

УДК 514

**ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГАМИЛЬТОНА – ОСТРОГРАДСКОГО  
В РАССЛОЕНИЯХ СКОРОСТЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА**

*д-р техн. наук С.Г. ЕХИЛЕВСКИЙ, канд. физ.-мат. наук, доц. О.В. ГОЛУБЕВА,  
канд. физ.-мат. наук Д.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук Ю.Ф. ПАСТУХОВ  
(Полоцкий государственный университет)*

В работе исследуются свойства инвариантного преобразования Остроградского  $F_L(x): T^{2n-1}X_m \rightarrow T^{2n-1}X_m$  в расслоении скоростей произвольного нечетного порядка  $T^{2n-1}X_m$ , индуцированного невырожденной функцией Лагранжа  $L: T^n X_m \rightarrow \mathbb{R}$ . В явном виде получена произ-

водная импульсов  $k$ -го порядка:  $D_l p_k^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)}) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(k-1)i}} - p_{k-1}^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k+1)})$ , где

$p_k^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_l^i \left( \frac{\partial L(x, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right)$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $i = \overline{1, m}$  – импульс  $k$ -го порядка по  $i$ -й координате.

Обобщена теорема Остроградского на случай невырожденной системы уравнений Эйлера – Лагранжа

произвольного порядка  $\sum_{l=0}^n (-1)^l D_l^i \left( \frac{\partial L(x, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(l)i}} \right) = 0$ , которая локально эквивалентна канонической сис-

теме уравнений Гамильтона.

**Ключевые слова:** уравнения Эйлера – Лагранжа, гладкие многообразия, расслоение пространства скоростей, энергия и импульс системы, преобразование Остроградского, невырожденная функция, теорема Остроградского, система уравнений Гамильтона.

**Введение.** Гамильтон в 1835 г. получил новую форму уравнений движения механических систем, названных впоследствии каноническими уравнениями Гамильтона.

В 1848 г. М.В. Остроградский распространил принцип Гамильтона на системы с нестационарными голономными связями, после чего он стал называться принципом Гамильтона – Остроградского. Полученная система канонических уравнений первого порядка содержит вдвое больше дифференциальных уравнений, чем в вариационной задаче в постановке Лагранжа. Высоко отозвался о работах по динамике Гамильтона член-корреспондент АН СССР Л.Н. Сретенский: «Эти работы легли в основу всего развития аналитической механики в XIX веке» [1]. Аналогичное мнение выразил академик РАН В.В. Румянцев: «Оптико-механическая аналогия Гамильтона определила на столетие прогресс аналитической механики» [2]. По мнению профессора Л.С. Полака, это была «теория, почти не имеющая аналогов в механике по общности и абстрактности, открывшая колоссальные возможности в механике и смежных науках» [3].

Академик В.И. Арнольд следующим образом охарактеризовал возможности, открывшиеся после появления гамильтоновой механики: «Гамильтонова точка зрения позволяет исследовать до конца ряд задач механики, не поддающихся решению иными средствами (например, задачу о притяжении двумя неподвижными центрами и задачи о геодезических на трехосном эллипсоиде). Еще большее значение гамильтонова точка зрения имеет для приближенных методов теории возмущений (небесная механика), для понимания общего характера движения в сложных механических системах (эргодическая теория, статистическая механика) и в связи с другими разделами математической физики (оптика, квантовая механика и т.п.)» [4].

Подход Гамильтона эффективно используется в математической и теоретической физике [5–8]. Первоначально вариационный принцип Гамильтона был сформулирован для задач механики и теории поля. С появлением теории относительности оказалось, что этот принцип строго выполняется и в релятивистской динамике. Принцип Гамильтона оказался полезным при разработке квантовой механики и общей теории относительности.

**Основные определения и математические объекты.** Пусть  $X_m$  – гладкое многообразие размерности  $m$ ,  $T^n X_m$  – гладкое расслоение пространства скоростей порядка  $n$  с базой расслоения  $X_m$ .

**Определение 1.** Гладкая функция  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  называется (слабо) невырожденной в точке  $v_x^n \in T^n X_m$ , если в некоторой системе координат  $x$ , базы  $X_m$  расслоения  $T^n X_m$ :

$$\det\left(\frac{\partial^2 L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x \partial x}\right)^{(n)} \neq 0,$$

где  $\varphi: U_{v_x^n} \rightarrow \mathfrak{R}^{(n+1)m}$ ,  $\varphi(v_x^n) = (x, \dot{x}, \dots, x) \in \mathfrak{R}^{(n+1)m}$  – координатный гомеоморфизм;

$(U_{v_x^n}, \varphi)$  – локальная карта  $v_x^n \in T^n X_m$ ;

$L(x, \dot{x}, \dots, x)$  – локальная запись функции  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  в системе координат  $x$ :  
 $L(x, \dot{x}, \dots, x) = L(\phi^{-1}(r_m^{n+1})), r_m^{n+1} \in \mathfrak{R}^{(n+1)m}$  [9].

