

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Полоцкий государственный университет»

## **ГРАВИМЕТРИЯ**

Учебно-методический комплекс  
для студентов специальности 1- 56 02 01  
«Геодезия»

Составление и общая редакция  
Г. А. Шароглазовой

2-е издание

Новополоцк  
ПГУ  
2010

УДК 528.22(075.8)  
ББК 26.11я73  
Г75

Рекомендовано к изданию методической комиссией геодезического факультета  
в качестве учебно-методического комплекса

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

директор РУП «Беларокосмогеодезия» В. Н. ШЕВЧЕНКО;  
ст. науч. сотрудник РУП «Беларокосмогеодезия», канд. техн. наук Б. А. ФУРМАН;  
проф., д-р техн. наук, зав. каф. прикладной геодезии и фотограмметрии  
УО «ПГУ» В. П. ПОДШИВАЛОВ

**Гравиметрия** : учеб.-метод. комплекс для студентов специальности  
Г75 1-56 01 02 «Геодезия» / сост. и общ. ред. Г. А. Шароглазовой. – 2-е изд. –  
Новополоцк : ПГУ, 2010. – 196 с.  
ISBN 978-985-531-161-5.

Объединяет теоретический и практический материал по изучаемой дисциплине, знание которого необходимо для подготовки современного специалиста по геодезии.

Состоит из трех основных частей, включающих теоретический лекционный материал, руководство к выполнению лабораторных работ и методические указания к самостоятельному изучению гравиметрии студентами заочной формы обучения с рекомендациями к выполнению контрольной работы.

При разработке автор руководствовался уровнем развития гравиметрии в мировой практике, свидетельствующем о возрастании ее роли в геодезии как науке при установлении, например, систем координат и в поддержании их на современном уровне, а также требованиями к подготовке специалиста для современного геодезического производства.

Первое издание вышло в 2006 г.

Предназначен для студентов высших учебных заведений геодезической специальности дневной и заочной форм обучения, изучающих гравиметрию по единой учебной программе. Может оказаться полезным для магистров и аспирантов геодезических специальностей вузов, а также специалистов по геодезии и геофизике.

УДК 528.22(075.8)  
ББК 26.11я73

ISBN 978-985-531-161-5

© Г. А. Шароглазова, составление, 2006  
© УО «Полоцкий государственный университет», 2006

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие .....	6
<b>1. Введение .....</b>	<b>9</b>
1.1. Основные положения гравиметрии .....	9
1.2. История гравиметрии, тенденции и перспективы развития .....	10
1.3. Основные приложения гравиметрии. Связь гравиметрии с геодезией и другими науками. Роль курса в подготовке специалиста по геодезии.....	13
<b>2. Гравитационное поле Земли .....</b>	<b>16</b>
2.1. Сила тяготения и ее потенциал. Основные виды потенциала тяготения и его свойства. Сила тяжести, центробежная сила. Их потенциалы. Вторые производные потенциала силы тяжести. Изменения силы тяжести во времени.....	16
2.1.1. Сила тяготения и ее потенциал. Основные виды и свойства потенциала силы тяготения .....	16
2.1.2. Сила тяжести, центробежная сила. Их потенциалы .....	23
2.1.3. Вторые производные потенциала силы тяжести.....	25
2.1.4. Изменение силы тяжести во времени.....	26
2.2. Нормальное гравитационное поле. Способы выбора нормального потенциала силы тяжести. Теорема Клеро. Формулы определения нормальной силы тяжести. Вторые производные нормального потенциала силы тяжести .....	27
2.2.1. Нормальное гравитационное поле. Способы выбора нормального потенциала силы тяжести .....	27
2.2.2. Теорема Клеро. Формулы определения нормальной силы тяжести .....	29
2.2.3. Вторые производные нормального потенциала силы тяжести.....	32
2.3. Аномальное гравитационное поле. Аномалии силы тяжести и их природа. Косвенная интерполяция аномалий силы тяжести. Характеристики аномального гравитационного поля.....	33
2.3.1. Аномальное гравитационное поле. Аномалии силы тяжести.....	33
2.3.2. Косвенная интерполяция аномалий силы тяжести .....	41
2.3.3. Числовые характеристики аномального гравитационного поля .....	43
<b>3. Определение поверхности и гравитационного поля Земли по измерениям силы тяжести.....</b>	<b>45</b>
3.1. Исходные данные для определения поверхности и гравитационного поля Земли. Связь возмущающего потенциала с аномалиями силы тяжести, уклонением отвеса и аномалией высоты.....	45
3.2. Задача Стокса и задача Молоденского. Формулы Стокса и Венинг-Мейнеса. Современная методика вычисления аномалий высот и уклонений отвеса .....	48
3.2.1. Схема решения задачи по определению гравитационного поля Земли.....	48
3.2.2. Решение Стокса по определению возмущающего потенциала .....	48

3.2.3. Решение Молоденского по определению возмущающего потенциала .....	50
3.2.4. Современная методика вычисления аномалий высот и уклонений отвеса .....	52
<b>4. Измерение силы тяжести и вторых производных потенциала силы тяжести....</b>	<b>57</b>
4.1. Методы измерения силы тяжести. Результаты современных абсолютных измерений силы тяжести. Относительные маятниковые измерения и их результаты .....	57
4.1.1. Методы измерения силы тяжести. Результаты современных абсолютных измерений силы тяжести .....	57
4.1.2. Относительные маятниковые измерения и их результаты .....	60
4.2. Статический метод определения силы тяжести. Основы теории статических гравиметров и их классификация. Смещение нуля-пункта. Влияние внешней среды на показания гравиметров .....	62
4.2.1. Статический метод определения силы тяжести. Основы теории статических гравиметров и их классификация .....	62
4.2.2. Смещение нуля-пункта гравиметра.....	67
4.2.3. Влияние внешней среды на показания гравиметров .....	69
4.3. Исследования кварцевых астазированных гравиметров .....	71
4.4. Вариометрические измерения.....	75
<b>5. Гравиметрическая съемка .....</b>	<b>77</b>
5.1. Мировая опорная гравиметрическая сеть. Государственные опорные сети. Полевые опорные и рядовые гравиметрические сети .....	77
5.1.1. Мировая опорная гравиметрическая сеть .....	78
5.1.2. Государственные (национальные) опорные гравиметрические сети.....	80
5.1.3. Полевая опорная гравиметрическая сеть (ПОГС).....	83
5.1.4. Наблюдения на пунктах рядовой сети .....	84
5.2. Виды гравиметрических съемок. Требования к проектированию гравиметрической съемки. Топографо-геодезическое обеспечение гравиметрической съемки.....	88
5.2.1. Виды гравиметрических съемок .....	88
5.2.2. Требования к проектированию гравиметрической съемки.....	90
5.2.3. Топографо-геодезическое обеспечение гравиметрической съемки.....	93
5.3. Методика и математическая обработка результатов измерений. Уравнивание опорной сети .....	94
5.4. Методика составления и точность построения гравиметрических карт .....	98
5.5. Гравиметрическая изученность Земли .....	101
<b>6. Применение гравиметрии в решении геодезических задач.....</b>	<b>103</b>
6.1. Определение сжатия Земли по результатам гравиметрических измерений.....	103
6.2. Учет неоднородности гравитационного поля в результатах геодезических измерений.....	104
6.3. Учет неоднородностей гравитационного поля в инженерной геодезии.....	107

6.4. Дифференциальный метод определения аномалий высот и уклонений отвеса по измерениям силы тяжести и вторых производных потенциала силы тяжести .....	111
6.5. Влияние вариаций гравитационного поля на результаты повторных геодезических измерений.....	115
6.5.1. Учет изменений гравитационного поля, вызванных заполнением водохранилища и колебанием его уровня в период эксплуатации, при обработке данных повторного нивелирования на геодинимических полигонах ГЭС .....	118
6.6. Принципы расчета гравиметрической съемки при решении геодезических задач.....	122
<b>7. Руководство к выполнению лабораторных работ .....</b>	<b>127</b>
7.1. Лабораторная работа № I. Знакомство со статическими гравиметрами.....	127
7.2. Лабораторная работа № 2. Установка гравиметра на минимум чувствительности к наклону (исследование уровней) .....	135
7.3. Лабораторная работа № 3. Исследование гравиметра на смещение нуль-пункта.....	139
7.4. Лабораторная работа №4. Проложение и обработка гравиметрического рейса.....	141
7.5. Лабораторная работа № 5. Определение аномалий силы тяжести с редукциями в свободном воздухе и Буге. Построение гравиметрической карты.....	144
7.6. Лабораторная работа № 6. Определение уклонений отвеса и высот квазигеоида в нулевом приближении (согласно решению Стокса). Вычисление поправок за уклонение отвеса в результаты геодезических измерений .....	146
7.7. Лабораторная работа № 7. Вычисление поправок в результаты высокоточного нивелирования, вызванных колебаниями уровенных поверхностей вследствие заполнения водохранилища .....	151
7.8. Приложения к лабораторным работам.....	157
<b>8. Методические указания к изучению гравиметрии для студентов заочной формы обучения с рекомендациями к выполнению контрольной работы.....</b>	<b>163</b>
8.1. Общие указания.....	163
8.2. Программа курса .....	163
8.3. Рекомендуемая литература.....	166
8.4. Методические указания к изучению разделов программы.....	167
8.5. Контрольная работа № 1. Методические указания к выполнению контрольной работы.....	171
Приложение 8.1. Исходные данные для выполнения заданий 1 и 2 .....	179
Приложение 8.2 .....	192
Таблица 1. Нормальная сила тяжести .....	192
Таблица 2. Поправка за приведение силы тяжести по высоте.....	193
Таблица 3. Поправка за промежуточный слой .....	194
Таблица 4. Поправка $\gamma_e \beta_1 \sin^2 2B$ , мГал .....	195

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Гравиметрия, родившаяся в XVII веке как раздел геодезии, развивается в последние десятилетия быстрыми темпами. Успехи теоретических разделов геодезии и геофизики, совершенствование методов изучения гравитационного поля и обработки измерений, новые виды гравиметрической аппаратуры повлекли резкое повышение точности и детальности гравиметрических данных и значительно расширили области практического применения гравиметрии. Наряду с традиционными геодезическими и геофизическими приложениями современные методы гравиметрии позволяют выполнять исследования геодинамических явлений, исследования для целей инженерной геологии, археологии, прогноза землетрясений и т.д.

Для подготовки специалиста по геодезии на современном уровне необходимо учитывать стремительное внедрение в эту науку самых новейших технологий, связанных с появлением таких средств измерений как спутниковые GPS-приемники, электронные тахеометры и нивелиры, а также с мощными возможностями программных средств математической обработки результатов этих измерений. В связи с этим современная геодезия вышла на столь высокую ступень развития, когда оказалось возможным задуматься над созданием единой пространственной системы координат и объединить пункты по определению ускорения силы тяжести, входящие сейчас в отдельную гравиметрическую сеть, с пунктами плановой и нивелирной сетей, определяющими также отдельно координаты  $x$ ,  $y$  и  $H$ . На первом этапе решения этой задачи во всем мире, включая Беларусь и Россию, осуществляют обновление существующей гравиметрической сети, организуя в ней фундаментальные гравиметрические пункты с абсолютными измерениями ускорения силы тяжести и совмещая их с пунктами фундаментальной астрономо-геодезической сети (ФАГС). ФАГС развивается, в основном, спутниковыми методами с целью задания системы координат в стране и установления ее связи с мировой координатной системой, а также для изучения различных геодинамических явлений, знание которых необходимо как для установления системы координат и поддержания ее на современном уровне, так и для решения чисто практических задач, связанных, например, с поиском месторождений полезных ископаемых, экологической безопасностью эксплуатации магистральных нефте- и газопроводов, ГЭС, ТЭЦ, АЭС и т.д.

Таким образом, при современном уровне развития геодезии практические задачи оказываются самым тесным образом переплетены с ее ранее считавшимися чисто теоретическими разделами, такими как теоретическая геодезия, геодезическая гравиметрия, кинематическая геодезия. Освоение выделенных дисциплин требует знания высшей математики, физики, космической геодезии. Совместное использование спутниковых, гравиметрических и астрономо-геодезических данных оказывает неоценимую помощь в решении основной научной задачи высшей геодезии: определение фигуры и гравитационного поля Земли.

Однако кроме теоретических знаний по гравиметрии, связанных с теорией потенциала, теоремой Клеро, задачами Стокса и Молоденского, а также с основами устройства гравиметров, современный специалист по геодезии должен обладать и навыками практической работы по гравиметрии, то есть:

- выполнять исследования статических гравиметров;
- производить полевые измерения статическими гравиметрами;
- проектировать гравиметрическую съемку;
- выполнять математическую обработку результатов гравиметрических измерений;
- знать технологию построения гравиметрической карты;
- вычислять поправки за неоднородность гравитационного поля и вариации силы тяжести во времени в результаты геодезических измерений.

Предлагаемый учебно-методический комплекс (УМК) по гравиметрии является попыткой объединения теоретического и практического материала по изучаемой дисциплине, знание которого необходимо для подготовки современного специалиста по геодезии. Он предназначен для студентов высших учебных заведений геодезической специальности дневной и заочной форм обучения, изучающих гравиметрию по единой учебной программе, приведенной в разделе «Методические указания к изучению гравиметрии студентами заочного факультета».

УМК состоит из трех основных частей, включающих теоретический лекционный материал, описание лабораторных работ и методические указания к самостоятельному изучению гравиметрии студентами заочного факультета с рекомендациями к выполнению контрольной работы.

Лекционная часть охватывает 6 теоретических тем, в которых в строгом соответствии с учебной программой рассмотрены теоретические основы гравиметрии, определение гравитационного поля Земли по измерениям

силы тяжести и вторых производных потенциала силы тяжести, гравиметрические приборы, гравиметрическая съемка, приложения гравиметрии к геодезии. В разделе, описывающем применение гравиметрии в решении геодезических задач, представлены вопросы учета неоднородности гравитационного поля в результатах геодезических измерений, выполненных в государственных и инженерно-геодезических сетях, определения сжатия Земли по данным гравиметрических измерений согласно теореме Клеро, а также вопросы оценки влияния вариаций гравитационного поля на параметры деформаций земной коры, исследуемых на геодинамических полигонах ГЭС. Последние аспекты приложения гравиметрии к геодезии представляют все больший интерес в связи с повсеместным возведением сложных инженерных объектов и с повышенными требованиями к защите окружающей среды от вмешательства человека в природное равновесие. В конце каждой темы приведены вопросы для проверки усвоения материала.

Содержание и темы лабораторных работ подобраны таким образом, чтобы студент мог в максимальной степени закрепить теоретический материал и научиться пользоваться им на практике.

В разделе, предназначенном для студентов заочной формы обучения, даны не только указания к выполнению контрольной работы, но и методические рекомендации к самостоятельному изучению гравиметрии с ссылками на параграфы учебников и настоящего УМК. На наш взгляд, этот раздел может оказаться полезным и для студентов, обучающихся по очной форме.

При разработке УМК автор руководствовался уровнем развития гравиметрии в мировой практике, свидетельствующем о возрастании ее роли в геодезии как науке при установлении, например, систем координат и в поддержании их на современном уровне, а также требованиями к подготовке специалиста для современного геодезического производства.



# 1. ВВЕДЕНИЕ

## 1.1. Основные положения гравиметрии

Гравиметрия – это раздел науки об измерении величин, характеризующих гравитационное поле Земли и планет, и об использовании этих величин в геодезии, геологии, геофизике, космонавтике и других областях науки и техники.

Теоретической основой гравиметрии является закон всемирного тяготения Ньютона.

Основными измеряемыми величинами в гравиметрии являются ускорение силы тяжести и вторые производные потенциала силы тяжести.

Сила тяжести есть сила, с которой масса в одну единицу (1 г) притягивается к Земле. Как и всякая другая сила, сила тяжести характеризуется ускорением, которое она придает свободно падающему телу. Размерность ускорения силы тяжести  $g$ : (длина)·(время)<sup>-2</sup>. В системе СИ  $g$  измеряется в м·с<sup>-2</sup>. В системе CGS за единицу ускорения силы тяжести принят гал = см·с<sup>-2</sup>. Такое название единице ускорения дано в честь итальянского ученого Галилея, который впервые выполнил измерение ускорения силы тяжести. Если масса притягиваемого тела равна 1 г, то сила тяжести, выраженная в динах, численно равна ее ускорению, выраженному в галах. Одна тысячная доля гала носит название миллигала (мГал), одна миллионная доля гала – микрогала (мкГал).

