УДК 517.983

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ВЫРОЖДЕННОЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ КУММЕРА И НОРМИРОВАННОЙ ФУНКЦИЕЙ БЕССЕЛЯ В ЯДРАХ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА В ПРОСТРАНСТВЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

канд. физ.-мат. наук, доц. О.В. СКОРОМНИК
(Полоцкий государственный университет)

Рассматриваются три интегральных преобразования с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера и нормированной функцией Бесселя в ядрах в пространствах p-суммируемых функций на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси. В работе даются условия ограниченности, описание образов этих операторов, а также устанавливаются формулы обращения. Рассматриваются также три соответствующих интегральных уравнения первого рода с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера и нормированной функцией Бесселя в ядрах. Устанавливаются формулы решения исследуемых уравнений в замкнутой форме, даются условия их разрешимости в пространстве интегрируемых функций. Доказанные утверждения обобщают результаты, хорошо известные ранее для соответствующих интегральных уравнений первого рода.

Ключевые слова: *интегральные преобразования, интегральные уравнения, вырожденная гипергеометрическая функция, нормированная функция Бесселя, дробные интегралы и производные, пространство интегрируемых функций.*

Введение. Рассмотрим интегральные преобразования в левых частях (1.1)–(1.3)

$$\left(I_{a+;\sigma}^{\alpha,\beta,\lambda} f\right)(x) \equiv \int_a^x \frac{\left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} {}_1F_1\left(\beta;\alpha;\lambda(x^\sigma - t^\sigma)\right)\sigma t^{\sigma-1} f(t)dt = g(x),\ \ x > a\,; \tag{1.1}$$

$$\left(A_{a+;\sigma}^{\alpha,\lambda} f\right)(x) \equiv \int_a^x \frac{\left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \bar{J}_{(\alpha-1)/2}\left(\lambda(x^\sigma - t^\sigma)\right)\sigma t^{\sigma-1} f(t)dt = g(x),\ \ x > a\,; \tag{1.2}$$

$$\left(B_{a+;\sigma}^{\alpha,\lambda} f\right)(x) \equiv \int_a^x \frac{\left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \bar{J}_{\alpha/2-1}\left(\lambda(x^\sigma - t^\sigma)\right)\sigma t^{\sigma-1} f(t)dt = g(x),\ \ x > a, \tag{1.3}$$

с действительными параметрами $\sigma > 0,\ \lambda > 0,\ 0 < \alpha < 1,\ \beta$, содержащие вырожденную гипергеометрическую функцию Куммера ${}_1F_1(a;c;z)$ и нормированную функцию Бесселя $\bar{J}_\nu(z)$ в ядрах. Вырожденная гипергеометрическая функция Куммера определяется по формуле [1, §1], [2, § 1.6]

$${}_1F_1(a;c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!} = \lim_{b\to\infty} {}_2F_1\left(a,b;c;\frac{z}{b}\right),\ \ |z| < \infty\,, \tag{1.4}$$

здесь $(a)_k$ – символ Похгаммера: $(a)_0 \equiv 1$, $(a)_k = a(a+1)...(a+k-1)$ $(a\in C;\ k\in N)$;

${}_2F_1(a,b;c;z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, определяемая при комплексных $a,b,c\in C$ и $|z|<1$ гипергеометрическим рядом

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!}$$

с соответствующим аналитическим продолжением

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt$$

для $z\in C,\ 0<\operatorname{Re}b<\operatorname{Re}c,\ (|\arg(1-z)|<\pi,\ z\neq 1)$ [3, 2.1(2) и 2.1.(10)];

$\bar{J}_\nu(z)$ – нормированная функция Бесселя определяется по формуле [1, § 37.1]:

$$\bar{J}_\nu(z) = \bar{I}_\nu(iz) = \Gamma(\nu+1)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} J_\nu(z)\,,\ |z| < \infty\,, \tag{1.5}$$

где $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода [1, §1.3; 4]:

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(\nu+k+1)k!}\,. \tag{1.6}$$

Будем считать, что $a > -\infty$ и преобразования в левых частях (1.1)–(1.3) рассматриваются на конечном отрезке $[a,b]$.