**Лемма 1.** Определение невырожденной функции  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  в точке  $v_x^n \in T^n X_m$  корректно, то есть инвариантно относительно выбора локальной системы координат  $x$ , базы  $X_m$  расслоения  $T^n X_m$  [9].

*Замечание.* По теореме о неявной функции, гладкая функция  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ , невырожденная в точке  $v_x^n \in T^n X_m$ , является невырожденной в некоторой окрестности  $U_{v_x^n}$ .

**Определение 2.** Гладкая функция  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  называется невырожденной, если она не вырождена в каждой точке  $v_x^n \in T^n X_m$ . Невырожденную функцию  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  будем называть также слабо невырожденной функцией [2].

**Определение 3.** Гладкая функция  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ , невырожденная в точке  $v_x^n \in T^n X_m$ , называется локально невырожденной функцией Лагранжа (лагранжианом) в расслоении скоростей порядка  $n$ . Гладкая функция  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ , невырожденная в каждой точке  $v_x^n \in T^n X_m$ , называется глобально невырожденной функцией Лагранжа в расслоении скоростей порядка  $n$ .

Отображение  $F_L(x): T^{2n-1} X_m \rightarrow T^{2n-1} X_m$  (индуцированное лагранжианом  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ ) в локальных координатах  $x$  в базе  $X_m$  расслоения  $T^{2n-1} X_m$  задается функцией вида

$$F_L(x): (x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(2n-1)i}) \rightarrow (x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)i}, p_n^i, p_{n-1}^i, \dots, p_1^i), i = \overline{1, m},$$

где  $x^{(k)i} = D_t^k x^i$ ,  $D_t^k$  – оператор  $k$ -кратного полного дифференцирования по переменной  $t$ ;

$$p_k^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)i}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right)^{(n)}, k = \overline{1, n}, i = \overline{1, m}$$
 – обобщенный импульс порядка  $k$  по переменной  $x_i$  в преобразовании  $F_L(x)$ .

Запишем подробно в локальных координатах  $x$  в базе  $X_m$  расслоения  $T^n X_m$  обобщенный импульс

$$\begin{aligned} p_1^i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - D_t \left( \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^i} \right) + \dots + (-1)^{n-1} D_t^{n-1} \left( \frac{\partial L}{\partial x^{(n)i}} \right), \\ p_2^i &= \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^i} - D_t \left( \frac{\partial L}{\partial x^{(n)i}} \right) + \dots + (-1)^{n-2} D_t^{n-2} \left( \frac{\partial L}{\partial x^{(n)i}} \right), \\ &\dots \\ p_n^i &= \frac{\partial L}{\partial x^{(n)i}}. \end{aligned}$$

Согласно [12], имеет место следующая теорема.

**Теорема 1** (закон преобразования импульсов при замене системы координат в базе  $X_m$  расслоения  $T^{2n-1}X_m$ ).

При замене координат  $\bar{x} \rightarrow x(\bar{x})$  в базе многообразия  $X_m$  расслоения  $T^{2n-1}X_m$  обобщенные импульсы  $k$ -порядка  $\bar{p}_k^i(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-k)}{x})$ ,  $i = \overline{1, m}$ , преобразуются как тензоры типа  $(0, 1)$  (ковекторы):

$$\bar{p}_k^i(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{j=1}^n p_k^j(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_k^j(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}, \quad k = \overline{1, n}, i, j = \overline{1, m}.$$

Тензорный закон преобразования обобщенных импульсов позволяет называть функции  $p_k^i(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-k)}{x})$ ,  $i = \overline{1, m}$ , тензором импульса  $k$ -го порядка,  $k = \overline{1, n}$ , в расслоении скоростей  $T^{2n-1}X_m$  [12].

Именно этот результат позволяет корректно определить преобразование Остроградского  $F_L : T^{2n-1}X_m \rightarrow T^{2n-1}X_m$ , индуцированное отображением  $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ , при условии невырожденности  $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ .

