализаторе, имеем:

$$I_2 = \frac{I_0}{2}(1-K_1)(1-K_2)\cos^2 \varphi, \qquad (2)$$

где $K_2 = 0{,}08$ – относительная потеря интенсивности в анализаторе; φ – угол между плоскостями поляризации поляризатора и анализатора.

Так как по условию задачи известно, что относительное уменьшение интенсивности света $n = \frac{I_0}{I_2}$, то, подставив выражение (2), получим:

$$n = \frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-K_1)(1-K_2)\cos^2 \varphi} . \qquad (3)$$

Из соотношения (3) получим:

$$\cos^2 \varphi = \frac{2}{n(1-K_1)(1-K_2)}; \quad \cos^2 \varphi = \frac{2}{5 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}92} = 0{,}483 .$$

Следовательно, искомый угол $\varphi = 46°$.

Ответ: $\varphi = 46°$.

Квантовая природа излучения

Тепловое излучение

ЗАДАЧА 3.20

Температура внутренней поверхности электрической печи Т = 700 °С. Определить мощность излучения печи через небольшое отверстие диаметром d = 5см, рассматривая его как излучение абсолютно черного тела.

Дано:	Решение
T = 973 К $d = 5 \cdot 10^{-2}$ м	Из закона Стефана – Больцмана
N – ?	

$$R_э = \sigma T^4 . \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$R_э = \frac{N}{S},$$

откуда

$$N = R_э S, \qquad (2)$$

где площадь отверстия

$$S = \frac{\pi d^2}{4}. \qquad (3)$$

Подставляя (3) и (1) в (2), получим:

$$N = \sigma T^4 \frac{\pi d^4}{4};$$

$$[N] = \frac{\text{Вт} \cdot \text{К}^4 \cdot \text{м}^2}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4} = \text{Вт};$$

$$N = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 973^4 \cdot \frac{3{,}14 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^{-2}}{4} = 99{,}7 \text{ Вт}.$$

Ответ: N = 99,7 Вт.

ЗАДАЧА 3.21

Пренебрегая потерями тепла на теплопроводность, подсчитать мощность электрического тока, необходимую для накаливания вольфрамовой нити диаметром 1 мм и длиной 20 см до температуры 3500 К. Коэффициент черноты вольфрама для данной температуры A_T = 0,35. Какой ток потечет через лампу, если напряжение в сети 220 В?

Дано:
T = 3500 К
$d = 1 \cdot 10^{-3}$ м
L = 0,2 м
A_T = 0,35
U = 220 В

N, I – ?

Решение

Поскольку нить излучает как серое тело, то энергетическая светимость

$$r_э = A_T \sigma \text{T}^4, \tag{1}$$

а мощность излучения нити

$$N = r_э S, \tag{2}$$

где S – площадь поверхности вольфрамовой нити,

$$S = \pi dl. \tag{3}$$

Подставляя (1), (3) в (2), получим:

$$N = A_T \sigma T^4 \pi dl;$$

$$[N] = \frac{\text{Вт} \cdot \text{К}^4 \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4} = \text{Вт};$$

$$N = 0{,}35 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 3500^4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}2 = 1870 \text{ Вт}.$$

С другой стороны, мощность тока $N = IU$, тогда

$$I = \frac{N}{U}; \qquad [I] = \frac{\text{Вт}}{\text{В}} = \frac{\text{А} \cdot \text{В}}{\text{В}} = \text{А}; \qquad I = \frac{1870}{220} = 8{,}5 \text{ А}.$$

Ответ: N = 1870 Вт; I = 8,5 А.

ЗАДАЧА 3.22

Температура черного тела T_1 = 3000 К. При остывании тела длина волны, соответствующая максимальному значению спектральной плотности энергетической светимости, изменилась на $\Delta\lambda = 8$ мкм. Определить температуру T_2, до которой тело охладилось.

Дано:	Решение
$T_1 = 3000$ К $\Delta\lambda = 8\cdot 10^{-6}$ м T_2 – ?	Из закона Вина имеем:

$$\lambda_{\max 1} = \frac{b}{T_1} \qquad \text{и} \qquad \lambda_{\max 2} = \frac{b}{T_2}.$$

Изменение длины волны, на которую приходится максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости,

$$\Delta\lambda = \lambda_{\max 2} - \lambda_{\max 1} = \frac{b}{T_2} - \frac{b}{T_1}.$$

Откуда

$$T_2 = \frac{b}{\Delta\lambda + \frac{b}{T_1}};$$

$$[T_2] = \frac{\text{м}\cdot\text{К}}{\text{м} + \frac{\text{м}\cdot\text{К}}{\text{К}}} = \text{К}; \qquad T_2 = \frac{2{,}9\cdot 10^{-3}}{8\cdot 10^{-6} + \frac{2{,}9\cdot 10^{-3}}{3000}} = 323 \text{ К}.$$

Ответ: $T_2 = 323$ К.

ЗАДАЧА 3.23

В результате охлаждения черного тела длина волны, отвечающая максимуму спектральной плотности энергетической светимости, сместилась с $\lambda_{1\max} = 0{,}8$ мкм до $\lambda_{2\max} = 2{,}4$ мкм. Определить, во сколько раз изменятся: 1) энергетическая светимость тела; 2) максимальная спектральная плотность энергетической светимости.

Дано:	Решение
$\lambda_{1\max} = 0{,}8\cdot 10^{-6}$ м $\lambda_{2\max} = 2{,}4\cdot 10^{-6}$ м $\frac{R_{2э}}{R_{1э}}$; $\frac{(r_{\lambda_2 T_2})_{\max}}{(r_{\lambda_1 T_1})_{\max}}$ – ?	Энергетическая светимость черного тела, согласно закону Стефана – Больцмана, $$R_э = \sigma T^4, \qquad (1)$$ где σ – постоянная Стефана – Больцмана; T – термодинамическая температура.

Согласно закону смещения Вина

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \qquad (2)$$

где b – постоянная Вина.