Конструкции вида (1.1)–(1.3) обобщают соответствующие интегральные преобразования в [1, § 37.1] при $\sigma = 1$.

В работе интегральные преобразования (1.1)–(1.3) изучаются в пространствах p-суммируемых функций на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси. Даются условия ограниченности операторов преобразований в левых частях (1.1)–(1.3), описание образов этих операторов, а также устанавливаются формулы их обращения. Рассматриваются также три соответствующих интегральных уравнения первого рода с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера и нормированной функцией Бесселя в ядрах. Устанавливаются формулы решения исследуемых уравнений в замкнутой форме, даются условия их разрешимости в пространстве интегрируемых функций. Доказанные утверждения обобщают результаты, полученные ранее для соответствующих интегральных уравнений первого рода [1, § 37.1].

Предварительные сведения.

Интегралы

$$\left(\mathrm{I}_{a+}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt,\ \ x > a,\ \ \mathrm{Re}(\alpha) > 0,$$
$$\left(\mathrm{I}_{b-}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt,\ \ x < b,\ \ \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \tag{2.1}$$

называются интегралами Римана – Лиувилля дробного порядка α [1].

Первый из них называют левосторонним, а второй – правосторонним. Операторы I_{a+}^{α}, I_{b-}^{α} называют операторами дробного интегрирования.

Каждое из выражений

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\,,\quad x > a,\ n = [\mathrm{Re}(\alpha)]+1,$$
$$\left(D_{b-}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_x^b \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\,,\quad x < b,\ n = [\mathrm{Re}(\alpha)]+1, \tag{2.2}$$

называется дробной производной порядка $\alpha \in C, \mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$, соответственно левосторонней и правосторонней. Дробный интеграл порядка $\alpha \in C,\ \mathrm{Re}(\alpha) > 0$, функции $\varphi(x)$ по функции $g(x)$ определяется формулой [1, § 18.2]

$$\left(\mathrm{I}_{a+;g}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{\left(g(x)-g(t)\right)^{1-\alpha}} g'(t)dt\,,\quad x > a\,.$$

В частности, дробный интеграл порядка $\alpha \in C,\ \mathrm{Re}(\alpha) > 0$, функции $\varphi(x)$ по функции x^{σ} $(x > a, \sigma \in R)$ выражается формулой

$$\left(\mathrm{I}_{a+;x^{\sigma}}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{t^{\sigma-1}\varphi(t)}{\left(x^{\sigma}-t^{\sigma}\right)^{1-\alpha}}dt\,,\ x > a\,, \tag{2.3}$$

а соответствующая дробная производная порядка $\alpha\,(\mathrm{Re}(\alpha)\geq 0)$ функции $\varphi(x)$ по функции x^{σ} $(x>a,\,\sigma\in R)$ имеет вид

$$\left(D^{\alpha}_{a+;x^{\sigma}}f\right)(x)=\left(\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1}dx}\right)^{n}\left(\mathrm{I}^{n-\alpha}_{a+;x^{\sigma}}f\right)(x),\ x>a,\,n=\mathrm{Re}[n]+1. \tag{2.4}$$

Мы будем использовать для (2.3) и (2.4) следующие обозначения:

$$\mathrm{I}^{\alpha}_{a+;x^{\sigma}}\varphi=\begin{cases}\mathrm{I}^{\alpha}_{a+;x^{\sigma}}\varphi, & \mathrm{Re}\,\alpha>0,\\ D^{-\alpha}_{a+;x^{\sigma}}\varphi, & \mathrm{Re}\,\alpha\leq 0.\end{cases}$$