Вторые производные потенциала силы тяжести имеют размерность: (время<sup>-2</sup>), в системах СИ и CGS это будет с<sup>-2</sup>. За единицу измерения принимается 10<sup>-9</sup> этой величины, которая называется этвешем (E = 10<sup>-9</sup>с<sup>-2</sup>). Такое название дано в честь выдающегося венгерского ученого Л. Этвеша (1848 – 1919 гг.), внесшего большой вклад в развитие гравиметрии.

Ускорение силы тяжести измеряют различными гравиметрами: баллистическими, маятниковыми и статическими. Вторые производные потенциала силы тяжести измеряют вариометрами.

Для измерения ускорения силы тяжести используют динамический и статический методы. В динамическом методе наблюдают за движением тела в реальном гравитационном поле. В статическом методе наблюдают состояние равновесия тела в реальном гравитационном поле под действием двух сил: силы тяжести и некоторой компенсирующей силы.

Кроме того, измерения ускорения силы тяжести делят на абсолютные и относительные. При абсолютных измерениях в точке измерения получают полное значение ускорения силы тяжести. При относительных из-

мерениях получают только приращение ускорения силы тяжести между двумя точками.

На земной поверхности ускорение  $g$  изменяется приблизительно от 978 до 983 гал, возрастая от экватора к полюсам. Оно уменьшается с высотой над уровнем моря вблизи земной поверхности на величину около 0,3 мГал/м.

## 1.2. История гравиметрии, тенденции и перспективы развития

Первые измерения ускорения силы тяжести были выполнены в XVI веке Галилеем. Он использовал открытый им закон свободно падающего тела, согласно которому тело в первую секунду падения проходит путь, равный половине ускорения силы тяжести. Найденное значение ускорения силы тяжести оказалось довольно грубым, так как метод Галилея требовал очень точного измерения длины и времени, что в XVI веке было невозможно. Кроме того, Галилей не учитывал такой существенный источник ошибок как сопротивление воздуха.

Толчок к развитию гравиметрии дало опубликование Гюйгенсом в 1673 году уравнения математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (1.1)$$

где  $T$  – период колебания математического маятника;  
 $l$  – приведенная длина математического маятника;  
 $g$  – ускорение силы тяжести.

Маятниковый прибор оказался тем самым простым и удобным прибором, который позволил выполнять измерения ускорения силы тяжести, начиная с XVII века вплоть до настоящего времени.

Однако первые маятниковые измерения выполнялись не с целью определения ускорения силы тяжести, а для задания эталона длины. Ускорение силы тяжести принималось величиной постоянной. Сомнения в этом впервые заложил астроном Рише в 1672 году. Он заметил, что длина секундного маятника в Кайенне, вблизи экватора, оказалась на 3 мм короче, чем длина этого же маятника вблизи Парижа. На самом же деле изменилась не длина маятника, а ускорение силы тяжести, что в дальнейшем было доказано Ньютоном (1686 г.) и Гюйгенсом (1691 г.), которые показали *зависимость ускорения силы тяжести от широты наблюдения, формы Земли и скорости вращения Земли.*

В 1743 году эта зависимость была подтверждена математически строго доказательством теоремы Клеро, состоящей из двух формул: пер-

вая формула дает строгую зависимость изменения ускорения нормальной силы тяжести от широты, а вторая – позволяет вычислить сжатие Земли по гравиметрическим данным.

После опубликования теоремы Клеро гравиметрия стала неотъемлемой частью геодезии. С тех пор геодезисты стараются выполнять гравиметрические измерения как можно чаще и как можно в большем числе точек земной поверхности.

В дальнейшем развитие гравиметрии определяется как техническими возможностями, так и научными задачами *геодезии и геофизики*, в которых возрастающее влияние начинают оказывать практические задачи геодезических измерений и геофизических исследований. Особенность развития гравиметрии за последние три столетия состоит в непрерывном расширении изученных территорий континентов и океанов при постоянном повышении точности измерений.

Таким образом, в соответствии с применяемой аппаратурой и решаемыми задачами выделяют *четыре этапа развития гравиметрии*:

- становление теоретических основ (XVII – XVIII вв.);
- совершенствование маятниковых приборов и начало их использования в глобальных задачах геодезии и геофизики (XVIII – XIX вв.);
- развитие вариометров и статических гравиметров, региональные гравиметрические съемки для геофизики (первая половина XX века);
- развитие баллистических гравиметров и создание прецизионных гравиметрических сетей для решения задач геодезии, геофизики и геодинамики (начиная со второй половины XX в.).

Наибольшее развитие гравиметрия получила уже в двадцатом веке. К концу 80-х – началу 90-х годов прошлого столетия был достигнут большой прогресс в постановке работ по мировой гравиметрической съемке, в которой активное участие принял Советский Союз. Благодаря этому за указанный период на его территории с помощью высокоточных маятниковых приборов, статических гравиметров и баллистических абсолютных приборов создана надежная опорная гравиметрическая сеть, отвечающая мировым стандартам и хорошо согласованная с мировой гравиметрической системой. Значительный прогресс достигнут также и в гравиметрическом изучении Мирового океана. Проведена планомерная гравиметрическая съемка Арктики и осуществлен большой объем работ по съемке Антарктиды.

В последние годы в связи с широким развитием в мире спутниковых средств измерений и их привлечением к решению задач высшей геодезии в гравиметрии появился новый раздел, называемый спутниковой гравиметрией. Этот раздел занимается созданием и развитием методики получения

карт аномалий силы тяжести в свободном воздухе по данным картирования рельефа поверхности океана посредством стационарных спутников. Существенный прогресс в осуществлении данной идеи преобразования высот поверхности океана в гравитационные карты был достигнут после запуска геодезических спутников GEOSAT и ERS-1 (1995 г.). В настоящее время спутниковая гравиметрия располагает точностью 3 – 7 мГал и разрешением объектов размером 20 – 30 км. Точность метода существенно возрастает при совместном использовании результатов спутниковых измерений с данными локальных гравиметрических съемок.

После запуска специальных спутников, приспособленных для лазерных и дальномерных измерений, открываются также значительные перспективы в определении глобальных гравитационных моделей, параметры которых устанавливаются путем анализа возмущений орбит этих спутников, наземных гравиметрических данных и данных спутниковой альтиметрии. Потребность в уточнении глобальных гравитационных моделей сохранится в последующие годы и будет связана не только с обеспечением прогноза движения искусственных спутников Земли (ИСЗ) для спутниковой навигации и других баллистических расчетов, но и с решением ряда таких научных и народнохозяйственных задач как:

- построение моделей внутреннего строения Земли, в первую очередь, земной коры;
- изучение вариаций земного гравитационного поля во времени;
- учет влияния дальних зон при точном вычислении высот квазигеоида, отклонений отвеса и других элементов гравитационного поля;
- получение данных для изучения неуровненности поверхности Мирового океана.

Таким образом, в настоящее время в гравиметрии при определении элементов гравитационного поля Земли четко обозначилась тенденция привлечения спутниковых методов, к которым относятся спутниковая альтиметрия, определяющая данные только для морской поверхности, и в перспективе – межспутниковые измерения дальности и радиальной скорости и спутниковая градиентометрия. По предварительным оценкам новые методы представляются весьма эффективными, так как они дают возможность изучать особенности гравитационного поля не только над морем, но и над сушей, тем самым снижая проблему белых пятен в гравиметрической изученности мира. Известную роль в исследованиях гравитационного поля Земли может сыграть определение высот квазигеоида из совместной обработки спутниковых определений координат и геометрического нивелирования.

### 1.3. Основные приложения гравиметрии. Связь гравиметрии с геодезией и другими науками. Роль курса в подготовке специалиста по геодезии

Гравиметрия широко используется в самых различных областях науки и техники и является *неотъемлемой частью геодезии*. Тесная связь гравиметрии с геодезией видна из следующих примеров.

1. С помощью гравиметрии решается основная научная задача высшей геодезии: *изучение фигуры и гравитационного поля Земли*. Как известно, эта задача может быть решена несколькими методами, но ни один из них не может обойтись без привлечения гравиметрических данных, в то время как физический (или гравиметрический) метод изучения фигуры Земли основан на применении только гравиметрических данных.

2. Гравиметрические данные используются в общем комплексе астрономо-геодезических измерений и их математической обработки при *решении задачи редуцирования*. В силу наглядности примера остановимся на нем более подробно.

Как известно, геодезические измерения выполняются на реальной поверхности Земли и в реальном гравитационном поле. При этом направления вертикальных осей геодезических инструментов совпадают с направлениями отвесных линий (касательными к направлениям силы тяжести в точках стояния геодезических инструментов), зависящими от состояния гравитационного поля. В силу того, что реальное гравитационное поле Земли неоднородно из-за сфероидичной формы Земли и неравномерного распределения ее внутренних и внешних масс, направления отвесных линий в разных точках земной поверхности будут не параллельны между собой. Следовательно, вертикальные оси геодезических инструментов в разных точках земной поверхности будут также не параллельны между собой (рис. 1).

Кроме того, поверхность реальной Земли является математически сложной, на которой оказывается практически невозможным решить геометрические задачи по определению координат пунктов, возникающих при обработке геодезических сетей. Чтобы выполнить математическую обработку первичного набора результатов геодезических измерений и получить координаты, результаты геодезических измерений переносят (редуцируют) с математически сложной поверхности Земли на модель Земли – эллипсоид. Для этой модели существуют формулы сфероидической геодезии, позволяющие решать требуемые геометрические задачи. При редуцировании от направлений отвесных линий ( $\overline{g}$ ) переходят к направлениями нормалей ( $\overline{n}$ ) к эллипсоиду. Редуцирование выполняют по математически строгим формулам и вводят поправку за угол между направлением отвесной

линии и направлением нормали к эллипсоиду, который называется астрономо-геодезическим уклоном отвеса. Для определения этого угла кроме астрономических и геодезических координат нужно обязательно использовать гравиметрические данные.

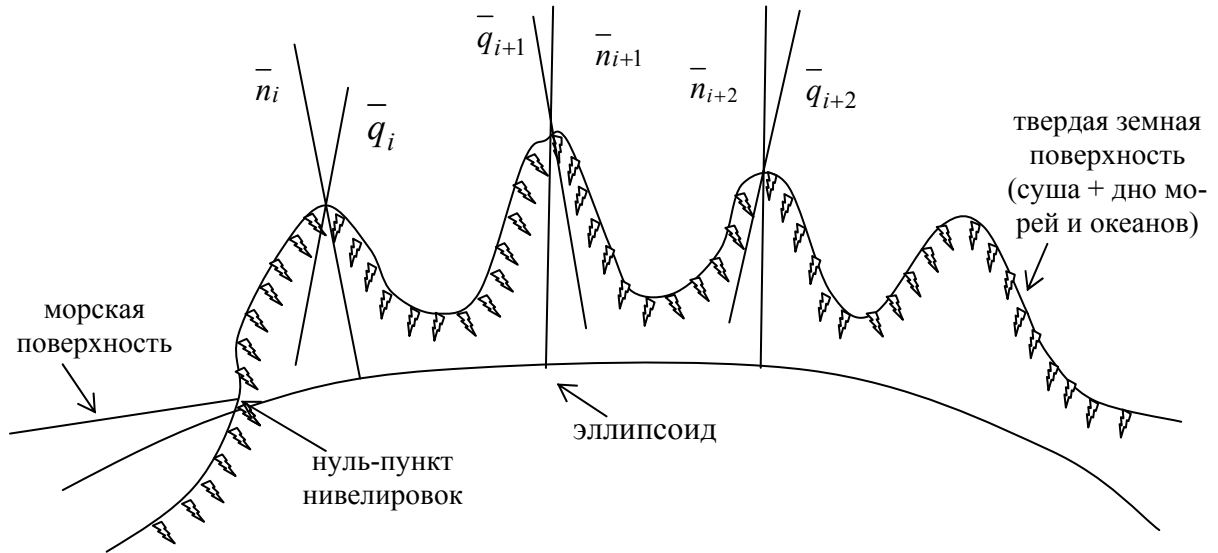


Рис. 1. Иллюстрация к проблеме редуцирования результатов геодезических измерений:  $\bar{q}_i, \bar{q}_{i+1}, \bar{q}_{i+2} \dots$  – направления отвесных линий, совпадающие с осями вращения геодезических инструментов в момент измерений;  $\bar{n}_i \dots$  – направления нормалей к эллипсоиду

3. Результаты гравиметрических измерений используются *при обработке данных геометрического нивелирования для перехода к системе нормальных высот*, отсчитываемых от поверхности квазигеоида, которая широко применяется в повседневной практике при обозначении высот точек земной поверхности. Так для определения нормальной высоты в превышения, полученные из геометрического нивелирования, нужно ввести поправку за переход к разностям нормальных высот, которые не могут быть найдены без гравиметрических данных.

Таким образом, при создании опорных геодезических сетей мы не можем обойтись без гравиметрии.

4. Гравиметрические данные также находят широкое применение и в *прикладной геодезии*. Например: при строительстве тоннелей (особенно в горных районах), проектировании шахт; при строительстве и эксплуатации крупных гидроэлектростанций, атомных электростанций, ядерных ускорителей, высотных сооружений башенного типа, домов повышенной этажности, то есть при возведении сложных сооружений, требующих точного геодезического обеспечения, которое невозможно достичь без учета неоднородности гравитационного поля.

5. Гравиметрия активно используется при *определении деформаций различных объектов методом высокоточных повторных геодезических измерений*. Особенно актуально этот вопрос стоит на геодинамических полигонах, созданных в районах крупных гидроэлектростанций. При их эксплуатации уровень воды в водохранилище (пример – Красноярское водохранилище) может меняться на несколько десятков метров, что вызывает значительные изменения локального гравитационного поля в районе этого водохранилища. Расчеты показали, что изменение уровня воды в Красноярском водохранилище с 225 до 250 метров вызвало изменение локального гравитационного поля на 1,5 – 2 мГала. В свою очередь, изменение гравитационного поля на эту величину вызывает уклонение отвесных линий в прибрежной части водохранилища порядка (0,3 – 0,5)”, а изменение положений уровенных поверхностей – до 10 мм. Данный факт свидетельствует, что в результаты геодезических измерений, выполненных при различных уровнях водохранилища, необходимо вводить поправки за изменение гравитационного поля.

В *геологии* гравиметрия используется при поиске месторождений полезных ископаемых (гравиразведка).

В *геофизике и геодинамике* по результатам гравиметрических исследований изучают границы тектонических блоков и ведут периодические наблюдения на тектонических разломах. Изменение напряженного состояния на тектонических разломах проявляется в изменении гравитационного поля, что может рассматриваться как один из предвестников землетрясения.

*Связь гравиметрии с другими науками.* Гравиметрия тесно связана с физикой Земли, с запуском и эксплуатацией космических летательных аппаратов, с задачами автономной навигации, метрологией.

В свою очередь, гравиметрия успешно использует различные новейшие технические и научные достижения других областей знаний, то есть математики, физики, электроники, автоматики, приборостроения, вычислительной техники.

В настоящее время гравиметрия очень активно использует GPS-измерения, которые существенно восполнили «белые» пятна гравиметрических съемок.

#### *Вопросы для проверки усвоения материала по теме 1*

1. Определение гравиметрии. Основные измеряемые величины в гравиметрии, их обозначение и размерность. Приборы, используемые при измерении каждой величины.
2. Основные этапы развития гравиметрии.
3. Основные приложения гравиметрии к решению геодезических задач. Связь гравиметрии с другими науками.

## 2. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

### 2.1. Сила тяготения и ее потенциал. Основные виды потенциала тяготения и его свойства. Сила тяжести, центробежная сила. Их потенциалы.

#### Вторые производные потенциала силы тяжести.

#### Изменения силы тяжести во времени

#### 2.1.1. Сила тяготения и ее потенциал. Основные виды и свойства потенциала силы тяготения

Все мы хорошо знаем, что Вселенная является чрезвычайно сложным организмом, населенным множеством различных тел, планет, частиц, взаимодействующих друг с другом. Взаимодействие обитателей Вселенной происходит, в основном, через физические поля: электромагнитные, силовые, ядерные, температурные, плотностные и т.д., каждое из которых решает определенную роль в общем функционировании организма Вселенной. Так как гравиметрия изучает поле силы тяжести, то сделаем акцент на силовые поля.

