

УДК 539.31

## К ВОПРОСУ О РАСЧЕТЕ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ РАЗНОМОДУЛЬНОСТИ МАТЕРИАЛА

канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЦЕВ  
(Полоцкий государственный университет)

Рассматривается расчет статически неопределимых ферменных конструкций при узловой схеме нагружения с учетом влияния разномодульности материала. Для описания зависимости между напряжениями и деформациями материала стержней фермы используется билинейная диаграмма. Рассматриваемая произвольная пространственная статически неопределимая ферма считается линейно-деформируемой системой. Формирование разрешающей системы уравнений осуществляется методом перемещений. Получены матричные формулы для определения вектора продольных сил, возникающих в стержнях фермы, и вектора составляющих опорных реакций фермы.

**Введение.** В линейной теории расчета стержневых конструкций конструкционный материал, как правило, считается однородным изотропным упругим телом, поведение которого описывается модулем упругости  $E$  одинаковым при растяжении и сжатии. Однако, как показывают экспериментальные исследования, модули упругости при растяжении  $E^+$  и сжатии  $E^-$  для ряда современных конструкционных материалов существенно различаются. Более того, явление разномодульности в той или иной степени присуще практически всем традиционным конструкционным материалам. Так, согласно [1] разномодульность установлена для многочисленных сталей и сплавов. Для них коэффициент разномодульности ( $E^+/E^-$ ) меньше единицы и изменяется в пределах от 0,75 до 0,97. Существенно разномодульным материалом, например, являются бетоны [2]. Так, коэффициент разномодульности тяжелых бетонов больше единицы и изменяется в пределах от 1,07 до 1,82. В то же время коэффициент разномодульности легких бетонов может быть как больше, так и меньше единицы.

**Основная часть.** Исходя из экспериментальных данных, полученных для различных материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию, была построена феноменологическая теория [3], описывающая поведение разномодульного материала и предлагающая общие методы решения задач теории упругости из такого материала. Согласно этой теории диаграмма «напряжение – деформация» для материалов с разными модулями упругости при растяжении и сжатии представляется в виде билинейной диаграммы (рис. 1), с разрывом значения угла наклона касательной в точке  $O$ . В действительности же связь между напряжениями и деформациями не так проста. Между линейными участками, соответствующими растяжению и сжатию, имеется переходная нелинейная зона с непрерывным изменением значения угла наклона касательной в точке  $O$ . Поэтому, принимая билинейную диаграмму для описания зависимости «напряжение – деформация», нелинейные соотношения аппроксимируются линейными зависимостями между соответствующими напряжениями и деформациями.

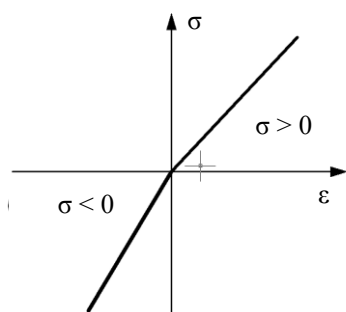


Рис. 1. Диаграмма «напряжение – деформация»

Рассмотрим расчет статически неопределимых ферменных конструкций при узловой схеме нагружения согласно шарнирной расчетной схеме с учетом влияния разномодульности материала.

Поскольку в этом случае все стержни ферменных конструкций работают в условиях чистого одноосного напряженного состояния, то в них возникают только продольные силы, а поведение материала любого стержня естественно соответствует принятой билинейной диаграмме, показанной на рисунке 1. Разномодульность материала стержней фермы характеризуется соотношением модулей упругости

$$\mu = \frac{E^+}{E^-}.$$

Рассматриваемая произвольная пространственная статически неопределимая ферма считается линейно-деформируемой системой. Ферма включает в себя  $s$  прямолинейных внутренних стержней, соединяющих  $n$  узлов, в том числе  $t$  внутренних узлов и  $n - t$  опорных узлов. Число опорных стержней равняется  $r$ .

Так как ферма считается статически неопределимой, то соотношение между числом узлов и стержней фермы удовлетворяет условию:

$$3n - s - r < 0.$$

Степень ее статической неопределимости  $h$  равняется

$$h = s + r - 3n ,$$

а число опорных стержней  $r$  должно удовлетворять условию:

$$r = 3n + h - s .$$

Общее число узловых перемещений, возникающих в ферме при ее деформировании, связано с числом узлов и числом опорных стержней соотношением:

$$t = 3n - r .$$

Вектор узловых перемещений имеет вид:

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_i \\ \vdots \\ Z_t \end{pmatrix} .$$

Внешняя нагрузка, действующая на ферму, представляет собой систему сосредоточенных сил, приложенных ко всем  $n$  узлам фермы по направлениям перемещений этих узлов. Внешняя нагрузка, приложенная к каждому внутреннему узлу, характеризуется тремя составляющими. Число составляющих внешней нагрузки, приложенной к опорному узлу, равняется числу перемещений, допускаемых опорными стержнями этого узла. Таким образом, внешняя нагрузка описывается вектором

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_t \end{pmatrix} .$$

Продольные силы, возникающие в стержнях фермы от действия нагрузки, описываются вектором

$$\bar{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_k \\ \vdots \\ N_s \end{pmatrix} .$$

Тогда уравнения равновесия узлов заданной фермы имеют вид:

$$A_N \bar{\mathbf{N}} + \bar{\mathbf{P}} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

а ее элементы могут быть найдены с помощью элементов матриц направляющих косинусов и инциденций [4] по формуле:

$$a_{jk} = c_{jk} d_{ik} \quad k = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 3 \cdot i - 2, 3 \cdot i - 1, 3 \cdot i .$$

Для описания геометрической структуры рассматриваемой фермы в некоторой координатной системе  $x, y, z$  и определения направляющих косинусов применяются матрица координат и матрица инциденций.