В работе преобразования (1.1)–(1.3) изучаются в пространствах $L_p=L_p(\Omega)$ [1, § 1.2], измеримых на $\Omega=[a,b],-\infty<a<b<\infty$, функций $f(x)$, вообще говоря, комплекснозначных, для которых $\int\limits_{\Omega}|f(x)|^p\,dx<\infty$, где $1\leq p<\infty$, с нормой $\|f\|_{L_p(\Omega)}=\left(\int\limits_{\Omega}|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

Функция $f(x)$ называется абсолютно непрерывной на отрезке Ω, если по любому $\varepsilon>0$ можно найти такое $\delta>0$, что для любой конечной системы попарно непересекающихся отрезков $[a_k,b_k]\subset\Omega,\ k=1,2,...,n,$ такой, что $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$, справедливо неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$. Класс всех таких функций обозначается $AC(\Omega)$ [1, § 1.1]. Известно, что пространство $AC([a,b])$ абсолютно непрерывных функций совпадает с классом первообразных от суммируемых по Лебегу функций [7, с. 338; 8, с. 368–369]:

$$g(x)\in AC([a,b])\Leftrightarrow g(x)=c+\int\limits_a^x f(t)dt,\ \int\limits_a^b|f(t)|\,dt<\infty,$$

поэтому абсолютно непрерывные функции имеют почти всюду суммируемую производную $g'(x)$.

Через $\mathrm{I}^{\alpha}_{a+}(L_p(a,b))$, $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, обозначим класс функций $g(x)$, представимых левосторонним дробным интегралом (2.1) порядка α от суммируемой функции $g=\mathrm{I}^{\alpha}_{a+}f,\ f\in L_p(a,b), 1\leq p<\infty$ [1, § 2.6].

Через $\mathrm{I}^{\alpha}_{a+;x^{\sigma}}(L_p(a,b))$, $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, обозначим класс функций $g(x)$, представимых левосторонним дробным интегралом порядка α функции $f(x)$ по функции x^{σ} $(x>a,\,\sigma\in R)$ (2.3) от суммируемой функции $f(x)$: $g=\mathrm{I}^{\alpha}_{a+;x^{\sigma}}f,\ f\in L_p(a,b), 1\leq p<\infty$.

Пусть $\alpha_1,...,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ – комплексные числа такие, что существует одно α_j, для которого $\mathrm{Re}\,\alpha_j=\min(\mathrm{Re}\,\alpha_1,...,\mathrm{Re}\,\alpha_n,\mathrm{Re}\,\alpha_{n+1})$. Тогда положим $\alpha_{n+1}=0$ и введем функцию [1, § 10]

$$m(\alpha_1,...,\alpha_n)=\begin{cases}0, \quad \mathrm{Re}\,\alpha_j>0,\, i=1,2,...,n.\\ -\alpha_j,\ \text{если существует}\ \alpha_j,\ \text{для которого}\\ \mathrm{Re}\,\alpha_j<\min\left(0,\mathrm{Re}\,\alpha_1,...,\mathrm{Re}\,\alpha_{j-1},\mathrm{Re}\,\alpha_{j+1},...,\mathrm{Re}\,\alpha_n\right)\end{cases}$$

(если существуют α_j,α_k такие, что $\alpha_j\neq\alpha_k$, но $\mathrm{Re}\,\alpha_j=\mathrm{Re}\,\alpha_k=\min(0,\mathrm{Re}\,\alpha_1,...,\ \mathrm{Re}\,\alpha_n)$, то функция $m(\alpha_1,...,\alpha_n)$ не определяется) и пространство

$$\mathrm{I}^{m(\alpha)}_{a+}(L_p(a,b))=\begin{cases}L_p(a,b), & \mathrm{Re}\,\alpha>0,\\ \mathrm{I}^{-\alpha}_{a+}(L_p(a,b)), & \mathrm{Re}\,\alpha<0,\end{cases}\quad -\infty<a<b<+\infty.$$