Каждое силовое поле характеризуется силой и потенциалом силы. При этом под *потенциалом силы* понимают некоторую вспомогательную функцию, частные производные которой по осям координат равны проекциям силы на эти оси.

Обозначив потенциал через  $R$ , а силу через  $G$ , запишем математическое выражение для потенциала согласно его определению:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} &= G_x = G \cdot \cos(\bar{G} \wedge \bar{x}) \\ \frac{\partial R}{\partial y} &= G_y = G \cdot \cos(\bar{G} \wedge \bar{y}) \\ \frac{\partial R}{\partial z} &= G_z = G \cdot \cos(\bar{G} \wedge \bar{z}) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Понятие потенциала силы введено для удобства решения практических задач гравиметрии, в чем мы убедимся в дальнейшем.

Графически каждое силовое поле представляется в виде силовых линий и уровенных поверхностей (рис. 2).

Силовые линии – это линии, в каждой точке которых касательная совпадает с направлением вектора силы. Поверхности, всюду перпендикулярные силовым линиям, называются уровенными или изопотенциальными поверхностями.



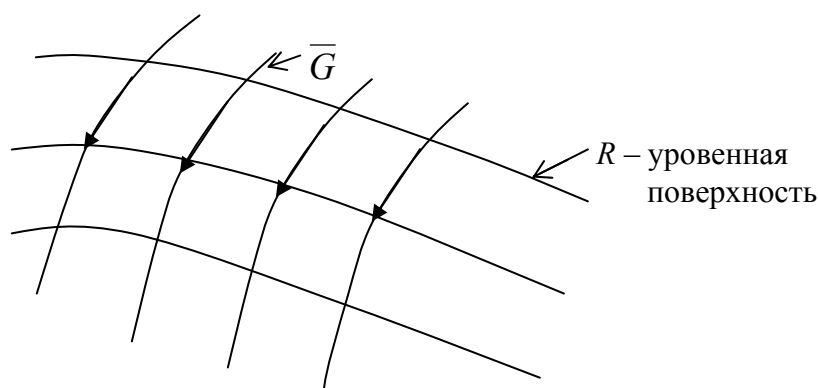


Рис. 2. Графическое представление силового поля:  
 $\bar{G}$  – силовая линия;  $R$  – уровенная поверхность

Так как геодезия неразрывно связана с гравитационным полем Земли, которое характеризуется силой тяжести, слагаемой из силы тяготения (притяжения) и центробежной силы, и ее потенциалом, то приступим к рассмотрению всех этих сил.

*Сила тяготения.* Понятие силы тяготения хорошо известно из школьного учебника физики. Вспомним закон всемирного тяготения Исаака Ньютона (1643 – 1727 гг.), согласно которому все тела притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной произведению масс взаимодействующих тел и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними, то есть согласно рис. 3 можно записать:



Рис. 3. Иллюстрация к закону всемирного тяготения

В (2.2)  $F$  – сила тяготения;  $m_1$  – притягивающая масса;  $m_2$  – притягиваемая масса;  $r$  – расстояние между взаимодействующими массами;  $f$  – гравитационная постоянная. Выражение (2.2) записано в скалярном виде, знак «минус» означает, что сила направлена от притягивающей массы к притягиваемой.

В векторном виде закон всемирного тяготения представлен выражением

$$\bar{F} = f \frac{m_1 \cdot m_2}{r^3} \cdot \bar{r}. \quad (2.3)$$

Гравитационная постоянная  $f$  определяется с помощью крутильного маятника. Ее численное значение равно, соответственно, в системах CGS и СИ:

$$f = (6,673 \pm 0,001) \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \text{ Г}^{-1} \text{ с}^{-2};$$

$$f = (6,673 \pm 0,001) \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ Г}^{-1} \text{ с}^{-2}.$$

Гравитационная постоянная не зависит от физических и химических свойств взаимодействующих масс, расстояния между ними, направления и скорости их движения (при условии, что эти скорости не приближаются к скорости света), а также свойств среды, расположенной между массами.

*Потенциал силы тяготения. Его основные виды*

Потенциал силы тяготения  $\bar{F}$  есть некоторая вспомогательная функция  $V$ , частные производные которой по осям координат равны проекциям силы тяготения на эти оси. Математическое выражение для потенциала силы тяготения имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= F_x = F \cdot \cos(\bar{F} \wedge \bar{x}) \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= F_y = F \cdot \cos(\bar{F} \wedge \bar{y}) \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= F_z = F \cdot \cos(\bar{F} \wedge \bar{z}) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Наиболее употребляемые на практике простейшие виды потенциала силы тяготения, к которым при математических выкладках сводится большинство случаев, являются:

- потенциал тяготения точечной массы;
- потенциал тяготения объемных масс;
- потенциал тяготения простого слоя.

*Потенциал тяготения точечной массы  $m$ .* Для уяснения этого понятия приведем чертеж (рис. 4). Пусть в точке М с координатами  $(a, b, c)$  расположена точечная масса  $m$ , а в точке Р с координатами  $(x, y, z)$  расположена единичная масса  $m_i = 1$ .

Потенциал тяготения точечной массы в этом случае будет равен

$$V = f \cdot \frac{m}{r}. \quad (2.5)$$

Докажем формулу (2.5). Доказательство будем вести, исходя из определения потенциала силы тяготения, согласно которому для выражения (2.5)

должны быть справедливыми равенства (2.4). С этой целью запишем закон всемирного тяготения для случая, представленного на рис. 4, в виде выражения (2.6) и возьмем частные производные  $\frac{\partial V}{\partial x}$ ;  $\frac{\partial V}{\partial y}$ ;  $\frac{\partial V}{\partial z}$ .

$$F = -\frac{f \cdot m}{r^2} \quad (2.6)$$

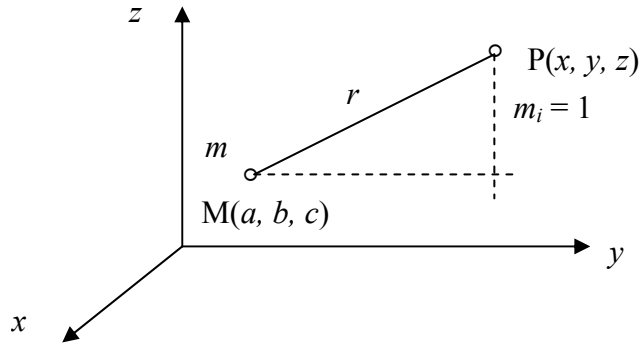


Рис. 4. Иллюстрация к потенциалу силы тяготения точечной массы  
 $r$  – расстояние между массами

Согласно рис. 4 расстояние  $r$  выразим через разность координат:

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2. \quad (2.7)$$

Используя правило дифференцирования сложной функции, запишем

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y}; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z}. \quad (2.8)$$

Из формулы (2.5)

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{f \cdot m}{r^2}. \quad (2.9)$$

Из формулы (2.7)

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{(x - a)}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{(y - b)}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{(z - c)}{r}. \quad (2.10)$$

Подставляя формулы (2.9) и (2.10) в формулу (2.8) и учитывая (2.6), получим:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{f \cdot m}{r^2} \cdot \frac{(x - a)}{r} = F_x; \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{f \cdot m}{r^2} \cdot \frac{(y - b)}{r} = F_y; \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{f \cdot m}{r^2} \cdot \frac{(z - c)}{r} = F_z. \quad (2.13)$$

Следовательно, выражение (2.5) действительно есть выражение для потенциала силы тяготения точечной массы.

*Потенциал тяготения объемных масс или тела.* Для вывода формулы для потенциала тела поступим следующим образом. Разобьем притягивающую массу  $M$  на бесконечно большое число элементарных масс  $dm$ , которые будем рассматривать как точечные массы (рис. 5).

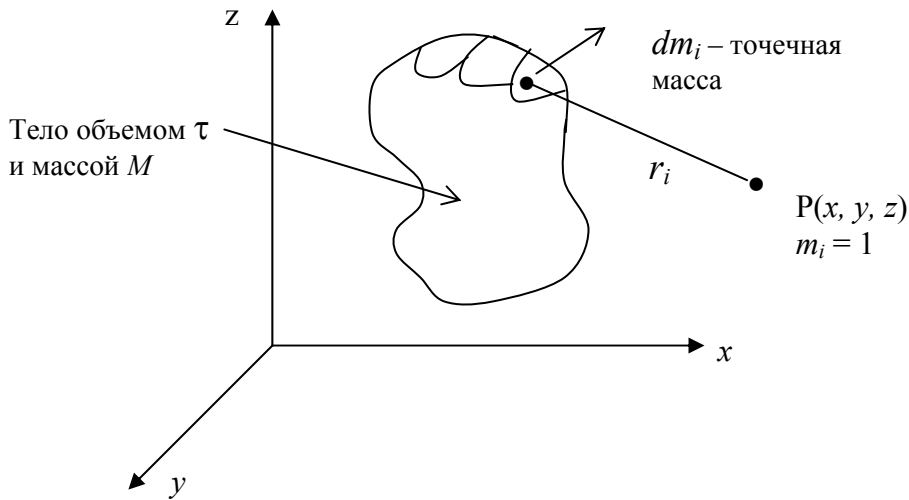


Рис. 5. Иллюстрация к понятию потенциала тяготения тела

Потенциал тяготения элементарной массы, находящейся в текущей точке, для точки  $P$  будет равен

$$dV_i = f \cdot \frac{dm_i}{r} = f \frac{\delta \cdot d\tau}{r}, \quad (2.14)$$

где  $dV_i$  – потенциал силы тяготения, создаваемый элементарной массой;  $d\tau$  – элементарный объем;  $dm = \delta \cdot d\tau$ ;  $f$  – гравитационная постоянная.

Предполагая, что непрерывное распределение масс внутри тела известно, можно записать

$$V = f \iiint_{\tau} \frac{\delta \cdot d\tau}{r}, \quad (2.15)$$

где  $\tau$  – объем тела.

Из (2.15) следует, что для определения потенциала тяготения тела необходимо знать форму поверхности, ограничивающей данное тело, и плотность в каждой точке как внутри тела, так и на его поверхности.

*Потенциал тяготения простого слоя.* Вначале уясним понятие простого слоя. Пусть мы имеем две поверхности ( $\sigma$  и  $\sigma'$ ) (рис. 6), расположенные бесконечно близко друг к другу. Обозначим через  $\tau$  объем, заключенный между этими двумя поверхностями. Разобьем объем  $\tau$  на элементарные объемы  $d\tau$  с элементарными массами  $dm$  и будем неограниченно приближать поверхность  $\sigma'$  к  $\sigma$ , но при этом оставлять неизменной массу внутри элементарного объема.

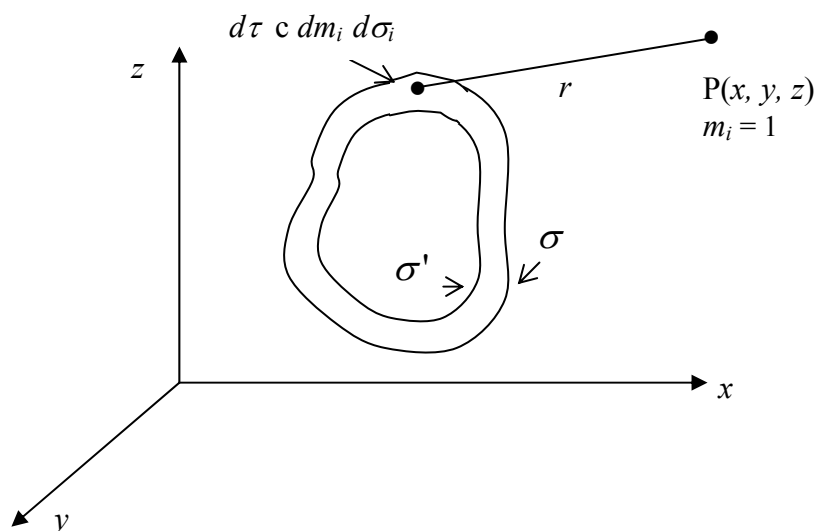


Рис. 6. Иллюстрация к потенциалу тяготения простого слоя

В результате масса будет сконденсирована на поверхность  $\sigma$ , и этот слой не будет иметь толщины. Такое распределение масс называют простым слоем.

Строго говоря, физически простого слоя в природе не существует, но понятие это вводится, так как упрощаются многие математические выкладки в теории потенциала. Формулу для потенциала тяготения простого слоя напишем по аналогии с формулой для потенциала тяготения объемных масс:

$$V = f \iint_{\sigma} \frac{\mu \cdot d\sigma}{r}, \quad (2.16)$$

где  $d\sigma$  – элементарный участок поверхности слоя;

$\mu$  – поверхностная плотность слоя;

$\sigma$  – поверхность слоя;  $r$  – расстояние от элементарного участка слоя до текущей точки P.

*Физический смысл потенциала силы тяготения.* Потенциал силы тяготения есть работа, которую совершает сила тяготения при перемещении единичной массы из бесконечности в данную точку.

Уравнение уровнямих поверхностей для потенциала силы тяготения имеет вид

$$V_i = \text{const.} \quad (2.17)$$

*Свойства потенциала силы тяготения* формулируются следующим образом:

1. Потенциалы тяготения объемных масс (2.15) и простого слоя (2.16) непрерывны, однозначны и конечны во всем пространстве.
2. Вне притягивающих масс потенциалы тяготения имеют непрерывные производные любых порядков.
3. Первые производные потенциала тяготения объемных масс непрерывны во всем пространстве.
4. Первые производные потенциала тяготения простого слоя терпят разрыв при пересечении слоя.
5. Вторые производные потенциала тяготения объемных масс меняются скачком там, где скачком меняется плотность.
6. Потенциал силы тяготения во внешнем пространстве удовлетворяет уравнению Лапласа (2.18), а во внутреннем – уравнению Пуассона (2.19).

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad (2.18)$$

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi f \delta, \quad (2.19)$$

где  $\delta$  – объемная плотность в данной точке.

7. На бесконечности потенциалы силы тяготения являются регулярными функциями, то есть удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} V &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \cdot V &= f \cdot M \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{r^2 \partial V}{\partial r} \right| &= f \cdot M \end{aligned} \right\}. \quad (2.20)$$

### 2.1.2. Сила тяжести, центробежная сила. Их потенциалы

На каждую точку  $M$ , находящуюся на земной поверхности, действует 2 силы: сила тяготения  $\overline{F}$  и центробежная сила  $\overline{K}$ , вызванная вращением Земли (рис. 7).

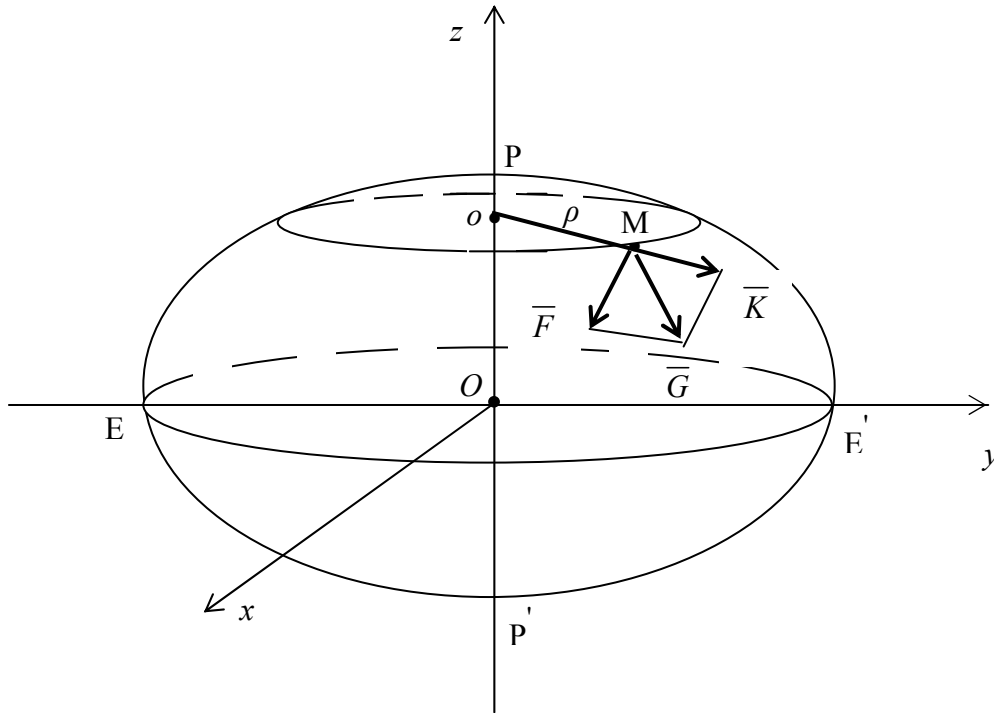


Рис. 7. Иллюстрация к понятию силы тяжести:

$\overline{F}$  – сила тяготения;  $\overline{K}$  – центробежная сила;  $\overline{G}$  – сила тяжести;  
 $\rho$  – радиус круга, по которому вращается точка  $M$  ( $\rho = OM$ )

Равнодействующую этих сил  $\overline{G}$  принято называть силой тяжести.

$$\overline{G} = \overline{F} + \overline{K}. \quad (2.21)$$

Величина центробежной силы  $\overline{K}$  определяется из выражения

$$K = \omega^2 \cdot \rho, \quad (2.22)$$

где  $\omega$  – угловая скорость вращения Земли;

$\rho$  – радиус малого круга, по которому вращается точка  $M$ .