**Определение 4.** Функция

$$\begin{aligned} H(\bar{p}, \bar{q}) &= -L(\bar{x}(\bar{p}, \bar{q}), \dot{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q}), \ddot{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q}), \dots, \overset{(n)}{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q})) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_k^i \overset{(k)i}{x}(\bar{p}, \bar{q}) = \\ &= -L(\bar{x}(\bar{p}, \bar{q}), \dot{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q}), \ddot{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q}), \dots, \overset{(n)}{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q})) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_k^i D_t^k x^i(\bar{p}, \bar{q}) \end{aligned}$$

называется гамильтонианом (функцией Гамильтона) преобразования  $F_L : T^{2n-1}X_m \rightarrow T^{2n-1}X_m$  для функции Лагранжа  $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  или энергией системы, состояние которой описывается уравнениями Эйлера – Лагранжа

$$\sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dots, \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}} \right) = 0.$$

**Математическая постановка задачи.** Пусть  $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  – невырожденная функция в точке  $v_x^n \in T^n X_m$ . Является ли система уравнений Эйлера – Лагранжа  $\sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dots, \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}} \right) = 0$  порядка  $n$  локально эквивалентной системе уравнений Гамильтона:

$$\begin{cases} D_t(q_k^i) = q_k^i = \frac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial p_k^i}, \\ D_t(p_k^i) = p_k^i = -\frac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial q_k^i}, \end{cases} \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n} \text{ (система } 2mn \text{ уравнений),}$$

где  $\bar{p} = \bar{p} = (p_1^{j_1}, p_2^{j_2}, \dots, p_n^{j_n}) = (p_1^1 p_1^2 \dots p_1^m, p_2^1 p_2^2 \dots p_2^m, \dots, p_n^1, \dots, p_n^m) = (p_{l_1}^{j_1})$ ,  $j_l = \overline{1, m}$ ,  $l_1 = \overline{1, n}$ .

**Теорема 2** (дифференциальная связь импульсов  $k$ -го и  $(k - 1)$ -го порядков). Пусть  $L : T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  – невырожденная функция Лагранжа. Тогда для преобразования Остроградского  $F_L : T^{2n-1}X_m \rightarrow T^{2n-1}X_m$ , индуцированного функцией  $L$ , справедливо равенство

$$D_t p_k^i(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-k)}{x}) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_{k-1}^i(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-k+1)}{x}),$$

где  $p_k^i = \sum_{l_1=0}^{n-k} (-1)^{l_1} D_t^{l_1} \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l_1+k)i}{x}} \right)$  – импульс  $k$ -го порядка,  $p_{k-1}^i = \sum_{l_1=0}^{n-k+1} (-1)^{l_1} D_t^{l_1} \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l_1+k-1)i}{x}} \right)$  – импульс  $(k - 1)$ -го порядка.

Доказательство.

$$\begin{aligned} D_t p_k^i &= D_t \left( \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right) \right) = \sum_{l=0}^{n-k} D_t \left( (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right) \right) = \\ &= \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^{l+1} \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right) = (-1) \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{l+1} D_t^{l+1} \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right) = \\ &= (-1) \left( \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{l+1} D_t^{l+1} \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l+1+k-1)i}} \right) \right). \end{aligned}$$

Увеличим индекс  $l$  на единицу:  $l_1 = l + 1$ . Поскольку  $l = \overline{0, n-k}$ , то  $l_1 = \overline{1, n-k+1}$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned} D_t p_k^i &= (-1) \left( \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{l+1} D_t^{l+1} \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l+1+k-1)i}} \right) \right) = \\ &= (-1) \left( \sum_{l_1=1}^{n-k+1} (-1)^{l_1} D_t^{l_1} \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l_1+k-1)i}} \right) \right) = (-1) \left( \sum_{l_1=1}^{n-(k-1)} (-1)^{l_1} D_t^{l_1} \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l_1+k-1)i}} \right) \right) = \\ &= (-1) \left( \sum_{l_1=1}^{n-(k-1)} (-1)^{l_1} D_t^{l_1} \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l_1+(k-1))i}} \right) \right) = \\ &= (-1) \left( \sum_{l_1=0}^{n-(k-1)} (-1)^{l_1} D_t^{l_1} \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l_1+(k-1))i}} \right) - (-1)^0 D_t^0 \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(0+(k-1))i}} \right) \right) = \\ &= (-1) \left( p_{k-1}^i - \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}} \right) = -p_{k-1}^i + \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}}. \end{aligned}$$

Используя определение импульса  $k$ -го порядка  $p_k^i = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right)$ , получим формулу

импульса  $(k-1)$ -го порядка:  $p_{k-1}^i = \sum_{l=0}^{n-k+1} (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l+k-1)i}} \right)$ . Теорема 2 доказана.