Введем также некоторые функциональные пространства. $C^m([a,b])$ означает класс функций, m раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ с нормой $\|f\|_{C^m} = \max\limits_{x\in\Omega} \sum\limits_{k=1}^{m} \left| f^{(k)}(x) \right|$, $m = 0,1,...,$ $\|f\|_{C^0} \equiv \|f\|_C$. Через $H^\lambda([a,b])$ обозначается класс всех (вообще говоря, комплекснозначных) функций, удовлетворяющих на отрезке $[a,b]$ условию Гельдера фиксированного порядка λ: $\left| f(x_1) - f(x_2) \right| \le A\left| x_1 - x_2 \right|^\lambda$ для всех x_1, $x_2 \in [a,b]$, где A – постоянная.

Теорема 1 [1, теорема 37.1]**.** Операторы в левых частях (1.1)–(1.3) при $\sigma = 1$ ограниченно действуют из пространства $L_p(a,b)$, $p \ge 1$, на пространство $I_{a+}^{\alpha}\left(L_p(a,b) \right) \subset L_p(a,b)$, $-\infty < a < b < \infty$.

Теорема 2 [1, теорема 18.1]**.** Класс функций, представимых дробным интегралом $I_{a+;g}^{\alpha}\varphi$, $0 < \alpha < 1$, от функции из $\varphi \in L_p(a,b)$, $1 \le p < \infty$, $-\infty < a < b < \infty$, не зависит от выбора функции $g(x)$:

$$I_{a+;g}^{\alpha}\left(L_p \right) = I_{a+}^{\alpha}\left(L_p \right),$$

если $g(x) \in C^1([a,b])$, $g'(x) \in H^\lambda([a,b])$ и имеет место $g'(x) \ne 0$, $a \le x \le b$. При этом $I_{a+;g}^{\alpha}\varphi = I_{a+}^{\alpha}\psi$,

$$\psi(x) = [g'(x)]^\alpha \varphi(x) + \int\limits_a^x \frac{\partial \Phi(x,s)}{\partial x} \varphi(s)ds \in L_p, \qquad \text{где} \qquad \Phi(x,s) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} g'(x) \int\limits_s^x (x-u)^{-\alpha}(u-s)^{\alpha-1} h(s,u)du,$$

$$h(s,u) = \left[\frac{u-s}{g(u)-g(s)} \right]^{1-\alpha} = \left[\int\limits_s^x g'(u+(s-u)\xi)d\xi \right]^{\alpha-1}.$$

Преобразование Лапласа функции $f(x)$ $(x > 0)$ определяется формулой [1, формула (1.119)]

$$Lf = \left(L\ f \right)(s) = L\left\{ f(t); s \right\} = \int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)dt. \tag{2.5}$$

При $\mathrm{Re}(b) > 0$, $\mathrm{Re}(s) > \max\left(0, \mathrm{Re}\, k\right)$, $|s| > k$, имеет место формула [3, формула 6.10(5)]

$$L\left\{ t^{b-1} {}_1F_1(a,c;kt); s \right\} = \Gamma(b)s^{-b} {}_2F_1(a,b;c;ks^{-1}) = \Gamma(b)(s-k)^{-b} {}_2F_1\left(c-a, b; c; \frac{k}{k-s} \right), \quad |s-k| > |k|. \tag{2.6}$$

Обобщенное преобразование Лапласа функции $f(x)$ $(x > 0)$ определяется формулой [5, формулы (2.5.26), (3.3.3)]

$$\left(L_{k,\alpha} f \right)(s) = \int\limits_0^\infty (st)^{-\alpha} e^{-|k|(st)^{1/k}} f(t)dt, \ k \in R \setminus \{0\}, \alpha \in R, s \in R_+. \tag{2.7}$$