Тогда

$$T_1 = \frac{b}{\lambda_{1\max}} \quad \text{и} \quad T_2 = \frac{b}{\lambda_{2\max}}. \qquad (3)$$

Искомое отношение энергетических светимостей с учетом формул (1) и (3) запишется в виде:

$$\frac{R_{2э}}{R_{1э}} = \frac{T_2^4}{T_1^4} = \left(\frac{\lambda_{1\max}}{\lambda_{2\max}}\right)^4; \quad \frac{R_{2э}}{R_{1э}} = \left(\frac{0{,}8 \cdot 10^{-6}}{2{,}4 \cdot 10^{-6}}\right)^4 = \frac{1}{81}.$$

Зависимость максимальной спектральной плотности энергетической светимости черного тела от температуры:

$$(r_{\lambda,\mathrm{T}})_{\max} = cT^5,$$

где постоянная $c = 1{,}3 \cdot 10^{-5}\ \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}^5}$.

Тогда искомое отношение максимальных спектральных плотностей энергетической светимости с учетом закона смещения Вина (2)

$$\frac{(r_{\lambda_2 \mathrm{T}_2})_{\max}}{(r_{\lambda_1 \mathrm{T}_1})_{\max}} = \left(\frac{\lambda_{1\max}}{\lambda_{2\max}}\right)^5; \quad \frac{(r_{\lambda_2 \mathrm{T}_2})_{\max}}{(r_{\lambda_1 \mathrm{T}_1})_{\max}} = \left(\frac{0{,}8 \cdot 10^{-6}}{2{,}4 \cdot 10^{-6}}\right)^5 = \frac{1}{243}.$$

Ответ: уменьшится в 81 раз; уменьшится в 243 раза.

ЗАДАЧА 3.24

Определить количество теплоты, теряемой 50 см^2 поверхности расплавленной платины за 1 мин, если поглощательная способность платины A_T = 0,8. Температура t плавления платины равна 1770 °С.

Дано:	Решение
$S = 5 \cdot 10^{-3}$ м^2 $t = 60$ с $T = 2043$ K $A_\mathrm{T} = 0{,}8$ Q – ?	Количество теплоты, теряемое платиной, равно энергии, излучаемой ее раскаленной поверхностью: $Q = W = A_T R_э S t$, (1) где $R_э$ – энергетическая светимость черного тела; S – поверхность излучения; t – время.

Согласно закону Стефана – Больцмана

$$R_э = \sigma T^4, \tag{2}$$

где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ – постоянная Стефана – Больцмана.

Подставив (2) в (1), найдем искомое количество теплоты, теряемое расплавленной платиной:

$$Q = A_T \sigma T^4 S t; \qquad [Q] = \frac{\text{Вт} \cdot \text{К}^4 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4} = \text{Вт} \cdot \text{с} = \text{Дж};$$

$$Q = 0{,}8 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot (2043)^4 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 60 = 237 \cdot 10^3\ \text{Дж}.$$

Ответ: Q = 237 кДж.

Фотоэффект. Эффект Комптона. Давление света

ЗАДАЧА 3.25

Красная граница фотоэффекта для никеля равна 0,257 мкм. Найти длину волны света, падающего на никелевый электрод, если фототок прекращается при задерживающей разности потенциалов, равной 1,5 В.

Дано:	Решение
$\lambda_к = 2{,}57 \cdot 10^{-7}$ м $U = 1{,}5$ В $\lambda - ?$	Согласно уравнению Эйнштейна для фотоэффекта

$$\frac{hc}{\lambda} = A + E_{k\max} \quad (1)$$

Красная граница фотоэффекта определяется из условия равенства энергии фотона $\varepsilon = \dfrac{hc}{\lambda}$ работе выхода электронов A, т.е.

$$\frac{hc}{\lambda_к} = A. \quad (2)$$

Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов может быть определена через задерживающую разность потенциалов U:

$$E_{k\max} = eU, \quad (3)$$

где e – заряд электрона.

Подставляя выражения (2) и (3) в (1), получим:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_к} + eU. \quad (4)$$

Из уравнения (4) найдем длину волны света:

$$\lambda = \left(\frac{1}{\lambda_k} + \frac{eU}{hc}\right)^{-1};$$

$$\lambda = \left(\frac{1}{\text{м}} + \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}\cdot\text{с}}{\text{Дж}\cdot\text{с}\cdot\text{м}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\text{м}} + \frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{Дж}\cdot\text{м}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\text{м}} + \frac{\text{Дж}}{\text{Дж}\cdot\text{м}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\text{м}} + \frac{1}{\text{м}}\right)^{-1} = \text{м};$$

$$\lambda = \left(\frac{1}{2{,}57\cdot 10^{-7}} + \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1{,}5}{6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}\right)^{-1} = 1{,}96\cdot 10^{-7} = 0{,}196 \text{ мкм.}$$

Ответ: $\lambda = 0{,}196$ мкм.

ЗАДАЧА 3.26

Какую часть энергии фотона составляет энергия, которая пошла на совершение работы выхода электронов из фотокатода, если красная граница для материала фотокатода равна 0,54 мкм? Кинетическая энергия фотоэлектронов 0,5 эВ.

Дано:	**Решение**
$\lambda_к = 5{,}4 \cdot 10^{-7}$ м $E_к = 0{,}5$ эВ	Формула Эйнштейна для фотоэффекта:
$\dfrac{A_в}{\varepsilon} - ?$	

$$\varepsilon = A_в + E_к.$$

Длина волны λ_K красной границы:

$$\lambda_K = \frac{hc}{A_в};$$

$$\frac{A_в}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon - E_к}{\varepsilon} = 1 - \frac{E_к}{\varepsilon}.$$

Тогда

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda_k} + E_k;$$

$$\varepsilon = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{5{,}4 \cdot 10^{-7}} + 0{,}5 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 4{,}48 \cdot 10^{-19}\,\text{Дж} = 2{,}8\ \text{эВ};$$

$$\frac{A_в}{\varepsilon} = 1 - \frac{E_k}{\varepsilon} = 1 - \frac{0{,}5}{2{,}8} = 0{,}82,$$

т.е. составляет 82 %.

Ответ: $\dfrac{A_в}{\varepsilon} = 82$ %.

ЗАДАЧА 3.27

Определить длину волны λ фотона, импульс P которого в два раза меньше импульса P_e электрона, движущегося со скоростью 0,1 Мм/с.

Дано:	**Решение**
$P = \dfrac{P_e}{2}$ $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг $\upsilon = 10^5\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$	Импульс фотона
$\lambda - ?$	

$$P = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}, \qquad (1)$$

где h – постоянная Планка.

Импульс электрона

$$P_e = m_e \upsilon, \qquad (2)$$

где $m_e -$ масса электрона.