**Теорема 3.** Пусть задана невырожденная функция Лагранжа  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ . Тогда преобразование Остроградского  $F_L: T^{2n-1} X_m \rightarrow T^{2n-1} X_m$ , индуцированное  $L$ , также является невырожденным [9].

**Замечание 1.** Слоевые координаты вектора  $x = D_t^k x_i$   $i = \overline{1, m}$  в  $T^{2n-1} X_m$  могут быть названы по аналогии с физическими величинами координатами вектора скорости  $k$ -го порядка,  $k = \overline{1, 2n-1}$ , а оператор  $D_t^k$  – оператор  $k$ -кратного полного дифференцирования по времени  $t$ .

**Замечание 2.** Функционал в уравнении Эйлера – Лагранжа может быть интерпретирован как импульс нулевого порядка  $p_0^i(x, \dot{x}, \dots, x) = \sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(l)i}} \right)$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Тогда вектор импульса  $n$ -го

порядка имеет вид  $p_n^i(x, \dot{x}, \dots, x) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(n)i}}$ .

**Определение 5.** Гладкая функция  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  называется сильно невырожденной в точке  $v_x^n \in T^n X_m$ , если в некоторой системе координат  $x$  базы  $X_m$  расслоения скоростей  $T^n X_m$  уравнения

$$\begin{cases} q_k^i = x^{(k-1)i}, \\ p_k^i(x, \dot{x}, \dots, x^{(2n-k)}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(l+k)i}} \right), \end{cases} \quad k = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m},$$

могут быть однозначно решены в виде

$$\begin{cases} x^i = x^i(\bar{p}, \bar{q}), \\ \dot{x}^i = \dot{x}^i(\bar{p}, \bar{q}), \\ \dots, \\ x^{(2n-1)i} = x^{(2n-1)i}(\bar{p}, \bar{q}), \end{cases} \quad l = \overline{0, 2n-1}, \quad i = \overline{1, m}.$$

**Лемма 2.** Определение сильной невырожденности функции  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  в точке  $v_x^n \in T^n X_m$  корректно, то есть инвариантно относительно выбора локальной системы координат  $x$  базы  $X_m$  расслоения  $T^n X_m$  [9].

**Лемма 3** (связь свойств невырожденности и сильной невырожденности).

1) Локально сильно невырожденная функция  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  в точке  $v_x^n \in T^n X_m$  сильно невырождена.

2) Сильно невырожденная функция  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$  в карте  $(U_{v_x^n}, \varphi)$ , где  $\varphi: U_{v_x^n} \rightarrow \mathfrak{R}^{(n+1)m}$ ,  $\varphi(v_x^n) = (x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) \in \mathfrak{R}^{(n+1)m}$  – координатный гомеоморфизм,  $v_x^n \in T^n X_m$ , является невырожденной в этой карте [12].

**Теорема 4** (обобщение теоремы Остроградского). Для невырожденных лагранжианов  $L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$

система уравнений Эйлера-Лагранжа  $\sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dots, x^{(n)})}{\partial x^{(l)i}} \right) = 0$  локально эквивалентна системе урав-

нений Гамильтона: 
$$\begin{cases} D_t(q_k^i) = q_k^i = \frac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial p_k^i}, \\ D_t(p_k^i) = p_k^i = -\frac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial q_k^i}, \end{cases} \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n} \text{ (система } 2mn \text{ уравнений),}$$

где  $p = \bar{p} = (p_1^{j_1}, p_2^{j_1}, \dots, p_n^{j_1}) = (p_1^1 p_1^2 \dots p_1^m, p_2^1 p_2^2 \dots p_2^m, \dots, p_n^1, \dots, p_n^m) = (p_{l_1}^{j_1})$ ,  $j_1 = \overline{1, m}$ ,  $l_1 = \overline{1, n}$ ;