Нам понадобятся следующие формулы [6, формула (2.12.8.3) и (2.12.8.4) для случаев $I_\nu^{\nu+1}$ и $I_\nu^{\nu+2}$]:

$$\int\limits_0^\infty e^{-px} J_\nu(cx)dx = \frac{c^\nu}{\sqrt{p^2+c^2}} \left(p + \sqrt{p^2+c^2} \right)^{-\nu}, \ \mathrm{Re}\, p > |\mathrm{Im}\, c|; \mathrm{Re}\,\nu > -1; \tag{2.8}$$

$$\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-px} J_\nu(cx)dx = \frac{(2c)^\nu}{\sqrt{\pi}} \left(p^2+c^2 \right)^{-\nu-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2} \right), \ \mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}; \tag{2.9}$$

$$\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-px} J_\nu(cx)dx = \frac{2p(2c)^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2} \right)}{\sqrt{\pi}\left(p^2+c^2 \right)^{\nu+\frac{3}{2}}}, \ \mathrm{Re}\,\nu > -1. \tag{2.10}$$

Действие операторов (1.1)–(1.3). Значения обобщенного преобразования Лапласа равенств (1.1)–(1.3)

В силу равенства $\bar{J}_\nu(0)=\bar{I}_\nu(0)=1$ получаем

$$I^{\alpha,\beta,0}_{a+;\sigma}=A^{\alpha,\,0}_{a+;\sigma}=B^{\alpha,\,0}_{a+;\sigma}=C^{\alpha,\,0}_{a+;\sigma}=I^{\alpha}_{a+;x^\sigma}\,. \tag{3.1}$$

Это позволяет операторы в левых частях (1.1)–(1.3) считать некоторыми обобщениями интегралов дробного порядка α функции $\varphi(x)$ по функции x^σ $\mathrm{I}^{\alpha}_{0+;x^\sigma}$, определяемым по формуле (2.3).

Исходя из представлений ядер указанных операторов через ряды и воспользовавшись формулой удвоения $\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$ [1, формула (1.61)], выписываем следующие формулы, отражающие структуру операторов (1.1)–(1.3):

$$I^{\alpha,\beta,\lambda}_{a+;\sigma}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\beta)_k}{k!}\lambda^k I^{\alpha+k}_{a+;x^\sigma}=I^{\alpha}_{a+;x^\sigma}\left(E-\lambda I^{1}_{a+;x^\sigma}\right)^{-\beta}, \tag{3.2}$$

$$A^{\alpha,\lambda}_{a+;\sigma}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha/2)_k}{k!}(-\lambda^2)^k I^{\alpha+2k}_{a+;x^\sigma}=I^{\alpha}_{a+;x^\sigma}\left(E+\lambda^2 I^{2}_{a+;x^\sigma}\right)^{-\alpha/2}, \tag{3.3}$$

$$B^{\alpha,\lambda}_{a+;\sigma}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(\alpha+1)}{2}\right)_k\frac{(-\lambda^2)^k}{k!}I^{\alpha+2k}_{a+;x^\sigma}=I^{\alpha}_{a+;x^\sigma}\left(E+\lambda^2 I^{2}_{a+;x^\sigma}\right)^{-(\alpha+1)/2}, \tag{3.4}$$

где E – единичный оператор.

Отмеченная в (3.1) связь с дробными интегралами (2.3) дает возможность заключить, что операторы (1.1)–(1.3) обладают в пространстве $L_p=L_p(a,b)$ таким же действием, как и оператор $\mathrm{I}^{\alpha}_{a+;x^\sigma}$. Тогда справедлива теорема.

Теорема 3. Операторы в левых частях (1.1)–(1.3) ограниченно действуют из пространства $L_p(a,b)$, $p\ge 1$, на пространство $I^{\alpha}_{a+;x^\sigma}\left(L_p(a,b)\right)$, $\sigma>0,\ \lambda>0,\ 0<\alpha<1,\ -\infty<a<b<\infty$.

Доказательство непосредственно следует из свойств ${}_1F_1(a;c;0)=\bar{J}_\nu(0)=1$, **теоремы 1** и **теоремы 2** для случая функции $g(x)=x^\sigma$, $\sigma>0$.