Матрица координат имеет вид:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ z_{31} & z_{32} & \dots & z_{3n} \end{pmatrix},$$

где  $z_{1i} = x_i$ ,  $z_{2i} = y_i$ ,  $z_{3i} = z_i$ .

И, следовательно, каждый столбец матрицы описывает координаты узла, номер которого совпадает с номером столбца.

Матрица инциденций имеет вид:

$$d = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1s} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{ns} \end{pmatrix}.$$

В этой матрице каждому стержню фермы соответствует столбец, а каждому узлу – строка. Если стержень номера  $k$  начинается в узле  $l$ , а заканчивается в узле  $f$ , то для него элементы матрицы инцидентий принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} &+1, && \text{если } i = f; \\ d_{ik} &= -1, && \text{если } i = l; \\ &0, && \text{если } i \neq f \text{ и } i \neq l. \end{aligned}$$

С помощью матриц координат и инцидентий формируется матрица проекций длин стержней фермы на координатные оси, которая имеет вид:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1s} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2s} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \dots & \Delta_{3s} \end{pmatrix}.$$

С помощью матриц координат и инцидентий формируется матрица проекций длин стержней фермы на координатные оси:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1s} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2s} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \dots & \Delta_{3s} \end{pmatrix},$$

где  $\Delta_{1k} = \Delta_{xk}$ ,  $\Delta_{2k} = \Delta_{yk}$ ,  $\Delta_{3k} = \Delta_{zk}$ , ( $k = 1, \dots, s$ ).

Таким образом, каждый столбец матрицы содержит величины координатные проекции длины стержня, номер которого совпадает с номером столбца.

Элементы матрицы координат позволяют вычислять длины стержней фермы

$$l_k = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \Delta_{ik}^2}$$

и формировать для них матрицу направляющих косинусов

$$c = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2s} \\ c_{31} & c_{32} & \dots & c_{3s} \end{pmatrix},$$

где  $c_{1k} = \cos \alpha_{xk}$ ,  $c_{2k} = \cos \alpha_{yk}$ ,  $c_{3k} = \cos \alpha_{zk}$ , ( $k = 1, \dots, s$ ).

Элементы матрицы направляющих косинусов связаны с элементами матрицы проекций длин стержней фермы и длинами этих стержней следующими соотношениями:

$$c_{1k} = \frac{\Delta_{1k}}{l_k}, \quad c_{2k} = \frac{\Delta_{2k}}{l_k}, \quad c_{3k} = \frac{\Delta_{3k}}{l_k}.$$

Происходящие изменения длин стержней фермы от действия нагрузки

$$\bar{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \\ \vdots \\ \lambda_s \end{pmatrix}$$

согласно принятой диаграмме «напряжение – деформация» связаны с продольными силами соответствующих стержней соотношениями:

$$\bar{\lambda} = \Phi \bar{N},$$

или

$$\bar{N} = \Omega \bar{\lambda}. \tag{2}$$

Здесь  $\Phi$  – матрица податливости,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_{11} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \phi_{kk} & \\ 0 & & & \phi_{ss} \end{pmatrix}, \phi_{kk} = \begin{cases} \frac{l_k}{E^+ A_k} & k = 1, \dots, m \\ \frac{l_k}{E^- A_k} & k = m + 1, \dots, s \end{cases},$$

а  $\Omega$  – матрица жесткости несвязанных между собой внутренних стержней фермы:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \omega_{kk} & \\ 0 & & & \omega_{ss} \end{pmatrix}, \omega_{kk} = \begin{cases} \frac{E^+ A_k}{l_k} & k = 1, \dots, m \\ \frac{E^- A_k}{l_k} & k = m + 1, \dots, s \end{cases}.$$

Связь между изменениями длин стержней и перемещениями узлов фермы согласно принципу суперпозиции описывается формулами:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= b_{11}Z_1 + \dots + b_{1r}Z_r \\ \dots & \\ \lambda_s &= b_{s1}Z_1 + \dots + b_{sr}Z_r \end{aligned}$$

или

$$\bar{\lambda} = \mathbf{B}\bar{\mathbf{Z}}.$$

Здесь  $\mathbf{B}$  прямоугольная матрица

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{s1} & \dots & b_{sr} \end{pmatrix},$$

где  $b_{ki}$  – изменение длины  $k$ -го стержня фермы от смещения на единицу некоторого узла по направлению  $i$ -го перемещения. Эти изменения длин связаны с направляющими косинусами этого стержня зависимостями:

$$b_{ki} = \begin{cases} -\cos\alpha_{ki}, & \text{если смещаемый узел примыкает к стержню;} \\ 0, & \text{если смещаемый узел не примыкает к стержню,} \end{cases}$$

согласно возможным схемам деформирования  $k$ -го стержня фермы, показанным на рисунке 2.