Потенциал центробежной силы  $K$  обозначается буквой  $Q$ . Согласно определению математическое выражение для потенциала центробежной силы имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= K_x \\ \frac{\partial Q}{\partial y} &= K_y \\ \frac{\partial Q}{\partial z} &= K_z \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

В формулах (2.23)  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$  – проекции центробежной силы соответственно на оси  $x, y, z$ .

Потенциал центробежной силы находится по формуле

$$Q = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \quad (2.24)$$

Формула (2.24) доказывается, исходя из математического выражения для потенциала центробежной силы. Для Земли он равен нулю на полюсе и имеет максимальное значение на экваторе.

Оператор Лапласа для потенциала центробежной силы записывается в виде

$$\Delta Q = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = 2\omega^2. \quad (2.25)$$

Потенциал силы тяжести обозначается буквой  $W$  и равняется сумме потенциалов силы тяготения ( $V$ ) и центробежной силы ( $Q$ ):

$$W = V + Q. \quad (2.26)$$

Запишем выражение для потенциала силы тяжести тела или объемных масс:

$$W = f \iiint_{\tau} \frac{\delta d\tau}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \quad (2.27)$$

Потенциал силы тяжести обладает теми же свойствами, что и потенциал силы тяготения. Уравнение Лапласа для внешнего пространства и уравнение Пуассона для внутреннего пространства для потенциала силы тяжести выглядят следующим образом:

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 2\omega^2 \text{ – уравнение Лапласа;} \quad (2.28)$$



$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = -4\pi \cdot f \cdot \delta + 2\omega^2 - \text{уравнение Пуассона. (2.29)}$$

### 2.1.3. Вторые производные потенциала силы тяжести

Потенциал силы тяжести имеет шесть вторых производных:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}.$$

Если ось  $z$  направлена по направлению силы тяжести, а оси  $x$  и  $y$  расположены в плоскости горизонта и имеют направление, соответственно, на север и на восток, то физический смысл вторых производных будет следующим.

Производная  $\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$  есть *вертикальный градиент силы тяжести*, который показывает скорость изменения (уменьшения) силы тяжести с высотой.

Производные  $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}$  и  $\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}$  – это *горизонтальные градиенты силы тяжести*. Они характеризуют изменения силы тяжести в горизонтальной плоскости: первая – в направлении меридиана, вторая – в направлении первого вертикала. Знание горизонтальных градиентов силы тяжести дает возможность определить *полный горизонтальный градиент*, под которым понимается геометрическая сумма векторов  $\frac{\partial g}{\partial x}$  и  $\frac{\partial g}{\partial y}$ , то есть вектор (обозначим его  $\frac{\partial g}{\partial S}$ ), указывающий направление, в котором сила тяжести возрастает (или убывает) в плоскости горизонта быстрее всего. Величина этого вектора равна

$$\frac{\partial g}{\partial S} = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}\right)^2},$$

а угол  $\alpha$  с осью  $x$ , то есть азимут плоскости, в котором лежит полный горизонтальный градиент, определяется формулой

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}}{\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}}.$$

Кроме того, они определяют кривизну силовой линии:  $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}$  – в касательной к ней плоскости  $xz$ ;  $\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}$  – в касательной к силовой линии плоскости  $yz$ .

Производные  $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ ;  $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$ ;  $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$  характеризуют кривизну нормального сечения уровенной поверхности.

Вертикальный градиент  $\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$  зависит от плотности. Это означает, что редуцирование (перенос) с одной поверхности на другую во внутреннем пространстве невозможно без знания закона детального распределения плотности и, наоборот, при редуцировании силы тяжести во внешнем пространстве знание плотности для тела, которое создает потенциал силы тяжести, не требуется.

Из шести вторых производных потенциала силы тяжести четыре можно измерить с помощью вариометра. Это  $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$ ;  $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}$ ;  $\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}$  и разность  $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$ , которая обозначает меру отступления уровенной поверхности в данной точке от сферы.

#### **2.1.4. Изменение силы тяжести во времени**

Сила тяжести зависит от многих факторов. Она зависит от взаимного расположения Земли и других небесных тел, в основном, Луны и Солнца, от скорости вращения Земли, состояния атмосферы, уровня грунтовых вод, хозяйственной деятельности человека и т.д. Поэтому с течением времени величина и направление силы тяжести изменяются. Эти изменения принято делить на приливные и неприливные. Неприливные изменения силы тяжести, в свою очередь, можно разделить на вековые, периодические и непериодические.

Причиной вековых изменений силы тяжести является вековое изменение скорости вращения Земли, а также ряд геофизических факторов, связанных с перемещениями глубинных масс внутри Земли, например, движением литосферных плит.

Величины вековых изменений малы и в обычных гравиметрических измерениях не учитываются. Причиной неприливных периодических изменений силы тяжести являются различные метеорологические факторы: годовые и суточные колебания атмосферного давления, сезонные выпадения осадков, колебания уровня грунтовых вод и влажности почвы. Амплитуды этих изменений невелики и составляют менее 10 мкГал.

Непериодические вариации силы тяжести обусловлены неравномерностью скорости вращения Земли, землетрясениями и извержениями вулканов, хозяйственной деятельностью человека и т.д. Вызываемые этими явлениями изменения силы тяжести могут быть сравнительно велики. Например, вариации скорости вращения Земли вызывают изменения силы тяжести на 2 – 3 мкГал в месяц. Строительство котлована глубиной 1 м (например, при открытом способе добычи полезных ископаемых) вызовет изменение силы тяжести на границе этого котлована примерно на 0,05 мГал. Колебания уровня воды в водохранилище ГЭС на 25 м вызывают вариации силы тяжести в прибрежной зоне порядка 1,5 – 2,0 мГал.

Ясно, что факт изменения силы тяжести во времени необходимо учитывать в геодезических измерениях.

## **2.2. Нормальное гравитационное поле. Способы выбора нормального потенциала силы тяжести. Теорема Клеро. Формулы определения нормальной силы тяжести. Вторые производные нормального потенциала силы тяжести**

### ***2.2.1. Нормальное гравитационное поле. Способы выбора нормального потенциала силы тяжести***

В предыдущих лекциях мы ввели понятие гравитационного поля Земли как поля силы тяжести. Окружающее нас гравитационное поле, создаваемое в пространстве реальным телом Земли, является полем действительной силы тяжести и называется *действительным гравитационным полем*.

При определении действительное гравитационное поле (ДГП) рассматривают как сумму двух полей: нормального гравитационного поля (НГП) и аномального гравитационного поля (АГП), то есть

$$\text{ДГП} = \text{НГП} + \text{АГП} . \quad (2.30)$$

Под *нормальным гравитационным полем* понимается некоторое теоретическое гравитационное поле, которое создается *нормальной Землей*. При этом за нормальную Землю в гравиметрии принимают уровенный

земной эллипсоид, совпадающий с понятием земного эллипсоида, введенным в геодезической практике, масса которого равна массе реальной Земли вместе с атмосферой, с некоторым известным распределением масс внутри него.

Каждое из названных гравитационных полей имеет свои характеристики. Так характеристиками действительного гравитационного поля являются действительная сила тяжести ( $\bar{g}$ ), действительный потенциал силы тяжести ( $W$ ) и вторые производные действительного потенциала силы тяжести ( $W''$ ).

По аналогии с действительным гравитационным полем характеристиками нормального гравитационного поля являются нормальный потенциал силы тяжести ( $U$ ), нормальная сила тяжести ( $\bar{\gamma}$ ) и вторые производные нормального потенциала силы тяжести ( $U''$ ). Нормальный потенциал силы тяжести относится к важнейшим характеристикам нормального гравитационного поля. Его знание позволяет определить или рассчитать теоретическим путем оставшиеся характеристики нормального гравитационного поля.

Существует два *способа выбора нормального потенциала силы тяжести*: способ Стокса и способ Гельмерта.

*Способ Стокса* основан на использовании теоремы Стокса, согласно которой потенциал силы тяжести  $W$  и сама сила тяжести  $g$  могут быть однозначно определены во всем внешнем пространстве и на самой уровенной поверхности, если известны: общая масса  $M$  тела, угловая скорость  $\omega$  вращения тела вокруг неизменной оси и форма  $\sigma$  уровенной поверхности, целиком охватывающей все притягивающие массы.

Таким образом, в способе Стокса заданной считается уровенная поверхность силы тяжести и определению подлежит соответствующий ей нормальный потенциал силы тяжести.

В *способе Гельмерта*, наоборот, задается нормальный потенциал силы тяжести и для него подбирается уровенная поверхность. Для задания нормального потенциала Гельмерт использует прием разложения действительного потенциала силы тяжести  $W$  в ряд по сферическим функциям. Сумма первых трех членов разложения этого ряда принимается за нормальный потенциал силы тяжести. Выражение для нормального потенциала силы тяжести в методе Гельмерта имеет вид

$$U(\rho, \Theta, \lambda) = \frac{fM}{\rho} + \frac{f(A_m - C)}{\rho^3} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \Theta - \frac{1}{2} \right) + \frac{\omega^2 \rho^2}{2} \sin^2 \Theta, \quad (2.31)$$

где  $U$  – нормальный потенциал силы тяжести;  
 $\rho, \Theta, \lambda$  – сферические координаты текущей точки;  
 $f$  – гравитационная постоянная;  
 $M$  – масса Земли;  
 $fM$  – фундаментальная геоцентрическая постоянная;  
 $\omega$  – угловая скорость вращения Земли;  
 $C$  – полярный момент инерции Земли;  
 $A_m$  – средний экваториальный момент инерции Земли;

$$A_m = \frac{A + B}{2}. \quad (2.32)$$

Для нормального потенциала, представленного (2.31), форма уровневой поверхности нормальной Земли, то есть поверхности уровня эллипсоида, определится выражением для  $U_0$ :

$$U_0 = \frac{fM}{a} \left( 1 + \frac{\alpha}{3} + \frac{q}{3} \right), \quad (2.33)$$

где 
$$q = \frac{\omega^2 a}{\gamma_e} \approx \frac{\omega^2 a^3}{fM}. \quad (2.34)$$

Формула (2.33) определяет значение, которое принимает нормальный потенциал силы тяжести на поверхности уровня эллипсоида  $U = U_0$  с параметрами:  $fM$  (геоцентрическая гравитационная постоянная),  $\alpha$  (сжатие земного эллипсоида),  $a$  (большая полуось эллипсоида) и  $\omega$  (угловая скорость вращения). Перечисленные четыре параметра полностью определяют нормальное гравитационное поле Земли.

Производная от нормального потенциала  $U$  по направлению внешней нормали  $\bar{n}$  к уровневой поверхности нормальной Земли дает значение нормальной силы тяжести  $\gamma$ .

$$\gamma = - \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right). \quad (2.35)$$

### **2.2.2. Теорема Клеро. Формулы определения нормальной силы тяжести**

Клеро дал вывод своей теоремы (1743 г.), основываясь на исследованиях фигур равновесия тел с неоднородной массой. При этом он принял Землю по форме за эллипсоид вращения с малым полярным сжатием, со-

стоящий внутри из эллипсоидальных, однородных по плотности слоев, имеющих общий центр и совпадающие главные оси инерции.

Теорема Клеро позволяет определить нормальную силу тяжести на поверхности земного эллипсоида и сжатие земного эллипсоида. Она состоит из двух формул.

Первая формула теоремы Клеро устанавливает закон изменения нормальной силы тяжести на поверхности земного эллипсоида. Эта формула с учетом величин порядка второй степени сжатия имеет вид

$$\gamma_0 = \gamma_e(1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B), \quad (2.36)$$

$\gamma_0$  – значение нормальной силы тяжести на поверхности уровенного эллипсоида;

$\gamma_e$  – значение нормальной силы тяжести на экваторе;

$B$  – широта точки;

$\beta$  – коэффициент, показывающий избыток силы тяжести на полюсе по сравнению с экватором, выраженный в относительной форме:

$$\beta = \frac{\gamma_P - \gamma_e}{\gamma_P}, \quad (2.37)$$

где  $\gamma_P$  – значение нормальной силы тяжести на полюсе;

$\gamma_P = 983,2$  гал,  $\gamma_e = 978,0$  гал;

$\beta_1$  – коэффициент, зависящий от сжатия Земли:

$$\beta_1 = \frac{\alpha^2}{8} + \frac{\alpha \beta}{4}. \quad (2.38)$$

Вторая формула теоремы Клеро с членами второго порядка записывается в виде

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2}q - \frac{17}{14}\alpha q, \quad (2.39)$$

где  $q$  определяется по формуле (2.34).

Из 2.39 может быть вычислено сжатие  $\alpha$  эллипсоида:

$$\alpha = \frac{\frac{5}{2}q - \beta}{1 + \frac{17}{14}q}. \quad (2.40)$$

Вторая формула теоремы Клеро позволяет определить сжатие  $\alpha$  земного эллипсоида по результатам гравиметрических измерений, выполненных на поверхности Земли.

В практике гравиметрических и геодезических работ широко используется первая формула теоремы Клеро, для которой определены численные значения коэффициентов  $\gamma_e$ ,  $\beta$  и  $\beta_1$  по экспериментальным данным.

В странах бывшего СССР используется *формула Гельмерта* (1901 – 1908 гг.), которая, по сути, как и другие приведенные ниже формулы, является первой формулой теоремы Клеро с численными значениями коэффициентов.

Формула Гельмерта записывается в виде

$$\gamma_0 = 978030 \cdot (1 + 0,005302 \sin^2 B - 0,000007 \sin^2 2B), \quad (2.41)$$

$\gamma_0$  дано в мГал.

Данную формулу применяют в странах бывшего СССР вплоть до настоящего времени. Она была выведена Гельмертом на основании результатов измерения силы тяжести на 1603 пунктах. Значение сжатия Земли, соответствующее формуле Гельмерта, то есть вычисленное по формуле (2.40) при  $\beta = 0,005302$ , оказалось равным 1:298,2 и практически совпадающим со сжатием эллипсоида Ф.Н. Красовского.

В некоторых странах используется *формула нормальной силы тяжести Кассиниса*, рекомендованная в качестве «международной формулы» в 1930 г. на съезде Международного геодезического союза в Стокгольме.

Формула Кассиниса имеет вид

$$\gamma_0 = 978049 \cdot (1 + 0,0052884 \sin^2 B - 0,0000059 \sin^2 2B). \quad (2.42)$$

Эта формула соответствует эллипсоиду Хейфорда со сжатием  $\alpha = 1:297$ .

*Международная формула для геодезической референц-системы 1967 года*, рекомендованная на XV Генеральной ассамблее Международного геодезического и геофизического союза в Москве (1971 г.), имеет следующие коэффициенты:

$$\gamma_0 = 978031,8 \cdot (1 + 0,005324 \sin^2 B - 0,0000059 \sin^2 2B). \quad (2.43)$$

Следует отметить, что коэффициент  $\gamma_e$  формул Гельмерта и Кассиниса нормальной силы тяжести нуждается в уточнении за счет погрешности Потсдамской системы на -14 мГал.