Если в (1.1)–(1.3) $a=0$ или $a>0$, но функция $f(t)$ доопределена нулем на интервал $0<t<a$, то применяем обобщенное преобразование Лапласа (2.7) с параметрами $k=1/\sigma, \alpha=1-\sigma$ к левым частям равенств (1.1)–(1.3), пользуясь формулами (2.6), (2.8)–(2.10), получаем соответственно

$$\left(L_{1/\sigma,\,1\text{-}\sigma}\, I^{\alpha,\beta,\lambda}_{0+;\sigma} f\right)(s)=\left(s^\sigma/\sigma\right)^{-\alpha}\left(1-\lambda\left(s^\sigma/\sigma\right)^{-1}\right)^{-\beta}\left(L_{1/\sigma,1-\sigma} f\right)(s),\quad \mathrm{Re}(\lambda)>0,\ \mathrm{Re}(s)>0; \tag{3.5}$$

$$\left(L_{1/\sigma,\,1\text{-}\sigma}\, A^{\alpha,\lambda}_{0+;\sigma} f\right)(s)=\left(\left(s^\sigma/\sigma\right)^2+\lambda^2\right)^{-\alpha/2}\left(L_{1/\sigma,1-\sigma} f\right)(s),\quad \mathrm{Re(s)}>\left|\mathrm{Im}\,\lambda\right|; \tag{3.6}$$

$$\left(L_{1/\sigma,\,1\text{-}\sigma}\, B^{\alpha,\lambda}_{0+;\sigma} f\right)(s)=\left(s^\sigma/\sigma\right)\left(\left(s^\sigma/\sigma\right)^2+\lambda^2\right)^{-(\alpha+1)/2}\left(L_{1/\sigma,1-\sigma} f\right)(s),\quad \mathrm{Re(s)}>\left|\mathrm{Im}\,\lambda\right|. \tag{3.7}$$

Сравнивая правые части формул (3.5)–(3.7) с правыми частями формул (3.2)–(3.4), замечаем, что первые три формулы получаются из (3.2)–(3.4) заменой $I^{1}_{a+;x^\sigma}$ на $\left(s^\sigma/\sigma\right)^{-1}$. Действительно, непосредственно проверяя, получаем

$$\left(L_{1/\sigma,\,1\text{-}\sigma}\, I^{\alpha}_{0+;x^\sigma} f\right)(s)=\left(s^\sigma/\sigma\right)^{-\alpha}\left(L_{1/\sigma,1-\sigma} f\right)(s),\ \mathrm{Re}(s)>0\,.$$

Рассмотрим теперь вопрос об обращении операторов преобразований (1.1)–(1.3).

Обращение операторов (1.1)–(1.3).

Как показывают формулы (3.5)–(3.7), обобщенные преобразования Лапласа $\left(L_{1/\sigma,\,1-\sigma}h\right)(s)$ ядер $h(x)$ операторов (1.1)–(1.3) и соответствующие им обратные величины $\left[\left(L_{1/\sigma,\,1-\sigma}h\right)(s)\right]^{-1}$ имеют одинаковую форму, отличаясь лишь значениями параметров. В простейшем случае оператора дробного интегрирования $I^{\alpha}_{0+;x^{\sigma}}$, которому соответствует $\left(L_{1/\sigma,\,1-\sigma}h\right)(s)=\left(s^{\sigma}/\sigma\right)^{-\alpha}$ с условием $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, для обобщенного преобразования Лапласа $\left(s^{\sigma}/\sigma\right)^{\alpha}$ ядра обратного оператора $D^{\alpha}_{0+;x^{\sigma}}$ условие $\mathrm{Re}(\alpha)>0$ вынуждает нас представить $\left(s^{\sigma}/\sigma\right)^{\alpha}$ в виде $\left(s^{\sigma}/\sigma\right)^{\alpha}=\left(s^{\sigma}/\sigma\right)^{n}\left(s^{\sigma}/\sigma\right)^{-(n-\alpha)}$, где $\mathrm{Re}(n-\alpha)>0$, причем значению $\left(s^{\sigma}/\sigma\right)^{n}$ соответствует оператор $\left(\dfrac{d}{\sigma x^{\sigma-1}dx}\right)^{n}=x^{1-\sigma}\left(\dfrac{d}{\sigma dx x^{\sigma-1}}\right)^{n}x^{\sigma-1}=D^{n}_{0+;x^{\sigma}}$ [1, равенство (18.12)]. Подобные операции необходимо осуществлять и при обращении операторов (1.1)–(1.3).