Согласно условию задачи

$$P = \frac{P_e}{2}. \qquad (3)$$

Подставив выражения (1) и (2) в формулу (3), получим:

$$\frac{h}{\lambda}=\frac{m_e\upsilon}{2}.$$

Откуда искомая длина волны фотона

$$\lambda=\frac{2h}{m_e\upsilon};$$

$$[\lambda]=\frac{\text{Дж}\cdot\text{с}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot\text{м}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{кг}\cdot\text{м}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{с}^2}{\text{кг}}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}=\text{м};$$

$$\lambda=\frac{2\cdot 6{,}63\cdot 10^{-34}}{9{,}11\cdot 10^{-31}\cdot 10^5}=14{,}5\cdot 10^{-9}\ \text{м}=14{,}5\ \text{нм}.$$

Ответ: $\lambda=14{,}5$ нм.

ЗАДАЧА 3.28

На идеально отражающую поверхность площадью $S=5$ см^2 за время $t=3$ мин нормально падает монохроматический свет, энергия которого $W=9$ Дж. Определить световое давление, оказываемое на поверхность.

Дано:	Решение
$S=5\cdot 10^{-4}$ м^2 $t=180$ с $\rho=1$ $W=9$ Дж	Давление, производимое светом, определяется по формуле $$P=\frac{E_e(1+\rho)}{c}, \quad (1)$$ где E_e- количество энергии, падающей на единицу поверхности;
$P-?$	

$$E_e=\frac{W}{St}. \quad (2)$$

В случае идеально отражающей поверхности (зеркальной) коэффициент отражения $\rho=1$.

Подставляя (2) в (1) и учитывая, что $\rho=1$, получим:

$$P=\frac{2W}{Stc};$$

$$[P]=\frac{\text{Дж}\cdot\text{с}}{\text{м}^2\cdot\text{с}\cdot\text{м}}=\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}^3}=\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}=\text{Па};$$

$$P=\frac{2\cdot 9}{5\cdot 10^{-4}\cdot 180\cdot 3\cdot 10^8}=667\cdot 10^{-9}\ \text{Па}=667\ \text{нПа}.$$

Ответ: $P=667$ нПа.

ЗАДАЧА 3.29

Гамма-фотон с длиной волны $1,2$ пм в результате комптоновского рассеяния на свободном электроне отклонился от первоначального направления на угол $60°$. Определить кинетическую энергию и импульс электрона отдачи. До столкновения электрон покоился.

Дано:

$\lambda_1 = 1,2 \cdot 10^{-12}$ м

$\theta = 60°$

$\lambda_c = 2,43 \cdot 10^{-12}$ м

$E_0 = 0,511$ МэВ $= 0,818 \cdot 10^{-13}$ Дж

$E_к,\ P - ?$

Решение

Изменение длины волны фотона при комптоновском рассеянии на неподвижном свободном электроне

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_c\left(1 - \cos\theta\right), \qquad (1)$$

где λ_1 и λ_2 – длины волн падающего и рассеянного фотонов; $\theta -$ угол рассеяния фотона; $\lambda_c = \dfrac{h}{mc} = \dfrac{hc}{E_0}$ – комптоновская длина волны электрона.

Из (1) найдем:

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_c\left(1 - \cos\theta\right). \qquad (2)$$

Выразим энергию падающего и рассеянного фотонов через их длины волн:

$$\varepsilon_1 = \frac{hc}{\lambda_1};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda_2} = \frac{hc}{\lambda_1 + \lambda_c\left(1 - \cos\theta\right)}. \qquad (3)$$

Кинетическая энергия электрона отдачи согласно закону сохранения энергии равна:

$$E_к = \varepsilon_1 - \varepsilon_2. \qquad (4)$$

Подставляя (3) в (4), найдем:

$$E_к = \left(\frac{hc}{\lambda_1}\right)\frac{\lambda_c\left(1-\cos\theta\right)}{\lambda_1 + \lambda_c\left(1-\cos\theta\right)} = \mathrm{E}_0\left(\frac{\lambda_c}{\lambda_1}\right)\frac{\lambda_c\left(1-\cos\theta\right)}{\lambda_1 + \lambda_c\left(1-\cos\theta\right)};$$

$$E_к = 0,511\left(\frac{2,43\cdot10^{-12}}{1,2\cdot10^{-12}}\right)\frac{2,43\cdot10^{-12}\left(1-\cos60°\right)}{1,2\cdot10^{-12} + 2,43\cdot10^{-12}\left(1-\cos60°\right)} =$$

$$= 0,521 \text{ МэВ} = 0,833\cdot10^{-13} \text{ Дж}.$$

Поскольку кинетическая энергия электрона сравнима с его энергией покоя, то импульс и кинетическая энергия связаны соотношением

$$P = \frac{1}{c}\sqrt{E_к\left(E_к + 2E_0\right)},$$

где E_0 = 0,511 МэВ – энергия покоя электрона;

$$P = \frac{1}{3\cdot10^8}\sqrt{0,833\cdot10^{-13}\left(0,833\cdot10^{-13} + 2\cdot0,818\cdot10^{-13}\right)} = 4,8\cdot10^{-22}\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $E_к = 0,833\cdot10^{-13}$ Дж; $P = 4,8\cdot10^{-22}\ \dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$.

ЗАДАЧА 3.30

Угол рассеяния фотона с энергией $1{,}2$ МэВ на свободном электроне $60°$. Найти длину волны рассеянного фотона.

Дано:
$\varepsilon = 1{,}2$ МэВ $= 1{,}92 \cdot 10^{-13}$ Дж
$\theta = 60°$
$\lambda' - ?$

Решение

Изменение длины волны фотона при комптоновском рассеянии определяется формулой

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Тогда

$$\lambda' = \lambda + 2\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad (1)$$

где $\lambda_c = 0{,}242 \cdot 10^{-11}$м – комптоновская длина волны; $\theta -$ угол рассеяния.

Выразим λ через энергию фотона:

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda},$$

$$\lambda = \frac{hc}{\varepsilon}.$$

Подставив в (1), получим:

$$\lambda' = \frac{hc}{\varepsilon} + 2\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2};$$

$$[\lambda'] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{м}}{\text{с} \cdot \text{Дж}} + \text{м} = \text{м};$$

$$\lambda' = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{1{,}92 \cdot 10^{-13}} + 2 \cdot 0{,}242 \cdot 10^{-11} \sin^2\frac{60}{2} = 2{,}25 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$$

Ответ: $\lambda' = 2{,}25 \cdot 10^{-12}$ м.