$q = \bar{q} = (q_1^{j_2}, q_2^{j_2}, \dots, q_n^{j_2}) = (q_1^1 q_1^2 \dots q_1^m, q_2^1 q_2^2 \dots q_2^m, \dots, q_n^1, \dots, q_n^m) = (q_{l_2}^{j_2})$ ,  $j_2 = \overline{1, m}$ ,  $l_2 = \overline{1, n}$ ;

$$H(\bar{p}, \bar{q}) = -L(x(\bar{p}, \bar{q}), \dot{x}(\bar{p}, \bar{q}), x(p, q), \dots, x^{(n)}(\bar{p}, \bar{q})) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_k^i x^{(k)i}(\bar{p}, \bar{q}) = -L(x(\bar{p}, \bar{q}), \dot{x}(\bar{p}, \bar{q}), x(p, q), \dots, x^{(n)}(\bar{p}, \bar{q})) +$$

$+ \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_k^i D_t^k x^i(\bar{p}, \bar{q})$  – функция Гамильтона;

$(k)i x = D_t^k(x^i)$ ,  $D_t^k$  – оператор  $k$ -кратного полного дифференцирования по переменной  $t$ ;

$$p_k^i(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(\bar{x}, \dots, \bar{x})}{\partial x^{(l+k)i}} \right), \quad k = \overline{1, n} \quad i = \overline{1, m} \quad \text{– импульс порядка } k \text{ по } i\text{-й координате}$$

$$x = \bar{x} = (x^1, x^2, \dots, x^m).$$

Доказательство.

В случае  $n = 1$  получаем известную теорему Остроградского.

Положим  $n \geq 2$ .

Из явного вида выражений для импульсов  $k$ -го порядка  $p_k^i(x, \bar{x}, \dots, \bar{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dots, \bar{x})}{\partial x^{(l+k)i}} \right)$ ,

$k = \overline{1, n}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , следует, что  $p_k^i$  есть функции от  $x, \bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}$  и  $p_k^i = p_k^i(x, \bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$ . Здесь координаты  $x = \bar{x} = (x^1, x^2, \dots, x^m)$  не зависят от производных более высокого порядка. Из леммы 3 о локально сильной невырожденности слабо невырожденного лагранжиана (он назывался невырожденным) следует, что  $(l)j x = D_t^l x^j(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n, \dots, p_{2n-1}) = x(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n, \dots, p_{2n-1})$ ,  $l = \overline{n, 2n-1}$   $j = \overline{1, m}$ , то есть  $(l)j x$  являются функциями от  $q_1, q_2, \dots, q_n, p_n, \dots, p_{2n-1}$ ,  $q_\alpha = (q_\alpha^1, q_\alpha^2, \dots, q_\alpha^m) = (q_\alpha^i)$ ,  $\alpha = \overline{1, n}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $p_\beta = (p_\beta^1, p_\beta^2, \dots, p_\beta^m) = (p_\beta^j)$ ,  $\beta = \overline{n, 2n-1}$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Тогда имеем

$$p = \bar{p} = (p_1^{j_1}, p_2^{j_2}, \dots, p_n^{j_n}) = (p_1^1 p_1^2 \dots p_1^m, p_2^1 p_2^2 \dots p_2^m, \dots, p_n^1 p_n^2 \dots p_n^m) = (p_{l_1}^{j_1}), \quad j_1 = \overline{1, m}, \quad l_1 = \overline{1, n},$$

$$q = \bar{q} = (q_1^{j_2}, q_2^{j_2}, \dots, q_n^{j_2}) = (q_1^1 q_1^2 \dots q_1^m, q_2^1 q_2^2 \dots q_2^m, \dots, q_n^1 q_n^2 \dots q_n^m) = (q_{l_2}^{j_2}), \quad j_2 = \overline{1, m}, \quad l_2 = \overline{1, n},$$

$$H(p, q) = -L(\bar{x}(p, q), \bar{x}(p, q), \bar{x}(p, q), \dots, \bar{x}(p, q)) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_k^i x^{(k)i}(\bar{p}, \bar{q}) = -L(\bar{x}(p, q), \bar{x}(p, q), \bar{x}(p, q), \dots, \bar{x}(p, q)) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_k^i D_t^k x^i(\bar{p}, \bar{q}) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^m p_k^i q_{i+1}^i + \sum_{s=1}^m p_n^s x^{(n)s}(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n) - L(q_1, \dots, q_n, x(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n)),$$

где  $(k)i x = q_{k+1}^i$ ,  $k_1 = 0, n-1$ , то есть  $(0)i x = x = q_1^i$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $(k)i x = q_{k+1}^i$ ,  $k = \overline{1, n-1}$ ,  $(n)i x = x(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n)$ ,  $k = \overline{1, n-1}$ .