Учитывая сказанное, построим решение уравнения (1.1) $\left(I^{\alpha,\beta,\lambda}_{a+;\sigma}f\right)(x)=g(x),\ x>0$. Пользуясь формулой (3.5) и равенством ${}_1F_1(a,c;x)=e^{x}\,{}_1F_1(c-a,c;-x)$ [3, формула 6.3(7)], формально приходим к следующему представлению решения уравнения (1.1):

$$f(x)=\left\{\left(I^{\alpha,\beta,\lambda}_{a+;\sigma}\right)^{-1}g\right\}(x)=I^{-\alpha}_{a+;x^{\sigma}}\left(E-\lambda I^{1}_{a+;x^{\sigma}}\right)^{\beta}g(x)=$$
$$=\frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x\left(x^{\sigma}-t^{\sigma}\right)^{-\alpha}{}_1F_1\left(-\beta;1-\alpha;\lambda(x^{\sigma}-t^{\sigma})\right)t^{\sigma-1}g'(t)dt. \tag{4.1}$$

Аналогичным образом, исходя из (3.6), (3.7), формально выписываются следующие представления для обратных к (1.2), (1.3) операторов:

$$f(x)=\left\{\left(A^{\alpha,\,\lambda}_{a+;\sigma}\right)^{-1}g\right\}(x)=\left(A^{-\alpha,\,\lambda}_{a+;\sigma}g\right)(x)=A^{2-\alpha,\,\lambda}_{a+;\sigma}\left(I^{-2}_{a+;x^{\sigma}}+\lambda^{2}\right)g(x)=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_a^x\left(x^{\sigma}-t^{\sigma}\right)^{1-\alpha}\bar{J}_{(1-\alpha)/2}\left(\lambda(x^{\sigma}-t^{\sigma})\right)\left(\frac{d^{2}}{\sigma t^{\sigma-1}dt^{2}}+\lambda^{2}\right)g(t)dt; \tag{4.2}$$

$$f(x)=\left\{\left(B^{\alpha,\,\lambda}_{a+;\sigma}\right)^{-1}g\right\}(x)=I^{1}_{a+;x^{\sigma}}\left(A^{-\alpha-1,\,\lambda}_{a+;\sigma}g\right)(x). \tag{4.3}$$

Следующие теоремы дают условия обратимости операторов (1.1)–(1.3).

Теорема 4. Пусть задано уравнение $\left(I^{\alpha,\beta,\lambda}_{a+;\sigma}f\right)(x)=g(x)$, $0\le a<x<b<\infty, 0<\alpha<1$, $\sigma>0, \lambda>0$; $g(x)$ – заданная на $[a,b]$ функция; $f(x)$ – искомая функция (в случае $a>0$ полагается, что $f(x)=g(x)=0$ при $0<x<a$), тогда его решение f в классе $L_p(a,b)$, $b<\infty$, существует и единственно, если $g(x)\in I^{\alpha}_{a+;x^{\sigma}}\left(L_p(a,b)\right)$, $p\ge 1$. В случае $p=1$ оно может быть представлено формулой (4.1), если еще выполняются дополнительные условия $g(x)\in AC([a,b])$, $g(a)=0$.