Физика атома по Бору

ЗАДАЧА 3.31

Электрон находится на третьей боровской орбите атома водорода. Определить: 1) радиус этой орбиты; 2) скорость электрона на этой орбите; 3) частоту вращения электрона на этой орбите; 4) потенциальную энергию электрона; 5) кинетическую энергию электрона; 6) полную энергию электрона на этой орбите.

Дано:
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг
$Z = 1$
$n = 3$

Решение

На электрон, движущийся в атоме по n-й орбите, действует кулоновская сила

$$F = \frac{e^2 Z}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2}, \qquad (1)$$

$r_3;\upsilon_3;\nu;\ E_P;E_K;E -?$

где Z – порядковый номер элемента.

Эта сила сообщает электрону нормальное ускорение

$$a_n = \frac{\upsilon_n^2}{r_n}, \qquad (2)$$

где υ_n – скорость электрона на n-й орбите.

По второму закону Ньютона

$$F = ma_n. \qquad (3)$$

Подставляя (1) и (2) в (3), получим:

$$m\frac{\upsilon_n^2}{r_n} = \frac{e^2 Z}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2}. \qquad (4)$$

С другой стороны, согласно правилу квантования момента импульса

$$m\upsilon_n r_n = n\hbar. \qquad (5)$$

Решая уравнения (4) и (5), найдем:

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2 Z}; \qquad (6)$$

$$\upsilon_n = \frac{e^2 Z}{4\pi\varepsilon_0\hbar\cdot n}; \qquad (7)$$

Для третьей боровской орбиты $n = 3$, тогда

$$r_3 = 476{,}1\cdot 10^{-12}\ \text{м}, \qquad \upsilon_3 = 0{,}731\cdot 10^6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Период обращения электрона по орбите

$$T = \frac{2r_n\pi}{\upsilon_n},$$

а частота

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\upsilon_n}{2r_n\pi}.$$

Тогда, используя уравнения (6) и (7), получим:

$$\nu = \frac{me^4 Z^2}{32\varepsilon_0^2\pi^3\hbar^3 n^3};$$

для $n = 3$ частота вращения $\nu = 2{,}42\cdot 10^{14}$ Гц.

Зная скорость движения электрона по n-й орбите (7), определим его кинетическую энергию:

$$E_K = \frac{m\upsilon_n^2}{2}$$

или

$$E_K = \frac{me^4Z^2}{32\varepsilon_0^2\pi^2\hbar^2n^2}; \qquad (8)$$

При $n = 3$ получим:

$$E_K = 2{,}43 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1{,}5 \text{ эВ}.$$

Потенциальная энергия E_P – это энергия взаимодействия электрона с ядром; $E_P = -\frac{e^2Z}{4\pi\varepsilon_0 r_n}$ или, подставляя формулу (6) для r_n, запишем:

$$E_P = -\frac{me^4Z^2}{16\varepsilon_0^2\pi^2\hbar^2n^2}. \qquad (9)$$

При $n = 3$ получим:

$$E_P = -3{,}0 \text{ эВ}.$$

Полная энергия атома E является суммой кинетической энергии вращения электрона и потенциальной энергии взаимодействия электрона с ядром:

$$E = E_K + E_P. \qquad (10)$$

Подставляя (8), (9) в (10), получим:

$$E = -\frac{me^4Z^2}{32\varepsilon_0^2\pi^2\hbar^2n^2}$$

или

$$E = -1{,}5 \text{ эВ}.$$

Ответ: $r_3 = 476{,}1 \cdot 10^{-12}$ м; $\upsilon_3 = 0{,}731 \cdot 10^6 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $\nu = 2{,}42 \cdot 10^{14}$ Гц; $E_K = 1{,}5$ эВ; $E_K = 1{,}5$ эВ; $E_P = -3{,}0$ эВ; $E = -1{,}5$ эВ.

ЗАДАЧА 3.32

Определить частоту света, излучаемого возбужденным атомом водорода при переходе электрона на второй энергетический уровень, если радиус орбиты электрона изменится в 9 раз.

Дано:	**Решение**
$n = 2$	Согласно обобщенной формуле Бальмера частота света, излучаемого атомом водорода,
$\frac{r_n}{r_m} = 9$	$$\nu = RcZ^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$
ν – ?	

где R – постоянная Ридберга; m – определяет номер орбиты, на которую переходит электрон; k – определяет номер орбиты, с которой переходит электрон.

Электрон движется по орбите радиусом r_n под действием кулоновской силы;

$$\frac{m\upsilon_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2}. \qquad (1)$$

Из теории Бора момент импульса электрона, движущегося по орбите,

$$m\upsilon_n r_n = n\hbar = n\frac{h}{2\pi}. \qquad (2)$$

Умножив обе части уравнения (1) на mr_n^2, получим с учетом соотношения (2) радиус r_n n-й орбиты в атоме водорода:

$$r_n = n^2\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = n^2 r_Б,$$

где

$$r_Б = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 0{,}053 \text{ нм}.$$

По условию задачи

$$\left(\frac{r_k}{r_n}\right) = \left(\frac{k^2}{n^2}\right) = 9.$$

Зная отношение радиусов орбит электрона при переходе с орбиты m на орбиту n, найдем частоту:

$$\nu = RcZ^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right) = RcZ^2\left(1 - \frac{n^2}{k^2}\right)\frac{1}{n^2};$$

$$\nu = 7{,}31\cdot 10^{14} \text{ Гц}.$$

Ответ: $\nu = 7{,}31\cdot 10^{14}$ Гц.

ЗАДАЧА 3.33

Атом водорода испустил фотон с длиной волны $4{,}86\cdot 10^{-7}$ м. Насколько изменилась энергия электрона в атоме?

Дано:	Решение
$\lambda = 4{,}86\cdot 10^{-7}$ м	По теореме Бора при переходе электрона из состояния с энергией E_k в состояние с энергией E_n излучается фотон с энергией, равной
ΔE – ?	

$$h\nu = E_k - E_n = \Delta E.$$

Учитывая, что $\upsilon = \frac{c}{\lambda}$, получаем:

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda};$$

$$[\Delta E] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{с}} = \text{Дж};$$

$$\Delta E = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{4{,}86 \cdot 10^{-7}} \approx 4{,}09 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж} = 2{,}56\ \text{эВ}.$$

Ответ: $\Delta E = 2{,}56$ эВ.