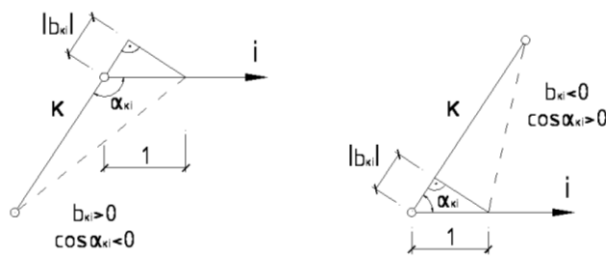


Рис. 2. Возможные схемы деформирования  $k$ -го стержня

Тогда матрицы  $\mathbf{B}$  и  $A_N$  и их элементы связаны между собой соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -\mathbf{A}'_N, \\ b_{ki} &= -a_{ki}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\bar{\lambda} = -\mathbf{A}'_N \bar{\mathbf{Z}}. \tag{3}$$

Подставляя в уравнения равновесия (1) выражения (2) и (3), получим

$$A'_N \Omega A'_N \bar{\mathbf{Z}} - \bar{\mathbf{P}} = 0. \tag{4}$$

Уравнения (4) являются разрешающими уравнениями метода перемещений для расчета пространственных ферм при действии узловой нагрузки.

Матричный оператор  $A_N \Omega'_N$ , входящий в уравнения (4), позволяет сформировать квадратную матрицу коэффициентов канонических уравнений метода перемещений

$$\begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{r1} & \dots & r_{rn} \end{pmatrix}.$$

Решая уравнение (4), найдем вектор узловых перемещений фермы

$$\bar{Z} = A_N \Omega'_N{}^{-1} \bar{P}. \quad (5)$$

Тогда, подставляя (3) и (5) в (2), получим формулу для определения вектора продольных сил, возникающих в стержнях фермы:

$$\bar{N} = -\Omega'_N A_N \Omega'_N{}^{-1} \bar{P}. \quad (6)$$

Поскольку роль внешней нагрузки для опорных узлов играют составляющие опорных реакций на координатные оси, которые описываются вектором

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_r \end{pmatrix},$$

то уравнения равновесия опорных узлов фермы, связанные с теми координатными осями, по направлениям которых невозможны линейные перемещения этих узлов, принимают вид:

$$A_R \bar{N} - \bar{R} = 0. \quad (7)$$

Здесь  $A_R$  – прямоугольная матрица коэффициентов уравнений равновесия опорных узлов. Эта матрица также формируется с помощью матрицы направляющих косинусов и матрицы инцидентий и имеет вид:

$$A_R = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix}.$$

Имея матрицу  $A_R$ , можно получить вектор составляющих опорных реакций фермы

$$\bar{R} = A_R \Omega'_N A_N \Omega'_N{}^{-1} \bar{P}.$$

**Заключение.** Численная реализация полученных матричных формул, связывающих искомые векторы  $\bar{Z}$ ,  $\bar{N}$ ,  $\bar{R}$  и заданные матрицы с информацией о геометрии фермы и внешней нагрузке, достаточно просто осуществляется в среде MathCAD. Алгоритм решения задачи, который записывается в естественной математической форме с применением общепринятой символики для математических знаков, одновременно является и программой численного решения задачи в этой среде.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов, Г.П. Исследование несовершенной упругости металлов: автореф. ... дис. / Г.П. Иванов. – Минск, 1973. – 18 с.
2. Авхимков, А.П. Об уравнениях обобщенного закона упругости материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию и некоторых их приложениях: автореф. дис. ... канд. техн. наук / А.П. Авхимков. – М., 1975. – 23 с.
3. Амбарцумян, С.А. Разномодульная теория упругости / С.А. Амбарцумян. – М.: «Наука», 1982. – 320 с.
4. Перельмутер, А. Основы расчета вантово-стержневых систем / А. Перельмутер. – М.: Стройиздат, 1969. – 180 с.

Поступила 18.12.2009

#### TO THE ISSUE OF ROD CONSTRUCTION CALCULATIONS WITH REGARD FOR INFLUENCE OF DIFFERENT MATERIAL MODULARITY

L. TURISHCHEV

The calculation of statically indeterminate truss constructions under the nodal scheme of loading with regard for influence of different materials modularity is considered at the given work. To describe the dependence between stresses and material deformations of girder rods is used bilinear diagram. Arbitrary spatial statically indeterminate truss which is consideration is called linear-deformable system. The formation of solving assembled equations is carried out by the method of displacement. The matrix formulas are obtained for vector deformation of longitudinal forces appearing in rods of girders and vector composing girder of bearing reactions.