И, наконец, в 1984 году Мориц опубликовал *международную формулу для геодезической референц-системы 1980 года* со следующими коэффициентами:

$$\gamma_0 = 978032,7 \cdot (1 + 0,005324 \sin^2 B - 0,0000058 \sin^2 2B). \quad (2.44)$$

Коэффициенты в двух последних формулах получены с использованием спутниковых данных и с учетом массы атмосферы. Сжатия эллипсоидов для них составляют, соответственно, 1:298,247 и 1:298,257.

Переход той или иной страны к новой формуле нормальной силы тяжести связан с перевычислением большого числа гравиметрических данных, с изменением гравиметрических карт и каталогов. Поэтому, учитывая чисто служебный характер нормальной формулы, не следует прибегать к частому изменению ее коэффициентов. В случае необходимости проще вводить поправки в конечные выводы.

### 2.2.3. Вторые производные нормального потенциала силы тяжести

Нормальный потенциал силы тяжести так же, как и действительный потенциал, имеет шесть вторых производных:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}.$$

Вторые производные нормального потенциала силы тяжести определяют компоненты градиента нормальной силы тяжести и кривизну уровневых поверхностей и силовых линий нормального гравитационного поля. Поясним основные из них.

Производная  $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$  определяет вертикальный градиент нормальной силы тяжести, показывающий скорость убывания нормальной силы тяжести с высотой.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = [-0,30855 (1 + 0,00071 \cos 2B)H + 0,0723 \cdot 10^{-6} H^2] \text{ мГал/м.} \quad (2.45)$$

Часто при расчетах в формуле (2.45) достаточно ограничиться первым членом, принимая

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \approx -0,3086 \text{ мГал/м} = -0,3086 \text{ гал/км}. \quad (2.46)$$

С увеличением высоты над уровнем эллипсоидом нормальная сила тяжести убывает; на высоте  $H_M$  (рис. 8) точки М местности нормальная сила тяжести равна

$$\gamma^M = \gamma_0^M + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} H_M \approx \gamma_0^M - 0,3086 \cdot H_M, \quad (2.47)$$



где  $\gamma_0^M$  – значение нормальной силы тяжести в проекции точки М на поверхности уровенного эллипсоида;  
 $\gamma^M$  – значение нормальной силы тяжести в точке М, расположенной на земной поверхности;  
 $H_M$  – высота точки М.

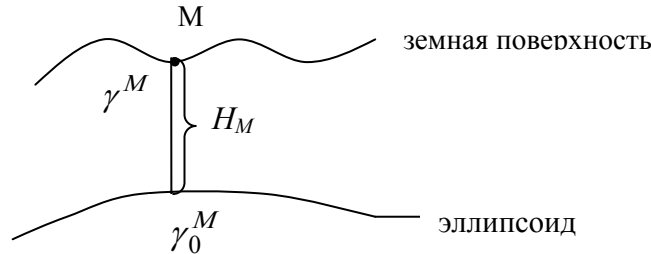


Рис. 8. Редукция нормальной силы тяжести  $\gamma_0^M$  с поверхности уровенного эллипсоида на поверхность Земли

Следует помнить, что формулы (2.45) и (2.46) дают значение нормального вертикального градиента вблизи земной поверхности.

Производная  $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$  обозначает горизонтальный градиент нормальной силы тяжести в направлении меридиана.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\gamma_e \beta}{M} \sin 2B, \quad (2.48)$$

где  $M$  – радиус кривизны меридиана;  $\gamma_e$  – значение нормальной силы тяжести на экваторе.

Производные  $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$  и  $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$  равны нулю, так как нормальная сила тяжести от долготы не зависит.

### 2.3. Аномальное гравитационное поле. Аномалии силы тяжести и их природа. Косвенная интерполяция аномалий силы тяжести.

#### Характеристики аномального гравитационного поля

##### 2.3.1. Аномальное гравитационное поле. Аномалии силы тяжести

Аномальное гравитационное поле Земли (АГП) характеризует отклонение действительного гравитационного поля Земли (ДГП) от нормального гравитационного поля Земли (НГП). Как известно из предыду-

щего материала, характеристиками действительного гравитационного поля являются действительная сила тяжести  $\bar{g}$ , действительный потенциал силы тяжести  $W$  и вторые производные действительного потенциала силы тяжести  $W''$ , а характеристиками нормального гравитационного поля, соответственно, – нормальная сила тяжести  $\bar{\gamma}$ , нормальный потенциал силы тяжести  $U$  и вторые производные нормального потенциала силы тяжести  $U''$  (рис. 9). Указанные характеристики каждого из полей, конечно же, отличаются между собой. В соответствии с этим возникают характеристики аномального гравитационного поля, которые являются ничем иным как различием между соответствующими характеристиками действительного и нормального гравитационных полей.

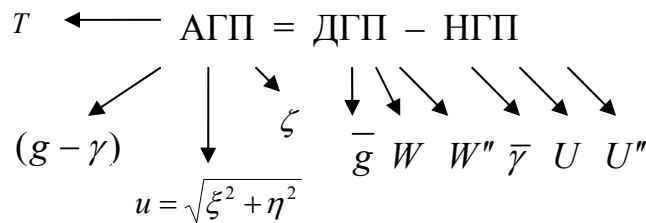


Рис. 9. Аномальное гравитационное поле и его характеристики:

$(g - \gamma)$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $T$  – основные характеристики аномального гравитационного поля, обозначающие, соответственно, аномалию силы тяжести, составляющую отклонения отвеса в меридиане, составляющую отклонения отвеса в первом вертикале, аномалию высоты и возмущающий потенциал

Разберем эти различия, чтобы четко уяснить характеристики аномального гравитационного поля (АГП). При этом заметим, что указанные различия обусловлены возмущающими массами, под которыми понимают отступления распределения масс реальной Земли от теоретического распределения масс принятой нормальной Земли.

Действительная сила тяжести  $\bar{g}$  отличается от нормальной силы тяжести  $\bar{\gamma}$  по величине и по направлению. Разность величин действительной силы тяжести и нормальной силы тяжести в точке наблюдения называется аномалией силы тяжести. Отклонение направления действительной силы тяжести от направления нормальной силы тяжести приводит к понятию отклонения отвеса.

Согласно приведенному определению выражение для аномалии силы тяжести в общем случае имеет вид

$$\Delta g = g - \gamma. \quad (2.49)$$

В зависимости от того, какие возмущающие массы вызвали отклонения  $g$  от  $\gamma$ , различают несколько видов аномалий силы тяжести, которые могут быть:

- аномалиями в свободном воздухе;
- топографическими аномалиями;
- аномалиями Буге;
- аномалиями Фая;
- аномалиями Прея.

Математически это выражается различными поправками за конкретные возмущающие массы, введенными в формуле (2.49) в действительную силу тяжести, и поправкой за высоту в нормальную силу тяжести.

Кроме того, все перечисленные аномалии силы тяжести могут быть смешанными и чистыми. Чистые аномалии силы тяжести образуются в том случае, если  $g$  и  $\gamma$  относятся к одной точке пространства. Если же  $g$  и  $\gamma$  отнесены к разным точкам пространства, то возникают смешанные аномалии силы тяжести, с которыми чаще всего мы и имеем дело на практике. Приступим к рассмотрению основных видов аномалий силы тяжести.

*Аномалии в свободном воздухе* учитывают все возмущающие массы, которые расположены как на поверхности Земли, так и внутри нее, то есть в этом случае никакой поправки в измеренное значение действительной силы тяжести не вводится, а учитывается только поправка за редуцирование нормальной силы тяжести с поверхности эллипсоида на поверхность Земли (поправка за высоту).

Таким образом,

$$(g - \gamma)_{св.в.} = g_M - \gamma_M. \quad (2.50)$$

С учетом формулы (2.47) запишем

$$(g - \gamma)_{св.в.} = g_M - (\gamma_0^M - 0,3086H_M). \quad (2.51)$$

Формулы (2.50) и (2.51) определяют чистую аномалию в свободном воздухе. Обозначения для этих формул даны на рис. 10.

Однако на практике обычно работают в системе нормальных высот. Нормальная высота дает расстояние от поверхности геоида (квазигеоида) до земной поверхности (рис. 10). Поэтому нормальные высоты всегда несколько меньше геодезических. Если мы нормальную высоту отложим от поверхности эллипсоида, то получим точку N. Подставив в формулу (2.51) вместо геодезической нормальную высоту, получим смешанную аномалию силы тяжести в свободном воздухе

$$(g - \gamma)_{св.в.} = g_M - (\gamma_0^M - 0,3086H_M^\gamma). \quad (2.52)$$

Обозначения для формулы (2.52) также следуют из рис. 10.

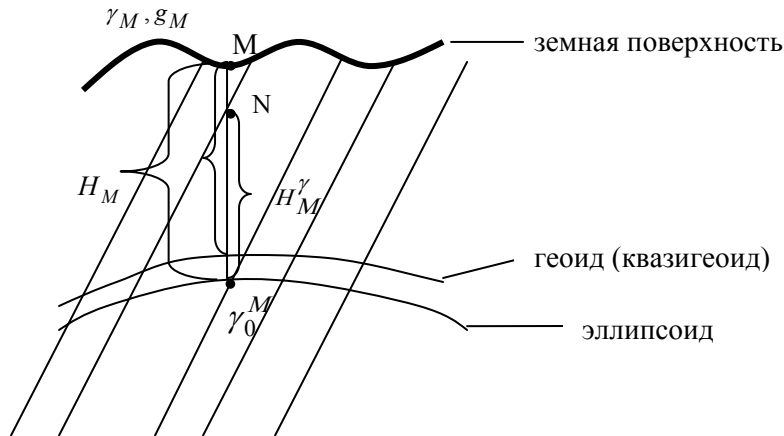


Рис. 10. Иллюстрация к понятию аномалии в свободном воздухе:

$g_M$  и  $\gamma_M$  – действительная и нормальная силы тяжести в точке М;

$H_M^{\gamma}$  – нормальная высота точки М;  $H_M$  – геодезическая высота точки М;

$\gamma_0^M$  – нормальная силы тяжести в проекции точки на поверхность эллипсоида.

Заштрихованы учитываемые массы

Топографическая аномалия силы тяжести возникает в том случае, когда из аномалии в свободном воздухе убирается эффект возмущающих масс топографического слоя, то есть масс, расположенных между уровнем моря и физической поверхностью Земли (рис. 11).

В действительную силу тяжести здесь вводится так называемая поправка за топографический слой  $\Delta g_{mon.}$ .

$$(g - \gamma)_{mon.} = (g - \gamma)_{св.в.} + \Delta g_{mon.}, \quad (2.53)$$

где  $\Delta g_{mon.}$  – поправка за топографический слой;

$(g - \gamma)_{mon.}$  – топографическая аномалия силы тяжести.

Или с учетом формулы (2.47)

$$(g - \gamma)_{mon.} = g + \Delta g_{mon.} - (\gamma_0^M - 0,3086H). \quad (2.54)$$

Ясно, что если  $H = H_M$ , то получаем чистую топографическую аномалию, а если  $H = H_M^{\gamma}$ , то смешанную.

В формулах (2.53) и (2.54)  $\Delta g_{mon.}$  вычисляется по достаточно сложной формуле

$$\Delta g_{mon.} = F_z = -f \iiint_{\tau} \frac{\delta \cos(\bar{r} \wedge \bar{g}) d\tau}{r^2}, \quad (2.55)$$

где  $f$  – гравитационная постоянная;  $\delta$  – текущая плотность топографического слоя;  $(\bar{r} \wedge \bar{g})$  – угол между направлением силы тяжести (оси  $z$ ) и направлением на текущую точку (см. рис. 11). Остальные обозначения ясны из рис. 11.

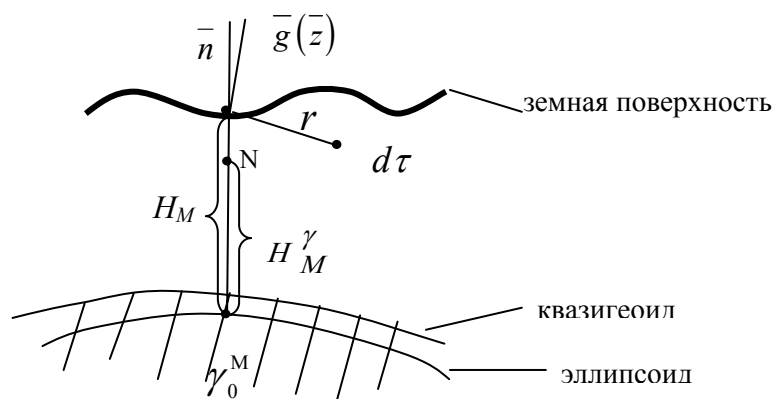


Рис. 11. Иллюстрация к понятию топографических аномалий силы тяжести:

$\bar{z}$  – направление оси  $z$ , совпадающее с направлением  $\bar{g}$ ;

$d\tau$  – текущий элементарный объем топографического слоя;

$r$  – текущее расстояние от точки наблюдения до элементарного объема;  
остальные обозначения даны на рис. 10

Так как вычисление поправки за топографический слой производится по сложной формуле (2.55), то на практике вместо топографической аномалии часто используют более простую для вычислений аномалию Буге.

При вычислении *аномалии Буге* топографический слой принимают за плоский слой бесконечного простираения, проведенный на высоте точки наблюдения (рис. 12).

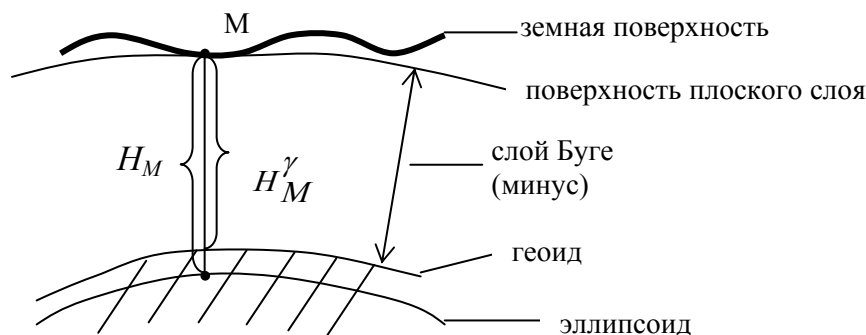


Рис. 12. Иллюстрация к понятию аномалии Буге.

Заштрихованы учитываемые массы

В этом случае в значение действительной силы тяжести вводится поправка Буге, и выражение для вычисления аномалии Буге получится следующим:

$$(g - \gamma)_B = (g - \gamma)_{св.в.} + \Delta g_B = (g - \gamma)_{св.в.} - 2\pi f \delta H, \quad (2.56)$$

где  $(g - \gamma)_B$  – аномалия Буге;  $\Delta g_B = (-2\pi f \delta H)$  – поправка Буге;

$\delta$  – средняя плотность промежуточного слоя;  $H$  – высота точки М.

Если в формуле (2.56)  $H$  – геодезическая высота, то получаем чистую аномалию Буге, если нормальная – смешанную аномалию Буге.

Отметим, что выражение (2.56) справедливо только для равнинных районов. В горных районах при вычислении аномалии Буге учитывают еще поправку за рельеф на высоте точки наблюдения, то есть на уровне этой высоты рельеф как бы выравнивают (рис. 13).

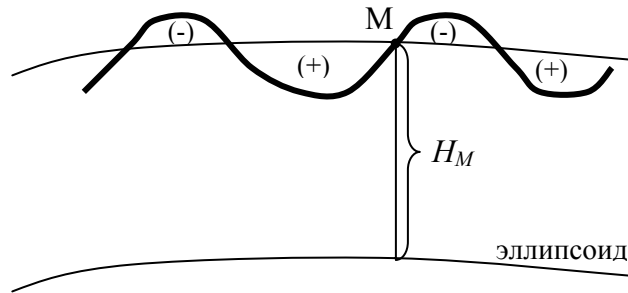


Рис. 13. Иллюстрация к введению поправки за рельеф:  
(+) – массы добавляют; (-) – массы убирают

Тогда выражение для аномалии Буге будет иметь вид

$$(g - \gamma)_B = g - 2\pi f \delta H + \Delta g_{рел.} - (\gamma_0 - 0,3086H), \quad (2.57)$$

где  $\Delta g_{рел.}$  – поправка за рельеф.