Для  $1 \leq k \leq n-1$  продифференцируем функцию  $H(\bar{p}, \bar{q})$  по  $p_k^i$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial p_k^i} &= \frac{\partial}{\partial p_k^i} \left( \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{i=1}^m p_l^i q_{l+1}^i + \sum_{s=1}^m p_n^s x^{(n)s}(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n) - L(q_1, \dots, q_n, x(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n)) \right) = \\ &= \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial p_l^i}{\partial p_k^i} q_{l+1}^i + p_l^i \frac{\partial q_{l+1}^i}{\partial p_k^i} \right) + \frac{\partial}{\partial p_k^i} \left( \sum_{s=1}^m p_n^s x^{(n)s}(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n) - L(q_1, \dots, q_n, x(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n)) \right) = \\ &= \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial p_l^i}{\partial p_k^i} q_{l+1}^i + p_l^i \frac{\partial q_{l+1}^i}{\partial p_k^i} \right) + \frac{\partial}{\partial p_k^i} \left( \sum_{s=1}^m p_n^s x^{(n)s}(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n) - L(q_1, \dots, q_n, x(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n)) \right) = \\ &= \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial p_l^i}{\partial p_k^i} q_{l+1}^i \right) + \sum_{s=1}^m p_n^s \frac{\partial x^{(n)s}(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n)}{\partial p_k^i} - \frac{\partial}{\partial p_k^i} L(q_1, \dots, q_n, x(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{i=1}^m (\delta_k^l q_{i+1}^i) + \sum_{s=1}^m p_n^s \frac{\partial^{(n)s} x(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n)}{\partial p_k^i} - \frac{\partial}{\partial p_k^i} L(q_1, \dots, q_n, x(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n)) = \\
 &= q_{k+1}^i + \sum_{s=1}^m p_n^s \frac{\partial^{(n)s} x(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n)}{\partial p_k^i} - \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(q_1, \dots, q_n, x(q_1, \dots, q_n, p_n))}{\partial x^{(n)s}} \frac{\partial x^{(n)s}}{\partial p_k^i} = \\
 &= x + \sum_{s=1}^m p_n^s \frac{\partial^{(n)s} x(q_1, q_2, \dots, q_n, p_n)}{\partial p_k^i} - \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(q_1, \dots, q_n, x(q_1, \dots, q_n, p_n))}{\partial x^{(n)s}} \frac{\partial x^{(n)s}}{\partial p_k^i},
 \end{aligned}$$

где  $(p_n^s - \frac{\partial L}{\partial x^{(n)s}}) \frac{\partial x^{(n)s}}{\partial p_n^i} + x = x = D_t^{(k)i} x = D_t^{(k-1)i} x = D_t^i q_k^i = \dot{q}_k^i$ ,  $\delta_k^l = \begin{cases} 1, l = k \\ 0, l \neq k \end{cases}$  – символ Кронекера.

Поскольку  $x = q_{k+1}^i$ ,  $k = \overline{1, n-1}$ ,  $x = D_t^{(k-1)i} q_k^i$ ,  $p_n^s = \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(n)s}}$ ,  $s = \overline{1, m}$ ,  $x(q, p_n) = x(q_1, \dots, q_n, p_n)$ ,

то для  $k = n$  получим

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial p_n^i} &= x + \sum_{s=1}^m p_n^s \frac{\partial^{(n)s} x(q_1, \dots, q_n, p_n)}{\partial p_n^i} - \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(q_1, \dots, q_n, x(q_1, \dots, q_n, p_n))}{\partial x^{(n)s}} \frac{\partial x^{(n)s}}{\partial p_n^i} = \\
 &= x + \sum_{s=1}^m \frac{\partial x^{(n)s}}{\partial p_n^i} (q_1, \dots, q_n, p_n) (p_n^s - \frac{\partial L(q_1, \dots, q_n, x(q_1, \dots, q_n, p_n))}{\partial x^{(n)s}}) = \\
 &= x = D_t^{(n)i} x = D_t^{(n-1)i} x = D_t^i q_n^i = \dot{q}_n^i.
 \end{aligned}$$