ЗАДАЧА 3.34

Определить наибольшие и наименьшие длины волн фотонов, излучаемых при переходе электронов в сериях Лаймана, Бальмера и Пашена.

Дано:	**Решение**
$R = 1{,}097 \cdot 10^{7}\ \text{м}^{-1}$	
$\lambda_{1\max}, \lambda_{1\min}, \lambda_{2\max}, \lambda_{2\min}, \lambda_{3\max}, \lambda_{3\min}$ – ?	

Обобщенная формула Бальмера позволяет определять длину волны λ при всевозможных переходах электрона в атоме водорода:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right) \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{1}{R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right)}.$$

В серии Лаймана переход осуществляется на первую орбиту со всех остальных, то есть $n = 1$, $k = 2, 3, 4, \ldots\infty$.

Следовательно,

$$\lambda_{1\max} = \frac{1}{R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)} = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^{7}(1 - 0{,}25)} = 0{,}128\ \text{мкм};$$

$$\lambda_{1\min} = \frac{1}{R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty}\right)} = \frac{1}{R} = 0{,}091\ \text{мкм}.$$

В серии Бальмера переход осуществляется на вторую орбиту со всех вышележащих, т.е. $n = 2$, $k = 2, 3, 4, \ldots\infty$;

$$\lambda_{2\max} = \frac{1}{R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)} = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^{7}(0{,}25 - 0{,}11)} = 0{,}656\ \text{мкм};$$

$$\lambda_{2\min} = \frac{1}{R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty}\right)} = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^{7} \cdot 0{,}25} = 0{,}365\ \text{мкм}.$$

В серии Пашена переход осуществляется на третью орбиту со всех вышележащих, т.е. $n = 3$, $k = 4, 5, 6, \ldots\infty$;

$$\lambda_{3\max} = \frac{1}{R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right)} = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right)} = 1{,}88 \text{ мкм};$$

$$\lambda_{3\min} = \frac{1}{R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{\infty}\right)} = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7 \cdot 0{,}11} = 0{,}82 \text{ мкм}.$$

Ответ: $\lambda_{1\max} = 0{,}128$ мкм; $\lambda_{1\min} = 0{,}091$ мкм;
$\lambda_{2\max} = 0{,}656$ мкм; $\lambda_{2\min} = 0{,}365$ мкм;
$\lambda_{3\max} = 1{,}88$ мкм; $\lambda_{3\min} = 0{,}82$ мкм.

ЗАДАЧА 3.35

Определить потенциал ионизации φ_i и первый потенциал возбуждения φ_1 атома водорода.

Дано:	**Решение**
$Z = 1$ $R = 1{,}1 \cdot 10^7$ м$^{-1}$	Потенциалом ионизации φ_i называют ту наименьшую разность потенциалов, которую должен пройти в ускоряющем электрическом поле электрон, чтобы при столкновении с невозбужденным атомом ионизировать его.
φ_i, φ_1 – ?	

Работа по удалению электрона из атома A_i должна равняться работе сил электрического поля, ускоряющего электрон, поэтому

$$A_i = e\varphi_i. \qquad (1)$$

С другой стороны, работа ионизации A_i равна кванту энергии $h\nu$, поглощенному атомом водорода при переходе электрона с первой орбиты на бесконечно удаленную.

Тогда, применив формулу Бальмера, при $n = 1$, $k = \infty$ получим:

$$\mathrm{A}_i = h\nu = hcRZ^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty}\right) = hcRZ^2. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) находим:

$$\varphi_i = \frac{hcRZ^2}{e};$$

$$\varphi_i = 13{,}6 \text{ В}.$$

Первый потенциал возбуждения φ_1 – это та наименьшая разность потенциалов, которую должен пройти в ускоряющем поле электрон, чтобы при столкновении с возбужденным атомом перевести его в первое возбужденное состояние. Для атома водорода это соответствует переходу электрона с первой боровской орбиты на вторую.

Снова приравняв работу сил ускоряющего электрического поля $e\varphi_1$ кванту энергии $h\nu$, поглощенному атомом при его переходе в первое возбужденное состояние, при $n = 1,\ k = 2$ получим:

$$e\varphi_1 = h\nu = RcZ^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}hcRZ^2.$$

Отсюда

$$\varphi_1 = \frac{3hcRZ^2}{4e};$$

$$\varphi_1 = 10{,}2\ \text{В}.$$

Ответ: $\varphi_i = 13{,}6\ \text{В}$; $\varphi_1 = 10{,}2\ \text{В}$.

Элементы квантовой физики

Волны де Бройля

ЗАДАЧА 3.36

Вычислить длину волны де Бройля электрона, движущегося со скоростью $\upsilon = 0{,}75\,c$ (c – скорость света в вакууме).

Дано:

$\upsilon = 0{,}75\ c$

$c = 3\cdot 10^{-8}\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$

$m = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг

λ – ?

Решение

Длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Импульс частицы, движущейся с релятивистской скоростью υ, равен

$$p = \frac{m\upsilon}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Тогда

$$\lambda = \frac{h}{m\upsilon}\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}};\quad [\lambda] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{с}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot\text{м}}\sqrt{\frac{\text{м}^2\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{м}^2}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{кг}\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}} = \text{м};$$

$$\lambda = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}}{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 0{,}75\cdot 3\cdot 10^{8}}\sqrt{1 - 0{,}75^2} = 2{,}14\cdot 10^{-12}\ \text{м}.$$

Ответ: $\lambda = 2{,}14\cdot 10^{-12}$ м.

ЗАДАЧА 3.37

Электрон прошел ускоряющую разность потенциалов $U = 51$ В. Найти длину волны де Бройля.

Дано:

$U = 51$ В

$E_0 = 8{,}2 \cdot 10^{-14}$ Дж

$\lambda - ?$

Решение

Длина волны де Бройля $\lambda = \dfrac{h}{p}$.

Импульс выразим при условии, что кинетическая энергия электрона равна

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m^2\upsilon^2}{2m} = \frac{p^2}{2m},$$

откуда $p = \sqrt{2E_к m}$.