Теорема 5. Пусть задано уравнение $\left(A^{\alpha,\lambda}_{a+;\sigma}f\right)(x)=g(x),\quad 0\le a<x<b<\infty, 0<\alpha<1$, $\sigma>0, \lambda>0$; $g(x)$ – заданная на $[a,b]$ функция; $f(x)$ – искомая функция (в случае $a>0$ полагается, что $f(x)=g(x)=0$ при $0<x<a$), тогда его решение f в классе $L_p(a,b)$, $b<\infty$, существует и единственно, если $g(x) \in I^{\alpha}_{a+;x^{\sigma}}\left(L_p(a,b)\right)$, $p \ge 1$. В случае $p = 1$ оно может быть представлено формулой (4.2), если еще выполняются дополнительные условия $g(x) \in AC([a,b])$, $g(a) = 0$.

Теорема 6. Пусть задано уравнение $\left(B^{\alpha,\lambda}_{a+;\sigma} f\right)(x) = g(x)$, $0 \le a < x < b < \infty, 0 < \alpha < 1$, $\sigma > 0$, $\lambda > 0$; $g(x)$ – заданная на $[a,b]$ функция; $f(x)$ – искомая функция (в случае $a > 0$ полагается, что $f(x) = g(x) = 0$ при $0 < x < a$), тогда его решение *f* в классе $L_p(a,b)$, $b < \infty$, существует и единственно, если $g(x) \in I^{\alpha}_{a+;x^{\sigma}}\left(L_p(a,b)\right)$, $p \ge 1$. В случае $p = 1$ оно может быть представлено формулой (4.3), если еще выполняются дополнительные условия $g(x) \in AC([a,b])$, $g(a) = 0$.

Доказательство следует из существования, единственности и совпадения соответствующих обобщенных преобразований Лапласа уравнений и их обращений, а также из существования всех приведенных операторов в указанных классах функций *g* и *f*.

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция-2020» (подпрограмма 1, задание 1.2.01).

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688с.
2. Kilbas, A. A. Theory and applications of fractional differential equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo // North – Holland Mathematics Studies 204. – Amsterdam, 2006. – 523 p.
3. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции : в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1973. – Т. 1 : Гипергеометрическая функция Гаусса. Функция Лежандра. – 294 с.
4. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции : в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1973. – Т. 2 : Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – 296 с.
5. Kilbas, A. A. H-Transforms. Theory and Applications / A. A. Kilbas, M. H. Saigo. – London [etc.] : Chapman and Hall. CRC Press, 2004. – 401 p.
6. Прудников, А. П. Интегралы и ряды : в 3 т. / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М. : Наука, 1983. – Т. 2 : Специальные функции. – 752 с.
7. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1968. – 496 с.
8. Никольский, С. М. Курс математического анализа / С. М. Никольский. – М. : Наука, 1983. Т. 2. – 448 с.

Поступила 20.09.2016

INTEGRAL TRANSFORMS WITH THE CONFLUENT HYPERDEOMETRIC FUNCTION OF KUMMER AND THE CUT BESSEL FUNCTION IN THE KERNELS AND INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND IN THE SPACE OF SUMMABLE FUNCTIONS

O. SKOROMNIK

Three integral transforms involving confluent hyperdeometric function of Kummer and the cut Bessel function in the kernels are studied on the spaces of p- summable functions on a finite interval $[a,b]$ of the real line. Mapping properties such as the boundedness, the range of the considered transform are given, and the inversion formulas are established. Three integral equations of the first kind with the confluent hyperdeometric function of Kummer and the cut Bessel function in the kernels also are considered. The solutions of the investigating equations in the closed form are established, and conditions for its solvability in the space of summable functions are given. The results generalize the well know findings for corresponding integral equations.

Keywords: *integral transforms, integral equations , confluent hyperdeometric function , cut Bessel function, fractional integrals and derivatives, cut Bessel function, space of summable functions.*