*Аномалия Фая* получается в случае, когда в действительную силу тяжести введена только поправка за рельеф (рис. 14).

$$(g - \gamma)_\phi = g + \Delta g_{рел.} - (\gamma_0 - 0,3086H), \quad (2.58)$$

где  $(g - \gamma)_\phi$  – аномалия Фая;  $\Delta g_{рел.}$  – поправка за рельеф, получаемая при выравнивании рельефа на высоте точки наблюдения.

Рассмотренные виды аномалии силы тяжести применяются в зависимости от поставленных задач. Так геодезистов чаще всего интересуют аномалии в свободном воздухе, геологов – аномалии Буге. Геодезисты используют также аномалии Буге и топографические аномалии для косвенного интерполирования аномалий силы тяжести. Вопрос косвенного интерпо-

лирования мы разберем несколько позднее, а сейчас рассмотрим оставшиеся характеристики аномального гравитационного поля, показанные на рис. 9.

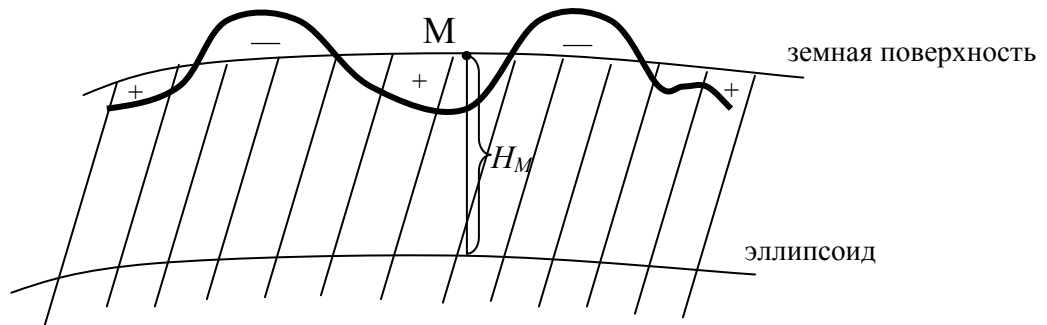
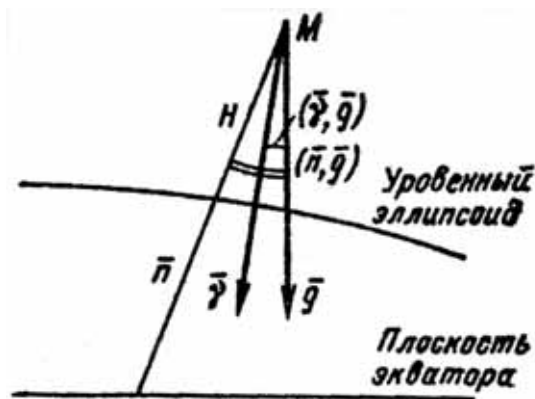


Рис. 14. Иллюстрация к понятию аномалии Фая

Уклонения отвеса характеризуют отличия направления действительной силы тяжести от направления нормальной силы тяжести и от направления нормали к эллипсоиду (рис. 15). Существует два вида уклонения отвеса: гравиметрическое (абсолютное) и астрономо-геодезическое (относительное).

Угол между направлением нормальной силы тяжести и направлением действительной силы тяжести есть гравиметрическое уклонение отвеса:

$$(\bar{\gamma} \wedge \bar{g}) = u_{гр}. \quad (2.59)$$



- $\bar{g}$  – направление отвесной линии или действительной силы тяжести;
- $\bar{\gamma}$  – направление нормальной силы тяжести;
- $\bar{n}$  – направление нормали к поверхности эллипсоида;
- $u_{a-г}$  – астрономо-геодезическое уклонение отвеса;
- $u_{гр}$  – гравиметрическое уклонение отвеса

Рис. 15. Иллюстрация к понятию уклонений отвеса

Угол между направлением действительной силы тяжести и направлением нормали к эллипсоиду есть астрономо-геодезическое уклонение отвеса:

$$(\bar{g} \wedge \bar{n}) = u_{a-г}. \quad (2.60)$$

На практике чаще всего используют не полные значения уклонений отвеса  $u$ , а их составляющие в меридиане и в первом вертикале, то есть

проекции угла  $u$  на плоскость меридиана  $\xi$  и на плоскость первого вертикала  $\eta$ . Эти проекции связаны с полными отклонениями отвеса следующим образом:

$$u_{zp.} = \sqrt{\xi_{zp.}^2 + \eta_{zp.}^2}, \quad (2.61)$$

$$u_{a-z.} = \sqrt{\xi_{a-z.}^2 + \eta_{a-z.}^2}, \quad (2.62)$$

$\xi_{zp.}, \eta_{zp.}, \xi_{a-z.}, \eta_{a-z.}$  – составляющие гравиметрического и астрономо-геодезического отклонений отвеса.

Формулы перехода от составляющих гравиметрических отклонений отвеса к составляющим астрономо-геодезических отклонений отвеса имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \xi_{a-z.} &= \xi_{zp.} + 0,171'' \cdot \sin(2B) \cdot H_{KM}^\gamma \\ \eta_{a-z.} &= \eta_{zp.} \end{aligned} \right\}, \quad (2.63)$$

где  $B$  – геодезическая широта;  $H_{KM}^\gamma$  – нормальная высота в км.

*Аномалия высоты* – это разность между геодезической высотой  $H_M$  и нормальной высотой  $H_M^\gamma$  (рис. 16).

$$\zeta = H_M - H_M^\gamma, \quad (2.64)$$

где  $\zeta$  – аномалия высоты.

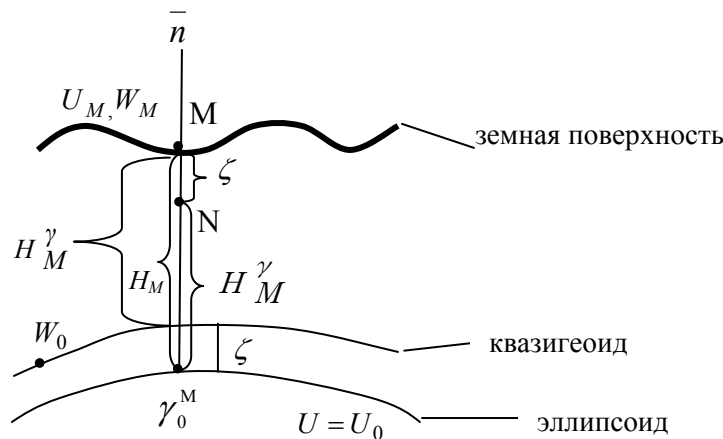


Рис. 16. Иллюстрация к понятию аномалии высоты:

$W_0$  – потенциал силы тяжести в исходном пункте нивелирования (на поверхности квазигеоида);  $U_0$  – нормальный потенциал силы тяжести на поверхности эллипсоида;

$U_M$  – нормальный потенциал силы тяжести в точке М;  $W_M$  – действительный потенциал силы тяжести в точке М



Из рис. 16 также следует второе определение аномалии высоты как высоты поверхности квазигеоида над поверхностью эллипсоида.

Понятие квазигеоид (почти геоид) введено Молоденским. Поверхность квазигеоида получается путем отложения нормальной высоты вниз от земной поверхности.

Геодезические и нормальные высоты связаны с потенциалами силы тяжести выражениями

$$H_M = \frac{U_0 - U_M}{\gamma_m}, \quad (2.65)$$

$$H_M^\gamma = \frac{W_0 - W_M}{\gamma_m}, \quad (2.66)$$

где  $\gamma_m$  – среднее значение нормальной силы тяжести на отрезке нормали, опущенной из точки М на эллипсоид.

*Возмущающий потенциал*  $T$  определяется как разность между действительным потенциалом силы тяжести  $W$  и нормальным потенциалом силы тяжести  $U$ :

$$T = W - U. \quad (2.67)$$

Возмущающий потенциал является важнейшей характеристикой аномального гравитационного поля. К его определению сводится задача определения гравитационного поля Земли (задача Стокса и задача Молоденского).

### ***2.3.2. Косвенная интерполяция аномалий силы тяжести***

Аномалии силы тяжести являются исходным материалом для составления гравиметрических карт, которые используются при вычислении поправок за неоднородность гравитационного поля в результаты геодезических измерений, при поисках месторождений полезных ископаемых и в других практических областях науки, техники и народного хозяйства.

Как следует из всех выше приведенных формул, аномалии силы тяжести можно вычислить только в тех точках, где имеются измеренные значения ускорения силы тяжести  $g$ , то есть в гравиметрических пунктах. Ввиду того, что гравиметрические пункты расположены дискретно на земной поверхности, а на практике возникает необходимость в знании аномалии силы тяжести в любой ее точке, в общем случае, не совпадающей с гравиметрическим пунктом, то возникает задача интерполирования аномалий силы тяжести.

Геодезистов интересуют, преимущественно, аномалии в свободном воздухе; однако именно эти аномалии на земной поверхности изменяются по сложному закону, не подчиняющемуся закону линейного интерполирования. Исследования показали, что наибольшее влияние на сложный характер изменения аномалий в свободном воздухе на земной поверхности оказывают топографические массы. Так как в горных районах ускорение силы тяжести обычно измеряют в долинах, а геодезические пункты находятся на вершинах, то определение значения аномалии в свободном воздухе на геодезическом пункте методом линейного интерполирования значений этих аномалий в точках, расположенных в долинах, будет заведомо неправильным. В связи с этим в Советском Союзе разработан метод косвенного интерполирования аномалий силы тяжести, который успешно применяется на практике и в настоящее время.

Сущность его заключается в том, что от аномалий в свободном воздухе, вычисленных по измеренным значениям ускорения силы тяжести на гравиметрических пунктах, переходят к аномалиям Буге или топографическим аномалиям, характер изменения которых на земной поверхности является плавным и подчиняется закону линейного интерполирования. Значения последних аномалий интерполируют, а затем в точках интерполирования восстанавливают аномалии в свободном воздухе. Поясним это с помощью рис. 17.

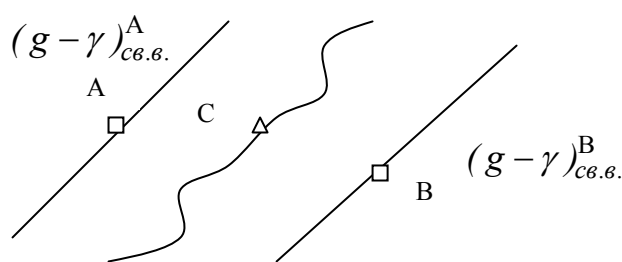


Рис. 17. Иллюстрация к методу косвенной интерполяции аномалии силы тяжести

На рис. 17 А и В – гравиметрические пункты, на которых по результатам гравиметрических измерений вычислены значения аномалий в свободном воздухе, соответственно,  $(g - \gamma)_{св.в.}^A$  и  $(g - \gamma)_{св.в.}^B$ . Чтобы определить с помощью интерполирования аномалию в свободном воздухе в точке С, поступают следующим образом: перевычисляют аномалии в свободном воздухе в точках А и В в аномалии Буге согласно формулам (2.68), затем с

помощью линейного интерполирования определяют значения аномалии Буге в точке С и по формуле (2.69) восстанавливают значение аномалии в свободном воздухе в точке С.

$$\left. \begin{aligned} (g - \gamma)_B^A &= (g - \gamma)_{св.в.}^A - 2\pi f \delta \cdot H_A \\ (g - \gamma)_B^B &= (g - \gamma)_{св.в.}^B - 2\pi f \delta \cdot H_B \end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

$$(g - \gamma)_{св.в.}^C = (g - \gamma)_B^C + 2\pi f \delta \cdot H_C. \quad (2.69)$$

В последних формулах  $H_A, H_B, H_C$  – высоты в точках А, В, С соответственно.

### 2.3.3. Числовые характеристики аномального гравитационного поля

Аномалии силы тяжести на земной поверхности в среднем составляют несколько десятков миллигал, в горах и районах глубоководных впадин они могут достигать несколько сотен миллигал. Экстремальные значения аномалий силы тяжести в свободном воздухе на поверхности Земли следующие:

- гора Мауна-Кеа (о. Гавайи,  $H = 4214$  м) +669 мГал;
- желоб Пуэрто-Рико (Атлантический океан,  $H = -9218$  м) –380 мГал;
- Марианская впадина (запад Тихого океана,  $H = -8240$  м) –244 мГал.

Аномалии силы тяжести могут быть как положительными, так и отрицательными. На протяжении нескольких тысяч километров знак аномалии силы тяжести может сохраняться, с положением материков аномалии силы тяжести не коррелируют. Области минимальных аномалий ( $-40 \div -50$  мГал) располагаются в Индийском океане к югу от Индии и Австралии, области максимальных аномалий ( $40 \div 50$  мГал) – на юге Индийского и в западной части Тихого океанов, а также в горах Южной Америки.

Уклонения отвесных линий на поверхности Земли в экстремальном случае могут достигать минуты; в основном, их значения составляют секунды и доли секунд. Наиболее резко они изменяются в районах с неоднородным строением земной коры.

Аномалии вторых производных потенциала силы тяжести обусловлены, преимущественно, местными близповерхностными неоднородностями земной коры и притяжением рельефа. В среднем они составляют несколько сотен Этивеш, в горах – несколько тысяч Этивеш.

*Вопросы для проверки усвоения материала по теме 2*

1. Силы, характеризующие гравитационное поле Земли, и их потенциалы.
2. Факторы, влияющие на изменение силы тяжести во времени.
3. Роль введения понятия в гравиметрии нормального гравитационного поля Земли.
4. Как вычислить нормальную силу тяжести на поверхности референц-эллипсоида, и будет ли она равна значению нормальной силы тяжести в проекции этой точки на поверхности Земли?
5. Как можно обосновать отличие нормального гравитационного поля Земли от действительного?
6. Есть ли связь между теоремой Клеро и формулами Гельмерта и Кассиниса по определению нормальной силы тяжести? Можно ли сказать, что первая формула теоремы Клеро является следствием формулы Гельмерта?
7. Чем отличаются аномалии в свободном воздухе от аномалий Буге, Фая и топографических?
8. Отличие астрономо-геодезических отклонений отвеса от гравиметрических.
9. Что такое составляющие отклонения отвеса? Какова связь между составляющими астрономо-геодезического отклонения отвеса и составляющими гравиметрического отклонения отвеса?
10. Какая характеристика аномального гравитационного поля Земли дает отличие между геодезическими и нормальными высотами?
11. Как связаны вторые производные действительного (или нормального) потенциала силы тяжести с введением поправки за высоту в действительную (или нормальную) силу тяжести?
12. Может ли значение аномалии силы тяжести на Земле характеризоваться величиной более 1000 мГал?
13. Где величины отклонений отвеса больше: в горах или в равнинной местности? Каких экстремальных величин они достигают на поверхности Земли?
14. Почему на практике применяют метод косвенной интерполяции аномалий силы тяжести?

### **3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ И ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ**

#### **3.1. Исходные данные для определения поверхности и гравитационного поля Земли. Связь возмущающего потенциала с аномалиями силы тяжести, отклонением отвеса и аномалией высоты**

Как известно, определение фигуры и гравитационного поля Земли является основной задачей высшей геодезии. Эту задачу можно решить несколькими методами: астрономо-геодезическим; физическим или гравиметрическим, спутниковым геометрическим; спутниковым динамическим; путем использования наблюдений далеких космических объектов (космических летательных аппаратов, целей на поверхности Луны); комбинацией различных методов.

1. *Астрономо-геодезический метод.* Исходными данными в этом методе служит весь комплекс наземных геодезических измерений, то есть угловых, линейных, нивелирования, а также астрономические определения широт, долгот и азимутов. При решении задачи редуцирования и интерполирования здесь привлекают незначительный объем гравиметрических данных. Этот метод является старейшим методом изучения фигуры Земли, известным еще с античных времен. Однако его возможности в изучении внешнего гравитационного поля ограничены.

2. *Физический или гравиметрический метод.* Исходными данными в этом методе являются измеренные значения ускорения силы тяжести, полученные в результате гравиметрической съемки, выполненной на всей поверхности Земли и преобразованные в аномалии силы тяжести. При изучении фигуры Земли его возможности невелики, но он является весьма эффективным при изучении внешнего гравитационного поля Земли, так как позволяет выявлять такие детали поля, которые не позволяет выявлять никакой из других методов. Однако он уступает динамическому спутниковому методу при изучении основных особенностей поля.