С другой стороны, $E_{\hat{e}} = eU$, где e – заряд электрона.

Тогда

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2eU\,m}};$$

$$[\lambda] = \frac{\text{Äæ} \cdot \text{ñ}}{\sqrt{\text{Êë} \cdot \text{Â} \cdot \text{êã}}} = \frac{\text{Äæ}^2 \cdot \text{ñ}^2}{\text{Êë} \cdot \text{Â} \cdot \text{êã}} = \frac{\text{Í}^2 \cdot \text{ì}^2 \cdot \text{ñ}^2}{\text{À} \cdot \text{ñ} \cdot \text{Â} \cdot \text{êã}} =$$

$$= \frac{\text{Н}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{кг}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{кг}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}} = \text{м};$$

$$\lambda = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 51 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = 1{,}72 \cdot 10^{-10}\ \text{ì}.$$

Ответ: $\lambda = 1{,}72 \cdot 10^{-10}$ ì .

ЗАДАЧА 3.38

Найти длину волны де Бройля λ: 1) электрона, находящегося в атоме водорода на третьей боровской орбите; 2) нейтрона, движущегося со средней квадратичной скоростью при $T = 290$ К; 3) протона, движущегося в однородном магнитном поле с индукцией $B = 15$ мТл по окружности радиусом $R = 1{,}4$ м.

Дано:

1) $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг

$n = 3$

2) $m = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг

$T = 290$ К

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}$

Решение

Длина волны де Бройля определяется соотношением

$$\lambda = \frac{h}{m\upsilon}. \qquad (1)$$

1. Скорость электрона, находящегося на n-й боровской орбите, определяется из правила квантования орбит электрона:

$$m_e \upsilon_n r_n = n\hbar. \qquad (2)$$

3) $B = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ Тл $R = 1{,}4$ м $m = 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ кг	На электрон, движущийся в атоме, действует кулоновская сила, сообщающая электрону центростремительное ускорение:
λ – ?	

$$m_e \frac{\upsilon_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2},$$

откуда радиус орбиты

$$r = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e \upsilon_n^2}. \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получим:

$$\upsilon_n = \frac{1}{n}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar} = \frac{1}{n}\frac{e^2}{2\varepsilon_0 h}. \qquad (4)$$

Подсчитаем скорость электрона для $n = 3$:

$$\upsilon_3 = 7{,}28 \cdot 10^5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Так как $\upsilon_3 \ll c$, то по формуле (1) определяем длину волны: $\lambda = 1$ нм.

2. Средняя квадратичная скорость нейтрона

$$\langle\upsilon\rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_n}};$$

$$\langle\upsilon\rangle = 2{,}68 \cdot 10^3\ \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

т.е. $\langle\upsilon\rangle \ll c$, поэтому длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{m_n\langle\upsilon\rangle}; \qquad \lambda = 148\ \text{пм};$$

$$[\lambda] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{с}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Н}} = \text{м}.$$

3. На протон, движущийся по окружности в магнитном поле, действует сила Лоренца, которая сообщает частице центростремительное ускорение, т.е.

$$q\upsilon B = \frac{m_p\upsilon^2}{R},$$

откуда

$$\upsilon = \frac{qBR}{m_p}; \qquad \upsilon = 2 \cdot 10^7\ \frac{\text{м}}{\text{с}}; \qquad [\upsilon] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{Тл}\cdot\text{м}}{\text{кг}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

$$\lambda = \frac{h}{m_p\upsilon}; \qquad \lambda = 0{,}197\ \text{пм}.$$

Ответ: 1) $\lambda = 1$ нм; 2) $\lambda = 148$ пм; 3) $\lambda = 0{,}197$ пм.

Соотношение неопределенностей. Уравнение Шредингера. Потенциальные ямы и барьеры

ЗАДАЧА 3.39

Оценить с помощью соотношения неопределенностей минимально возможную энергию электрона в атоме водорода.

Дано:	**Решение**
$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл	При $E = E_{\min}$ можно считать, что импульс электрона по порядку величины равен его неопределенности, т.е. $p \sim \Delta p$, а разброс расстояний электрона от ядра равен радиусу орбиты, или $\Delta r \sim r$.
$E_{\min}$ – ?	

Тогда в соответствии с принципом неопределенностей $\left(\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar\right)$

$$p \approx \frac{\hbar}{r}.$$

Энергия электрона в атоме может быть представлена выражением

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{ke^2}{2} = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{ke^2}{r}, \tag{1}$$

где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

Значение r, при котором $E = E_{\min}$, можно найти, приравняв производную $\dfrac{dE}{dr}$ к нулю:

$$-\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{ke^2}{r^2} = 0,$$

откуда

$$r = \frac{\hbar^2}{ke^2 m}. \tag{2}$$

После подстановки (2) в (1) получим:

$$E_{\min} = -\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2}; \qquad E_{\min} = -21{,}76 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 13{,}6 \text{ эВ};$$

$$\left[E_{\min}\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Н}^2 \cdot \text{м}^4 \cdot \text{Кл}^4}{\text{Кл}^4 \cdot \text{Дж}^2 \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{Н}^2 \cdot \text{м}^3}{\text{с}^2 \cdot \text{Дж}^2} = \frac{\text{Дж}^3}{\text{Дж}^2} = \text{Дж}.$$

Ответ: $E_{\min} = -13{,}6$ эВ.

ЗАДАЧА 3.40

Кинетическая энергия электрона в атоме водорода – порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные линейные размеры атома.

Дано:

$E = 1{,}6 \cdot 10^{-18}$ Дж

$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг

r – ?

Решение

Соотношение неопределенностей Гейзенберга:

$$\Delta x \Delta p_x \ge \hbar,$$

где Δx – неопределенность координаты; ΔP_x – неопределенность импульса; $\hbar$ – постоянная Планка.

Предполагая, что $\Delta x = r$ – линейному размеру атома, получим: $r = \dfrac{\hbar}{\Delta p}$.

Импульс электрона, обладающего кинетической энергией $E_к$, равен

$$p = \sqrt{2mE_к}.$$

Предполагая, что по порядку величины $\Delta p = p$, оценим r:

$$r = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE_к}};$$

$$[r] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\sqrt{\text{кг} \cdot \text{Дж}}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\sqrt{\text{кг} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\sqrt{\dfrac{\text{кг} \cdot \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \text{м};$$

$$r = \frac{1{,}05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-18}}} = 0{,}62 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Ответ: $r = 0{,}62 \cdot 10^{-10}$ м.