Для  $n \geq k \geq 2$  продифференцируем функцию  $H(\bar{p}, \bar{q})$  по  $q_k^i$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial q_k^i} &= p_{k-1}^i + p_n^s \frac{\partial^{(n)s} x(q_1, \dots, q_n, p_n)}{\partial q_k^i} - \frac{\partial L(q_1, \dots, q_n, x(q_1, \dots, q_n, p_n))}{\partial q_k^i} - \frac{\partial L(q_1, \dots, q_n, x(q_1, \dots, q_n, p_n))}{\partial x^{(n)s}} \frac{\partial x^{(n)s}}{\partial q_k^i} = \\
 &= p_{k-1}^i + \sum_{s=1}^m (p_n^s - \frac{\partial L(q_1, \dots, q_n, x(q_1, \dots, q_n, p_n))}{\partial x^{(n)s}}) \frac{\partial x^{(n)s}}{\partial q_k^i} - \frac{\partial L}{\partial q_k^i} = \\
 &= p_{k-1}^i - \frac{\partial L(q_1, \dots, q_n, x(q_1, \dots, q_n, p_n))}{\partial q_k^i} = -D_t^i p_k^i = -\dot{p}_k^i.
 \end{aligned}$$

Поскольку верно равенство  $p_n^s - \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(n)s}} = 0$  (по определению импульса  $n$ -го порядка) и на основании ранее доказанной теоремы о дифференциальной связи импульсов  $k$ -го и  $(k-1)$ -го порядков

$$D_t p_k^i(x, x, \dots, x) = \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}} - p_{k-1}^i(x, x, \dots, x) \text{ заключаем, что}$$

$$p_{k-1}^i - \frac{\partial L(q_1, \dots, q_n, x(q_1, \dots, q_n, p_n))}{\partial q_k^i} = -D_t p_k^i = -\dot{p}_k^i.$$

Утверждение теоремы для случая  $n \geq k \geq 2$  доказано.

Рассмотрим случай  $k = 1$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial q_1^i} &= \sum_{s=1}^m p_n^s \frac{\partial^{(n)s} x(q_1, \dots, q_n, p_n)}{\partial q_1^i} - \frac{\partial L(q_1, \dots, q_n, x(q_1, \dots, q_n, p_n))}{\partial q_1^i} - \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(n)s}} \frac{\partial x^{(n)s}}{\partial q_1^i} = \\
 &= \sum_{s=1}^m (p_n^s - \frac{\partial L}{\partial x^{(n)s}}) \frac{\partial x^{(n)s}}{\partial q_1^i} - \frac{\partial L}{\partial q_1^i} = -\frac{\partial L}{\partial q_1^i} = -D_t p_1^i = -\dot{p}_1^i = p_0^i - \frac{\partial L}{\partial q_1^i} = 0 - \frac{\partial L}{\partial q_1^i} = -\frac{\partial L}{\partial q_1^i}.
 \end{aligned}$$

При  $k = 1$  из **теоремы 2** о дифференциальной связи импульсов  $k$ -го и  $(k - 1)$ -го порядков  $-D_t p_k^i = -\dot{p}_k^i = p_{k-1}^i - \frac{\partial L(q_1, \dots, q_n, x(q_1, \dots, q_n, p_n))}{\partial q_k^i}$  следует, что

$$-D_t p_1^i = -\dot{p}_1^i = p_0^i - \frac{\partial L(q_1, \dots, q_n, x(q_1, \dots, q_n, p_n))}{\partial q_1^i} \text{ и } p_0^i = \sum_{L=0}^N (-1)^L D_t^L \left( \frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0.$$

Поскольку  $p_n^s = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x}$ , то есть  $p_n^s - \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x} = 0$ , тогда равенство  $-p_k^i = p_{k-1}^i - \frac{\partial L}{\partial q_k^i}$  есть следствие теоремы о дифференциальной связи импульсов  $k$ -го и  $(k - 1)$ -го порядков:

$$D_t p_k^i(x, \dot{x}, \dots, x) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}} - p_{k-1}^i(x, \dot{x}, \dots, x) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial q_k^i} - p_{k-1}^i(x, \dot{x}, \dots, x),$$

где  $q_k^i = x^{(k-1)i}$ ,  $k = 1, n$ .  
Теорема доказана.

**Следствие** (теорема Остроградского). Пусть  $L(x, \dot{x})$  – сильно невырожденный лагранжиан и  $H(x, p)$  – гамильтониан,  $p = \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}}$ , где  $\dot{x} = v(x, p)$ . Тогда уравнение Эйлера – Лагранжа  $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0$  эквивалентно уравнениям Гамильтона  $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ ,  $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}$  в фазовом пространстве  $(x, p)$ .