3. *Астрономо-гравиметрический метод* объединяет два первых подхода. Исходными данными в нем являются все виды астрономо-геодезических и гравиметрических измерений, а также результаты спутниковых наблюдений. Этот метод лучше всего подходит для детальных исследований.

В зависимости от поставленных целей при решении основной научной задачи высшей геодезии используют и другие сочетания перечисленных методов. Так, например, сочетание спутникового геометрического и спутникового динамического методов, а также сочетание длиннобазисной радиоинтерферометрии с наблюдениями далеких космических объектов лучше всего подходят для планетарных исследований.

Остановимся более подробно на втором методе решения основной научной задачи высшей геодезии, то есть физическом или гравиметрическом. Схема решения задачи в данном случае является следующей.

Как известно, действительное гравитационное поле (ДГП) Земли может быть представлено в виде суммы двух полей: нормального (НГП) и аномального (АГП).

$$\text{ДГП} = \text{НГП} + \text{АГП} \quad (3.1)$$

При заданной нормальной Земле НГП является известным, а значит, известны все его характеристики  $(\bar{\gamma}, U, U'')$ . Следовательно, для того, чтобы определить ДГП, нужно определить все характеристики АГП  $((g - \gamma), \xi, \eta, \zeta, T)$  (раздел 2.3.1). Из перечисленных характеристик АГП аномалию силы тяжести  $(g - \gamma)$  можно вычислить по результатам гравиметрических измерений на поверхности Земли.

Задача сводится к определению оставшихся характеристик АГП:  $\xi, \eta, \zeta, T$ .

В свою очередь, возмущающий потенциал  $T$  связан математически строго со всеми характеристиками АГП через следующие формулы:

– Связь  $T$  с  $(g - \gamma)$  (рис. 18):

$$\left( \frac{\partial T}{\partial H} \right)_M - \frac{1}{\gamma_m} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial H} \right)_N \cdot T_M = -(g_M - \gamma_N) - \frac{1}{\gamma_m} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial H} \right)_N \cdot (W_0 - U_0), \quad (3.2)$$

где  $W_0$  – потенциал силы тяжести в исходном пункте нивелирования (на поверхности квазигеоида);

$U_0$  – потенциал силы тяжести на поверхности эллипсоида;

$(g_M - \gamma_N)$  – смешанная аномалия силы тяжести;

$\gamma_m$  – среднее значение нормальной силы тяжести в промежутке от поверхности эллипсоида до поверхности Земли.

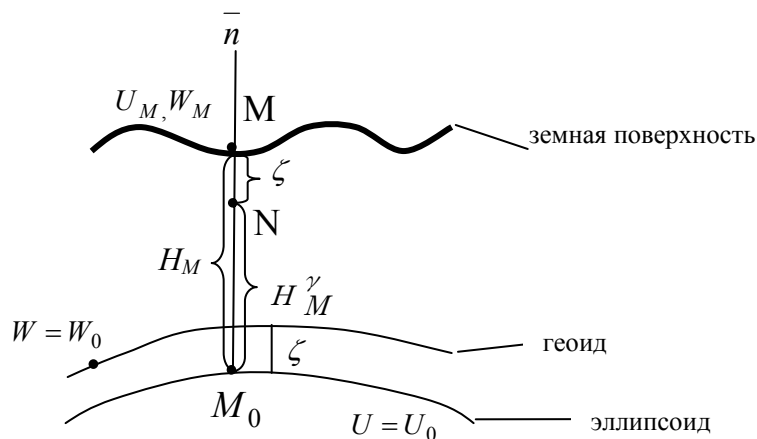


Рис. 18. Иллюстрация к понятиям связи  $T$  с  $(g - \gamma)$  и граничного условия:  
 $W_0$  – потенциал силы тяжести в исходном пункте нивелирования (на поверхности квазигеоида);  $U_0$  – нормальный потенциал силы тяжести на поверхности эллипсоида;  
 $U_M$  – нормальный потенциал силы тяжести в точке М;  $W_M$  – действительный потенциал силы тяжести в точке М

– Связь  $T$  с составляющими уклонения отвеса  $\xi_{cp.}$  и  $\eta_{cp.}$ :

$$\xi_{cp.} = -\frac{1}{\gamma_m(R + H)} \cdot \frac{\partial T}{\partial B}; \quad (3.3)$$

$$\eta_{cp.} = -\frac{1}{\gamma_m(R + H) \cos B} \cdot \frac{\partial T}{\partial L}, \quad (3.4)$$

где  $B, L$  – широта и долгота;  
 $R$  – радиус кривизны нормального сечения в точке М (часто используют средний радиус Земли);  
 $H$  – высота точки наблюдения (геодезическая или нормальная).

– Связь  $T$  с аномалией высоты  $\zeta$  может быть представлена по формуле Брунса

$$\zeta \approx \frac{T}{\gamma}. \quad (3.5)$$

Из приведенных формул прослеживается следующая *схема решения задачи*: по результатам гравиметрических измерений определяют возмущающий потенциал (формула 3.2). Далее по формулам (3.3) – (3.5) определяют оставшиеся характеристики АГП. В результате задача определения ДГП практически сводится к определению возмущающего потенциала.

Определением возмущающего потенциала занимались английский ученый Стокс и советский ученый Молоденский.

## 3.2. Задача Стокса и задача Молоденского. Формулы Стокса и Венинг-Мейнеса. Современная методика вычисления аномалий высот и уклонений отвеса

### 3.2.1. Схема решения задачи по определению гравитационного поля Земли

Рассматривая свойства потенциалов, мы установили, что возмущающий потенциал  $T$  является гармонической функцией во внешнем пространстве относительно физической поверхности Земли.

Из курса математической физики известно, что функция  $f$ , гармоническая в заданной области  $\tau$ , может быть определена в любой точке этой области, если на поверхности  $\sigma$ , ограничивающей эту область, известно: 1) либо само значение функции  $f$ ; 2) либо значение ее нормальной производной  $\frac{\partial f}{\partial n}$ ; 3) либо линейная комбинация этих величин  $f + \alpha \frac{\partial f}{\partial n}$  (где  $\alpha$  — некоторый коэффициент).

Сформулированное положение с тремя условиями составляет основное содержание трех краевых (граничных) задач теории потенциала. Эти задачи в математической физике решены и при определении возмущающего потенциала в гравиметрии используют математический аппарат третьей краевой задачи теории потенциала.

В качестве граничного условия при определении гравитационного поля Земли принимают выражение (3.2). Трудность формального применения теории граничных задач при определении возмущающего потенциала заключается в том, что теория граничных задач требует знания поверхности, к которой отнесено граничное условие. В нашем случае граничное условие должно быть отнесено к поверхности Земли, которая сама подлежит определению. Поэтому задача по определению возмущающего потенциала решается способом приближений путем отнесения граничного условия к той или иной поверхности, заменяющей земную. При этом выражение для граничного условия (3.2) существенно упрощается.

По изложенной схеме решали задачу Стокс и Молоденский. Рассмотрим эти решения.

### 3.2.2. Решение Стокса по определению возмущающего потенциала

Стокс решил задачу по определению возмущающего потенциала  $T$  при следующих допущениях:

1. Физическая поверхность Земли совпадает с уровнем моря и является ровенной.

2. Поверхность геоида  $W = W_0$  совпадает с поверхностью сферы радиусом  $R$ .



3. Потенциал силы тяжести в исходном пункте нивелирования  $W_0$  равен потенциалу силы тяжести на поверхности эллипсоида  $U_0$  (см. рис. 18).

При данных допущениях граничное условие (3.2) в решении Стокса принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial R} + \frac{2T}{R} = -(g_M - \gamma_N). \quad (3.6)$$

Далее Стокс применяет математический аппарат третьей краевой задачи теории потенциала и находит выражение для возмущающего потенциала в виде

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\omega} (g - \gamma) \cdot S(\psi) d\omega, \quad (3.7)$$

где  $T$  – возмущающий потенциал;  
 $(g - \gamma)$  – аномалия силы тяжести;  
 $S(\psi)$  – функция Стокса;  
 $\omega$  – поверхность сферы радиусом  $R$ .  
 Функция Стокса имеет вид

$$S(\psi) = \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \cdot \ln \left( \sin \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \right), \quad (3.8)$$

$\psi$  – сферическое расстояние от текущей точки до точки, в которой определяется возмущающий потенциал.

Подставляя (3.7) в формулу Брунса (3.5), получим выражение для аномалии высоты

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\omega} (g - \gamma) \cdot S(\psi) d\omega. \quad (3.9)$$

(3.9) – формула Стокса по определению аномалии высоты.

Подставляя выражение (3.7) в формулы (3.3) – (3.4), устанавливающие связь возмущающего потенциала  $T$  с составляющими гравиметрического уклонения отвеса, после дифференцирования и преобразований можно получить формулы (3.10) для составляющих уклонения отвеса в меридиане и в первом вертикале. Эти формулы были выведены голландским ученым Венинг-Мейнесом и носят его имя:

$$\begin{aligned} \xi_{сп.} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (g - \gamma) \cdot Q(\psi) \cos A d\psi dA; \\ \eta_{сп.} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (g - \gamma) \cdot Q(\psi) \sin A d\psi dA, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где  $A$  – азимут направления на текущую точку;

$Q(\psi)$  – функция Венинг-Мейнеса вида

$$Q(\psi) = \frac{1}{2\gamma \sin 1''} \cos^2 \frac{\psi}{2} \left[ \cos \operatorname{ec} \frac{\psi}{2} + 12 \sin \frac{\psi}{2} - 32 \sin^2 \frac{\psi}{2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{1 + \sin \frac{\psi}{2}} - 12 \sin^2 \frac{\psi}{2} \cdot \ln \left( \sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \right]. \quad 3.11$$

Стокс рассматривал полученную им интегральную формулу для возмущающего потенциала  $T$  (3.7) как формулу, которая определяет возмущающий потенциал в точках геоида, а поверхность уровня эллипсоида ( $U = U_0$ ) только как отсчетную поверхность, относительно которой определяется поверхность геоида.

Заменяя поверхность Земли поверхностью геоида, Стокс понимал, что отступает от своей собственной теории. Согласно этой теории поверхность, для которой определяется потенциал, должна охватывать все притягивающие массы и являться по отношению к ним внешней, чего нельзя сказать о поверхности геоида, над которой возвышаются все материки. Кроме того, сила тяжести измеряется на поверхности Земли, а не на поверхности геоида.

Стокс и его последователи надеялись устранить эти недостатки путем введения уточняющих поправок за редуцирование силы тяжести с поверхности Земли на поверхность геоида, а также за перенесение масс материков внутрь поверхности геоида.

Изучив все трудности решения Стокса, российский ученый Молоденский предложил не связывать решение основной научной задачи высшей геодезии с фигурой геоида, так как фигура геоида, строго говоря, вообще неопределима из-за необходимости знания закона детального распределения плотности между поверхностью Земли и поверхностью геоида. Поэтому он предложил свое решение.

### ***3.2.3. Решение Молоденского по определению возмущающего потенциала***

В 1945 году М.С. Молоденский опубликовал свою работу «Внешнее гравитационное поле и фигура Земли», в которой сформулировал и решил проблему определения фигуры Земли без привлечения каких-либо гипотез о внутреннем строении Земли. Он дал общее решение, из которого решение Стокса получается как первое приближение. Молоденский показал

теоретически, что уровенная поверхность геоида, проходящая внутри масс, неопределима и решил задачу для физической поверхности Земли, на которой фактически производятся все гравиметрические и геодезические измерения и для которой определяется аномалия силы тяжести  $(g - \gamma)$ .

Граничное условие у Молоденского имеет практически такой же вид, как и в задаче Стокса

$$\frac{\partial T}{\partial n} - \frac{T}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n} = -(g_M - \gamma_N). \quad (3.12)$$

Отличие заключается в том, что и возмущающий потенциал  $T$ , и нормаль  $n$ , и аномалии силы тяжести отнесены не к геоиду, а к некоторой кусочно-непрерывной поверхности  $S$ , названной Молоденским *поверхностью Земли первого приближения*. Эту поверхность образует система нормальных высот  $H^\gamma$ , отложенных от нормального эллипсоида (рис. 19). Аномалия  $(g_M - \gamma_N)$  – смешанная аномалия, в которой  $g$  отнесено к поверхности Земли, а  $\gamma$  – к точкам поверхности Земли первого приближения. Молоденский доказал, что замена реальной поверхности Земли на поверхность Земли первого приближения не влияет на конечную строгость результата.

Решение краевой задачи М.С. Молоденский находит, представляя возмущающий потенциал  $T$  через потенциал простого слоя плотности  $\mu$  (см. раздел 2.1.1, формула 2.16) и принимая за простой слой слой, расположенный между эллипсоидом и поверхностью Земли первого приближения:

$$T = \iint_S \frac{\mu}{r} dS \quad (3.13),$$

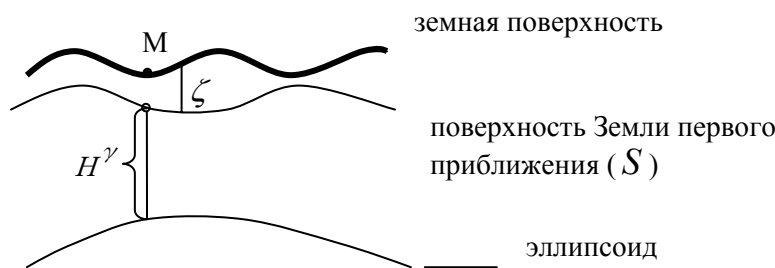


Рис. 19. Иллюстрация к понятию поверхности Земли первого приближения

Находя производную от  $T$  по направлению координатной линии

$$\frac{dT}{dn} = \frac{\partial}{\partial n} \iint_S \frac{\mu}{\rho} dS \quad (3.14)$$

и учитывая разрыв производной простого слоя при пересечении через поверхность  $S$  (см. раздел 2.1.1), Молоденский получает интегральное уравнение для сферической отсчетной поверхности, решение которого представляется рядом

$$\zeta = \frac{1}{\gamma} \sum_{\kappa=0}^{\infty} T_{\kappa}. \quad (3.15)$$

В (3.15)  $T_0$  совпадает с решением Стокса (3.7). Поэтому решение Стокса в современной научной литературе называют нулевым приближением к решению Молоденского.

Решение Молоденского получилось следующее:

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\omega} (g - \gamma + \delta g) \cdot S(\psi) d\omega. \quad (3.17)$$

Определяемые по Молоденскому характеристики аномального гравитационного поля  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  находятся по формулам

$$\left. \begin{aligned} \xi_{зр.} &= \xi_0 + \delta \xi_1 + \delta \xi_2 \dots \\ \eta_{зр.} &= \eta_0 + \delta \eta_1 + \delta \eta_2 \dots \\ \zeta_{зр.} &= \zeta_0 + \delta \zeta_1 + \delta \zeta_2 \dots \end{aligned} \right\}, \quad (3.18)$$

$\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  – полностью совпадают с решением Стокса, дальше идут уточняющие поправки  $\delta \xi_i, \delta \eta_i, \delta \zeta_i$ .

Решение Молоденского является строгим. Согласно Молоденскому для определения возмущающего потенциала необходимо и достаточно знать смешанные аномалии силы тяжести на всей поверхности Земли, то есть наличие мировой гравиметрической съемки позволяет строго решить основную задачу высшей геодезии по определению внешнего гравитационного поля Земли.

#### **3.2.4. Современная методика вычисления аномалий высот и уклонений отвеса**

Российский ученый Молоденский создал строгую теорию для определения возмущающего потенциала, а значит и вычисления составляющих уклонения отвеса и аномалий высот. Однако на практике методика вычисления этих величин по формулам строгой теории пока недостаточно отработана, в частности, из-за наличия белых пятен в мировой гравиметрической

съемке. Поэтому в практической деятельности обычно используют приближенные формулы Венинг-Мейнеса и Стокса, полученные согласно решению Стокса.

### *Практическое применение формул Стокса и Венинг-Мейнеса*

Обратимся к формулам Стокса (3.9) и Венинг-Мейнеса (3.10). Вид указанных формул интегральный. Однако интегрирование по этим формулам не может быть выполнено аналитически, так как подынтегральная функция в нашем конкретном случае не является непрерывной, потому что в нее входят аномалии силы тяжести, которые могут быть определены только на гравиметрических пунктах, то есть в дискретных точках земной поверхности. Поэтому интегрирование по формулам Венинг-Мейнеса и Стокса выполняют численным методом.