ЗАДАЧА 3.41

Электронный пучок ускоряется в электронно-лучевой трубке разностью потенциалов $U = 0{,}5$ кВ. Принимая, что неопределенность импульса равна $0{,}1\ \%$ от его числового значения, определить неопределенность координаты электрона.

Дано:

$U = 500$ В

$\Delta p_x = 0{,}001 p_x$

Δx – ?

Решение

Согласно соотношению неопределенностей

$$\Delta x \Delta p_x \ge \hbar, \tag{1}$$

где Δx – неопределенность координаты электрона; Δp_x – неопределенность его импульса; $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка.

Кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U,

$$E_{к} = eU = 0{,}5\ \text{кэВ},$$

а энергия покоя электрона

$$E_0 = mc^2 = 0{,}512\ \text{МэВ},$$

т.е. электрон при данных условиях является нерелятивистской частицей.

Импульс электрона

$$P = \sqrt{2mE_{к}} = \sqrt{2meU}\,; \qquad P = 1{,}24 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Согласно условию задачи неопределенность импульса

$$\Delta P_x = 0{,}001 P_x = 1{,}24 \cdot 10^{-26}\ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}},$$

т.е. $\Delta p_x \ll p_x$, и электрон при данных условиях является классической частицей.

Из выражения (1) следует, что искомая неопределенность координаты электрона

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p_x};$$

$$[\Delta x] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \text{м};$$

$$\Delta x = \frac{1{,}05 \cdot 10^{-34}}{1{,}24 \cdot 10^{-26}} = 8{,}46 \cdot 10^{-9}\ \text{м} = 8{,}46\ \text{нм}.$$

Ответ: $\Delta x = 8{,}46$ нм.

ЗАДАЧА 3.42

Электрон находится в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, ширина которой $1{,}4 \cdot 10^{-9}$ м. Определить энергию, излучаемую при переходе электрона с третьего энергетического уровня на второй.

<table>
<tr><td>Дано:
$l = 1{,}4 \cdot 10^{-9}$ м
$n = 2$
$n + 1 = 3$
ΔE – ?</td><td>Решение
Энергия E_n электрона (масса m), находящегося на n-м энергетическом уровне в потенциальной яме шириной l, определяется по формуле
$$E_n = \frac{h^2 n^2}{8ml^2}.$$</td></tr>
</table>

Энергия, излучаемая при переходе электрона с ($n+1$)-го уровня на n-й, равна

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \frac{h^2}{8ml^2}(2n+1); \quad [\Delta E] = \frac{\text{Дж}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Дж}^2}{\text{Дж}} = \text{Дж};$$

$$\Delta E = \frac{\left(6{,}62 \cdot 10^{-34}\right)^2 \cdot 5}{8 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}4^2 \cdot 10^{-18}} = 1{,}54 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1 \text{ эВ}.$$

Ответ: $\Delta E = 1$ эВ.

ЗАДАЧА 3.43

Частица находится в одномерной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками. Пользуясь уравнением Шредингера, найти собственные значения энергии E_n частицы.

Дано:
$0 \le x \le l$
$U = 0$
$x < 0$
$U \to \infty$
$x > l$
$U \to \infty$

E_n – ?

Решение

Уравнение Шредингера для стационарных состояний в случае одномерной задачи:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - U\right)\psi = 0.$$

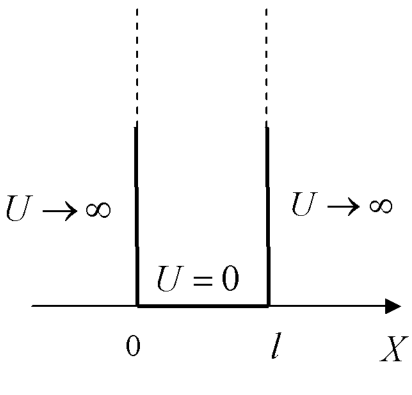
По условию задачи (бесконечно высокие стенки, см. рис.) частица не проникает за пределы ямы, поэтому вероятность ее обнаружения (а, следовательно, и волновая функция) за пределами ямы равна нулю.

На границах ямы (при $x = 0$ и $x = l$) непрерывная волновая функция также должна обращаться в нуль.

Следовательно, граничные условия в данном случае имеют вид:

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \qquad (1)$$

В пределах ямы ($0 \le x \le l$) уравнение Шредингера:



$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - U\right)\psi = 0,$$

или

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \qquad (2)$$

где

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \qquad (3)$$

Общее решение дифференциального уравнения (2):

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx.$$

Так как по (1) $\psi(0) = 0$, то $B = 0$.

Тогда

$$\psi(x) = A\sin kx$$

Условие (1) $\psi(l) = A\sin kl = 0$ выполняется только при $kl = n\pi$, где n – целые числа, т.е. необходимо, чтобы

$$k = \frac{\pi n}{l}. \qquad (4)$$

Из выражений (3) и (4) следует, что

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}\left(n = 1,\ 2,\ 3,...\right),$$

т.е. стационарное уравнение Шредингера, описывающее движение частицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, удовлетворяется только при собственных значениях E_n, зависящих от целого числа n. Следовательно, энергия E_n частицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками принимает лишь определенные дискретные значения, т.е. квантуется.

Ответ: $E_n = n^2 \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}\left(n = 1,\ 2,\ 3,\ ...\right)$.

ЗАДАЧА 3.44

Две частицы, электрон и протон, обе с энергией 5 эВ, движутся в одном направлении и встречают на своем пути прямоугольный потенциальный барьер высотой 10 эВ и шириной 1 пм. Определить отношение вероятностей прохождения частицами этого барьера.

Решение. Вероятность прохождения частицы через указанный барьер определяется коэффициентом прозрачности

$$D = e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}l}$$

Искомое отношение вероятностей равно

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m_e(U_0 - E)}l}}{e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m_p(U_0 - E)}l}}.$$

Массы электрона и протона соответственно равны

m_e=9,1·10^{-31} кг, m_p=1,67·10^{-27} кг.

Вычисляя, получаем

$$\frac{D_1}{D_2} = 2{,}6.$$

Ответ: $D_1/D_2 = 2{,}6$.