**Выводы.**

1. Получен явный вид производной по времени импульсов  $p_k^i$ :

$$D_t p_k^i(x, \dot{x}, \dots, x) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}} - p_{k-1}^i(x, \dot{x}, \dots, x) = \frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, x)}{\partial q_k^i} - p_{k-1}^i(x, \dot{x}, \dots, x), \quad k = 1, n$$

2. Доказано обобщение теоремы Остроградского на случай невырожденной системы уравнений Эйлера – Лагранжа  $\sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l)i}} \right) = 0$  произвольного порядка: невырожденная система

уравнений  $\sum_{l=0}^n (-1)^l D_t^l \left( \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l)i}} \right) = 0$  локально эквивалентна системе уравнений Гамильтона:

$$\begin{cases} D_t(q_k^i) = \dot{q}_k^i = \frac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial p_k^i}, \\ D_t(p_k^i) = \dot{p}_k^i = -\frac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial q_k^i}, \end{cases} \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n} \text{ (система } 2mn \text{ уравнений),}$$

где  $H(\bar{p}, \bar{q}) = -L(\bar{x}(\bar{p}, \bar{q}), \bar{x}(\bar{p}, \bar{q}), \bar{x}(\bar{p}, \bar{q}), \dots, \bar{x}(\bar{p}, \bar{q})) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_k^i x^{(k)i}(\bar{p}, \bar{q}) = -L(\bar{x}(\bar{p}, \bar{q}), \bar{x}(\bar{p}, \bar{q}), \bar{x}(\bar{p}, \bar{q}), \dots, \bar{x}(\bar{p}, \bar{q})) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m p_k^i D_t^k x^i(\bar{p}, \bar{q})$  – функция Гамильтона.



ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин, В. А. Современная геометрия. Методы и приложения / В. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко // М. : Наука, 1986. – 760 с.
2. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Итоги науки и техники / Л. Е. Евтушик [et al.] // М. : ВИНТИ, 1979. – 247 с.
3. Погорелов, А. В. Дифференциальная геометрия / А. В. Погорелов // М. : Наука, 1974, – 90 с.
4. Арнольд, В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд // М.: Наука, 1974. – 472 с.
5. Годбийон, К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика / К. Годбийон // М. : Мир, 1973. – 188 с.
6. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : учеб. пособие : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 4-е изд., испр. – М. : Физ.-мат. лит., 1988. – Т.1. Механика. – 216 с.
7. Дирак, П. Принципы квантовой механики / П. Дирак // М. : Мир, 1979.
8. Дирак, П. Лекции по квантовой механики / П. Дирак // М. : Мир, 1968.
9. Пастухов, Ю. Ф. Исследование решения обратной вариационной задачи : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.04 / Ю. Ф. Пастухов. – М., 1996. – 88 с.
10. Трофимов, В. В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко // М. : Наука, 1974. – 453 с.
11. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу // М.: Наука, 1981.
12. Пастухов, Ю.Ф. Инварианты в расслоении скоростей произвольного порядка / Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов, О. В. Голубева // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. Фундаментальные науки. – 2010. – № 12. – С. 17–23.

Поступила 20.09.2016

THE GENERALIZATION OF THEOREM OF HAMILTON- OSTROGRADSKY SPECIAL IN BUNDLES OF SPEEDS OF ARBITRARY ORDER

S. EHILEVSKY, O. GOLUBEVA, D. PASTUHOV, Y. PASTUHOV

In the work the invariant properties of Ostrogradskii transformation  $F_L(x): T^{2n-1}X_m \rightarrow T^{2n-1}X_m$  are investigated in the bundle of speeds of arbitrary odd order  $T^{2n-1}X_m$ , induced non-degenerate Lagrangian

$L: T^n X_m \rightarrow \mathfrak{R}$ . Explicitly obtained derivative pulses  $k$ -th order:

$$D_i p_k^i(x, x, \dots, x) = \frac{\partial L(x, x, \dots, x)}{\partial x^{(k-1)i}} - p_{k-1}^i(x, x, \dots, x), \quad p_k^i(x, x, \dots, x) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_i^l \left( \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l+k)i}} \right),$$

$k = \overline{1, n}, i = \overline{1, m}$  – impulse the  $k$ -th order in the  $i$ -th coordinate. Ostrogradskii theorem generalizes to the case of

a non-degenerate system of Euler-Lagrange equations of arbitrary order  $\sum_{l=0}^n (-1)^l D_i^l \left( \frac{\partial L(x, \dots, x)}{\partial x^{(l)i}} \right) = 0$ , which is

locally equivalent to the canonical system of Hamilton equations.

**Keywords:** Euler-Lagrange equation, smooth manifolds, separation velocity space, the energy and momentum of the system, Ostrogradskii transformation, nondegenerate function, Ostrogradskii theorem, the Hamilton system.