ЗАДАЧА 3.45

Вычислить максимальную энергию E_F (энергию Ферми), которую могут иметь свободные электроны в металле (медь) при температуре T=0 К. Принять, что на каждый атом меди приходится по одному валентному электрону.

Решение. Максимальная энергия E_F , которую могут иметь электроны в металле при T=0 К, связана с концентрацией свободных электронов соотношением

$$E_F = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad (1)$$

Концентрация свободных электронов по условию задачи равна концентрации атомов, которая может быть найдена по формуле

$$n = \frac{\rho N_A}{M} \qquad (2)$$

где ρ – плотность меди; N_A постоянная Авогадро; М – молярная масса. Подставляя выражение (2) в формулу (1), получаем

$$E_F = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3\rho N_A}{8\pi M}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Произведя вычисления, получим: $E_F = 1{,}2\cdot10^{-18}$ Дж = 7,4 эВ.
Ответ: E_F= 7,4 эВ.

ЗАДАЧА 3.46

Кристаллический алюминий массой 10 г нагревается от 10 до 20 К. Пользуясь теорией Дебая, определить количество теплоты, необходимое для нагревания. Характеристическая температура Дебая для алюминия равна 418 К. Считать, что условие $T << T_D$ выполняется. М=27· 10^{-3} кг/моль.

Решение. Количество теплоты, необходимое для нагревания алюминия от температуры T_1 до T_2, будем вычислять по формуле

$$Q = m\int_{T_1}^{T_2} c dT\,, \qquad (1)$$

где m – масса алюминия; c – его удельная теплоемкость, которая связана с молярной теплоемкостью соотношением $c=C_m/M$. Учитывая это, формулу (1) запишем в виде

$$Q = \frac{m}{M}\int_{T_1}^{T_2} C_m dT \qquad (2)$$

По теории Дебая, если условие $T << T_D$ выполнено, молярная теплоемкость определяется предельным законом

$$C_m = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{T_D} \right)^3, \qquad (3)$$

где R=8,31 Дж/(моль·К) – молярная газовая постоянная; T_D – характеристическая температура Дебая; T – термодинамическая температура. Подставляя (3) в (2) и выполняя интегрирование, получаем

$$Q = \frac{12\pi^4}{5} \frac{m}{M} R \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{T}{T_D} \right)^3 dT = \frac{3\pi^4}{5} \frac{m}{M} \frac{R}{T_D^3} \left(T_2^4 - T_1^4 \right).$$

Подставляя числовые значения, находим Q=0,36 Дж.
Ответ: Q=0,36 Дж.

ЗАДАЧА 3.47

Используя квантовую теорию теплоемкости Эйнштейна, вычислить удельную теплоемкость при постоянном объеме алюминия при температуре T=200 К. Характеристическую температуру Эйнштейна T_θ принять для алюминия равной 300 К.

Решение. Удельная теплоемкость с вещества может быть выражена через молярную теплоемкость C_M соотношением

$$c = C_M / M$$

где M – молярная масса. Молярная теплоемкость при постоянном объеме по теории Эйнштейна выражается формулой

$$C_M = 3R \left(\frac{T_\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{T_\theta}{T}}}{\left(e^{\frac{T_\theta}{T}} - 1 \right)^2}$$

Выражение для удельной теплоемкости принимает вид

$$c = \frac{3R}{M} \left(\frac{T_\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{T_\theta}{T}}}{\left(e^{\frac{T_\theta}{T}} - 1 \right)^2}.$$

Произведя вычисления, получим: c=770 Дж/(кг·К).
Ответ: c=770 Дж/(кг·К).

ЗАДАЧА 3.48

Удельная проводимость кремниевого образца при нагревании от температуры t_1 = 0 °C до температуры t_2 = 18 °C увеличилась в 4,24 раза. Определить ширину запрещенной зоны кремния.

Решение. Удельная проводимость собственных полупроводников

$$\sigma = \sigma_o e^{-\frac{\Delta E}{2kT}},$$

где σ_o – постоянная, характерная для данного полупроводника; ΔE – ширина запрещенной зоны. Тогда отношение проводимостей при двух температурах

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{e^{-\frac{\Delta E}{2kT_1}}}{e^{-\frac{\Delta E}{2kT_2}}} = \exp\left[\frac{\Delta E}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right],$$

прологарифмировав, получаем

$$\ln\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\Delta E}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right).$$

Откуда выражаем искомую ширину запрещенной зоны

$$\Delta E = \frac{2kT_1T_2\ln(\sigma_1/\sigma_2)}{T_2 - T_1}$$

Вычисляя, получаем ΔE =1,1 эВ.
Ответ: ΔE =1,1 эВ.

ЗАДАЧА 3.49

Чему равна подвижность электронов в натрии при 0 ^{o}C, если электропроводность меди 0,23·10^{8} 1/(Ом·м), а концентрация носителей заряда 2,5·10^{28} м$^{-3}$.

Решение. Подвижность электронов определяется как средняя дрейфовая скорость, отнесенная к единице напряженности электрического поля

$$\mu = \frac{\upsilon_d}{E} = \frac{e\tau}{m},$$

где τ – время релаксации. Так как $\tau = \dfrac{\sigma m}{ne^2}$, то $\mu = \dfrac{\sigma}{ne}$. Вычисляя, получаем $\mu = 0{,}56 \cdot 10^{-2}$ м^2/(В·с).
Ответ: $\mu = 0{,}56 \cdot 10^{-2}$ м^2/(В·с).

ЗАДАЧА 3.50

Определить среднюю энергию электрона в металле при абсолютном нуле температуры.

Решение. Полная энергия электронов в единице объема металла равна

$$E_{полн} = \int_0^{E_F} E \cdot g(E)dE = \int_0^{E_F} \frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{3}{2}} dE = \frac{4\pi}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}(E_F)^{\frac{5}{2}}\frac{2}{5}.$$

С учетом того, что концентрация электронов связана с уровнем Ферми соотношением

$$n = \frac{8\pi V}{3h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}(E_F)^{\frac{3}{2}},$$

Полная энергия равна

$$E_{полн} = \frac{3}{5} n E_F$$

Средняя энергия электрона равна

$$\overline{E} = \frac{E_{полн}}{n} = \frac{3}{5} E_F, \ \overline{E} = 5{,}6 \text{ эВ}.$$

Ответ: $\overline{E} = 5{,}6$ эВ.