В численном интегрировании знак интеграла заменяется суммой. Для этого площадь в пределах интегрируемой области (в нашем случае земная поверхность) делится на элементарные участки (например, трапеции  $10' \times 15'$ ), затем вычисляются значения подынтегральной функции для каждого элементарного участка и производится суммирование по всей площади.

На практике численное интегрирование по формулам Стокса и Венинг-Мейнеса выполняется с помощью круговой палетки Еремеева. Эта палетка охватывает нулевую и ближнюю зоны (нулевая зона от 0 до 5,0 км, ближняя – от 5 до 48,5 км, иногда от 5 до 100 км).

Палетка Еремеева состоит из восьми зон и шестнадцати секторов. Каждое отделение палетки принимается как элементарный участок интегрирования, в котором определяется по гравиметрической карте среднее значение аномалии силы тяжести для участка, а затем по формулам Стокса и Венинг-Мейнеса, преобразованным для численного интегрирования (3.19 – 3.23), вычисляются составляющие характеристики гравитационного поля  $\xi, \eta, \zeta$ .

Запишем указанные формулы для палетки Еремеева:

– для нулевой зоны (от 0 до 5 км):

$$\begin{Bmatrix} \xi''_{(0-5)} \\ \eta''_{(0-5)} \end{Bmatrix} = -0,02628 \cdot \sum_{k=2n}^{16} \Delta g_k \begin{Bmatrix} \cos A_k \\ \sin A_k \end{Bmatrix}, \quad (3.19)$$

где  $\xi''_{(0-5)}, \eta''_{(0-5)}$  – составляющие уклонения отвеса в меридиане и в первом вертикале, вызванные влиянием аномальных масс, расположенных в центральной зоне;

$\Delta g_k$  – среднее значение аномалии силы тяжести нулевой зоны четного сектора ( $k$  – номер четного сектора);

$A_k$  – азимут направления на четный сектор.

$$\zeta_{(0-5)}^{(M)} = 255 \cdot 10^{-5} \Delta g_o + 32 \cdot 10^{-5} \sum_{k=2n}^{16} \Delta g_k, \quad (3.20)$$

где  $\zeta_{(0-5)}^{(M)}$  – аномалия высоты, вызванная влиянием аномальных масс, расположенных в нулевой зоне,

$\Delta g_o$  – значение аномалии силы тяжести на пункте, для которого мы вычисляем составляющие уклонения отвеса и аномалию высоты,

$\Delta g_k$  – среднее значение аномалии силы тяжести нулевой зоны четного сектора,  $n=1,2,\dots,8$ .

– ближние зоны (от 5 до 100 км):

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi''_{(5-100)} \\ \eta''_{(5-100)} \end{array} \right\} = -0,005 \cdot \sum_{k=2n}^{16} \sum_{i=1}^{VIII} \Delta g_{ki} \left\{ \begin{array}{l} \cos A_k \\ \sin A_k \end{array} \right\}, \quad (3.21)$$

где  $\xi''_{(5-100)}$ ,  $\eta''_{(5-100)}$  – значения составляющих уклонения отвеса в меридиане и в первом вертикале, вызванные влиянием аномальных масс ближних зон.

$$\begin{aligned} \zeta_{(5-100)}^{(M)} = & 15 \cdot \left( \sum_1^{16} \Delta g_{Ik} + 22 \sum_1^{16} \Delta g_{IIk} + 32 \sum_1^{16} \Delta g_{IIIk} + 47 \sum_1^{16} \Delta g_{IVk} + 69 \sum_1^{16} \Delta g_{V_k} + \right. \\ & \left. + 101 \sum_1^{16} \Delta g_{VIk} + 149 \sum_1^{16} \Delta g_{VIIk} + 219 \sum_1^{16} \Delta g_{VIIIk} \right) \cdot 10^{-5}; \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi_{0-100} = \xi_{0-5} + \xi_{5-100} \\ \eta_{0-100} = \eta_{0-5} + \eta_{5-100} \\ \zeta_{0-100} = \zeta_{0-5} + \zeta_{5-100} \end{array} \right\}. \quad (3.23)$$

Зоны, расположенные от пункта наблюдения далее 100 км, называются дальними зонами.

Порядок вычисления по формулам (3.19) – (3.23) следующий:

1) центр круговой палетки Еремеева совмещается с центром геодезического пункта, нанесенным на гравиметрическую карту; ориентируют палетку по меридиану на север;

2) выбирают среднее значение аномалий силы тяжести для каждого отделения палетки, расположенного на пересечении сектора и зоны (для центральной зоны – только для четных секторов);

3) производится вычисление по формулам в специальной таблице.

Вычисленные значения  $\xi$  и  $\eta$  подставляют в формулу для вычисления поправок за уклонение отвесных линий в результаты геодезических измерений.

Следует отметить, что формулы Стокса и Венинг-Мейнеса дают удовлетворительные результаты только для пунктов, расположенных на равнине. Уклонение отвеса по ним на равнине получается с точностью  $(0,3 - 0,4)''$ , в горах – с точностью  $(1,0 - 1,4)''$ . Чтобы в горах получить такую же точность, как и на равнине, необходимо тем или иным способом учесть влияние топографических масс на аномалии силы тяжести. В простейшем случае это достигается путем использования метода косвенной интерполяции аномалий в свободном воздухе через аномалии Буге (формула 2.69). Поле аномалий Буге имеет плавный характер, что делает более правомерной линейную интерполяцию этих аномалий между гравиметрическими пунктами, а значит, повышает точность составления гравиметрических карт. В этом случае мы используем формулы Стокса и Венинг-Мейнеса в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{зр.} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} ((g - \gamma)_B + 2\pi f \delta H) \cdot Q(\psi) \cos A d\psi dA \\ \eta_{зр.} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} ((g - \gamma)_B + 2\pi f \delta H) \cdot Q(\psi) \sin A d\psi dA \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\omega} ((g - \gamma)_B + 2\pi f \delta H) \cdot S(\psi) d\omega. \quad (3.25)$$

Обозначения в (3.24) и (3.25) совпадают с приведенными выше.

Дальше используют два типа карт: гравиметрическую карту в аномалиях Буге и гипсометрическую карту, то есть карту рельефа. Затем переходят к численному интегрированию с использованием палетки Еремеева: снимают с гравиметрической карты аномалии Буге, а с гипсометрической карты – средние значения отметки ( $H$ ) в каждом отделении палетки, которые умножают на  $2\pi f \delta$ . Далее по приведенным выше формулам вычисляются значения  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  отдельно по гравиметрическим картам и от-

дельно по гипсометрическим картам. Окончательные искомые величины получают как суммы:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_B + \xi_{гипс.}; \\ \eta &= \eta_B + \eta_{гипс.}; \\ \zeta &= \zeta_B + \zeta_{гипс.}\end{aligned}\tag{3.26}$$

Однако в высокогорных районах вместо аномалий Буге желательно все же использовать топографические аномалии.

*Вопросы для проверки усвоения материала по теме 3*

1. Методы определения гравитационного поля и фигуры Земли.
2. Почему задача по определению гравитационного поля Земли сведена к задаче по определению возмущающего потенциала?
3. В чем заключаются нестрогости в решении Стокса?
4. Сформулировать отличие решения Молоденского от решения Стокса.
5. Дать понятие поверхности Земли первого приближения и сформулировать определение аномалии высоты с использованием этого понятия.
6. Почему решение Стокса называют нулевым приближением к решению Молоденского?
7. Как на практике применяют формулы Стокса и Венинг-Мейнеса по определению  $\xi, \eta, \zeta$ ?



## ТЕМА 4. ИЗМЕРЕНИЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПОТЕНЦИАЛА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

### 4.1. Методы измерения силы тяжести. Результаты современных абсолютных измерений силы тяжести. Относительные маятниковые измерения и их результаты

#### 4.1.1. Методы измерения силы тяжести. Результаты современных абсолютных измерений силы тяжести

Современные методы измерения силы тяжести (ускорения силы тяжести) делятся на *динамические* и *статические*. Заметим, что, строго говоря, в гравиметрии измеряют ускорение силы тяжести. Однако при выводе формул и расчетах обычно принимают единичную массу груза, тогда сила тяжести по величине оказывается равной ее ускорению, и для краткости в гравиметрии принято говорить вместо ускорения силы тяжести просто сила тяжести.

В динамических методах наблюдают за движением тела в реальном гравитационном поле. В статическом методе наблюдают состояние равновесия тела в реальном гравитационном поле под действием двух сил: силы тяжести и некоторой компенсирующей силы.

К динамическим методам относятся *маятниковый* и *баллистический* методы.

Маятниковый метод основан на формуле Гюйгенса, приводимой ранее,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

где  $T$  – период колебаний,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $l$  – приведенная длина (рис. 20).

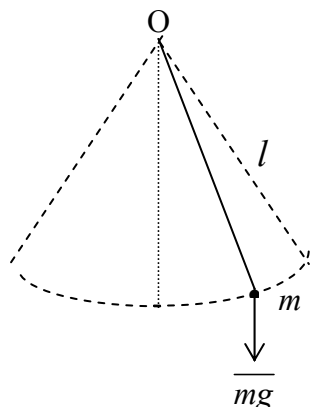


Рис. 20. Иллюстрация к маятниковому методу измерения ускорения силы тяжести



из решения которых по методу наименьших квадратов определяется ускорение силы тяжести.

Из современных баллистических установок следует отметить баллистическую установку в Севре (абсолютный гравиметр МБМВ). В 70-е годы там выполнялись абсолютные измерения силы тяжести под руководством профессора Сакума. Ускорения силы тяжести были получены с точностью 0,2 мГал. Эта баллистическая установка используется вплоть до настоящего времени. Сейчас ее чувствительность составляет 2 мкГал. В 1975 – 1981 гг. в Международной широтной обсерватории в Мидзусова (Япония) был сконструирован также стационарный абсолютный гравиметр, подобный гравиметру МБМВ (Севр). Цель создания подобных постоянных станций заключается в установлении и поддержке мировой гравиметрической системы на современном уровне, слежении за долговременными изменениями силы тяжести глобального характера, а также в метрологическом обеспечении абсолютных нестационарных гравиметров.

В СССР первая баллистическая установка была сконструирована в 1956 году. Ее точность в то время составляла 1,3 мГал. На уровне современных мировых требований точности баллистический гравиметр был сконструирован в России в 1970 – 1972 гг. в Институте автоматики и электрометрии Сибирского Отделения АН СССР (ИАЭ СО АН). В 1975 году этот гравиметр сделали транспортабельным. В 1976 – 1979 гг. гравиметр ИАЭ использовался при выполнении измерений ускорений силы тяжести в мировой опорной гравиметрической сети. По внутренней сходимости точность этих измерений оценивалась величиной порядка (2 – 6) мкГал. Абсолютная точность измерений баллистическим гравиметром в то время составила 20 мкГал, в настоящее время она достигла уже 10 мкГал.

Транспортабельные баллистические гравиметры имеются также в США, Японии, Франции и Китае.

#### *Применение баллистического метода*

Гравиметрические пункты, на которых выполняются абсолютные измерения ускорения силы тяжести баллистическими гравиметрами, используют как исходную основу при создании мировой опорной гравимет-

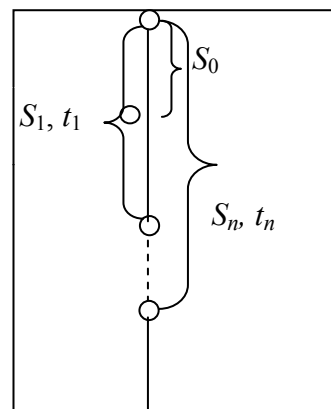


Рис. 21. Баллистический метод измерения ускорения силы тяжести

рической сети, а в отдельных государствах и при создании государственной опорной гравиметрической сети. Кроме того, измерения баллистическими гравиметрами применяют для осуществления независимого контроля всех опорных гравиметрических сетей, развиваемых, как правило, относительным методом. Баллистический метод находит широкое применение для выявления вариаций силы тяжести во времени с целью изучения современных движений земной коры, движения полюсов и других геодинамических явлений.

#### ***4.1.2. Относительные маятниковые измерения и их результаты***

Относительные методы позволяют определить только приращения ускорения силы тяжести  $\Delta g$  между гравиметрическими пунктами. Для вывода  $\Delta g$  сравнивают показания одного и того же прибора на двух пунктах (исходном и определяемом). Как сказано выше, при относительных измерениях ускорения силы тяжести достаточно измерить только одну величину: либо длину (например, деформацию пружины), либо время (период или частоту колебаний маятника или струны).

До 30-х годов прошлого столетия относительные измерения выполняли исключительно маятниковым методом. В последние несколько десятилетий относительные измерения производятся, в основном, статическими гравиметрами, которые значительно проще в обращении, компактнее и удобнее при транспортировке.

Однако маятниковые относительные измерения используются вплоть до настоящего времени, так как они обладают такими важными преимуществами перед статическими гравиметрами, как независимость результатов измерений и их точности от продолжительности гравиметрического рейса, от сложности гравитационного поля и от расстояния и диапазона изменения ускорений силы тяжести между пунктами. Маятниковые относительные измерения очень стабильны и надежны.

В настоящее время маятниковые относительные измерения используются:

- 1) для создания редкой сети опорных пунктов с целью осуществления контроля измерений статическими гравиметрами и их приведения в единую систему;
- 2) для эталонирования статических гравиметров.

Маятниковый метод относительных измерений силы тяжести основан на последовательных наблюдениях свободных колебаний одного и того же маятника неизменной приведенной длины на разных пунктах. Поясним это на примере двух пунктов А и В. Примем А за исходный (рис. 22).

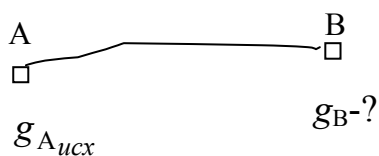


Рис. 22. Иллюстрация к маятниковым относительным измерениям

Выполним измерения периода колебаний одного и того же маятника вначале на пункте А и получим  $T_A$ , а затем на пункте В и получим  $T_B$ . Запишем формулу Гюйгенса для каждого пункта в виде уравнений

$$\left. \begin{aligned} T_A &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_A}} \\ T_B &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_B}} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Возводя в квадрат и деля первое уравнение на второе, получим

$$\frac{T_A^2}{T_B^2} = \frac{g_B}{g_A}, \quad (4.4)$$

откуда

$$g_B = g_A \cdot \frac{T_A^2}{T_B^2}. \quad (4.5)$$

Маятниковые относительные измерения получили широкое распространение еще в начале XIX века. Вслед за появлением относительных маятниковых приборов фон Штернека (1887 г.) с 1890 г. по 1950 г. были выполнены обширные работы для создания национальных гравиметрических сетей и связи их с пунктами абсолютных измерений.

В России первые маятниковые измерения выполнены в 1826 – 1830 гг. знаменитым путешественником Литке (1797 – 1882), гидрографом Рейнеке и физиком Парротом. Их результаты использованы при выводах величины сжатия Земли, в том числе в 1884 г. Гельмертом.

Наибольшее развитие маятниковые измерения получили в России (Советском Союзе) с 1932 г. после выхода в свет постановления о проведе-

нии в стране всеобщей гравиметрической (маятниковой) съемки плотностью 1 пункт на 1000 км<sup>2</sup>. К 1938 году по программе съемки было определено 8400 маятниковых пунктов. Эта съемка была выполнена в единой Потсдамской системе. В дальнейшем пункты этой съемки были разделены по точности на три класса: 1 класс – ± 1 мГал; 2 класс – ± 2 мГал; 3 класс – ± 3 мГал.

Из современных маятниковых приборов отметим маятниковый гравиметр «Агат» (ЦНИИГАиК) и ОПВМ ЦНИИГАиК (Москва); четырехмаятниковый прибор фирмы «Аскания» (Берлин); Кембриджский двухмаятниковый прибор с инварными маятниками и катушкой Гельмгольца; термостатированный двухмаятниковый прибор Обсерватории доминиона (Оттава). Точность относительных измерений современными маятниковыми приборами составляет (0,02 – 0,04) мГал. Маятниковые гравиметры примерно этого класса использовались при создании мировой опорной гравиметрической сети IGSN-71. К использованию гравиметра «Агат» мы вернемся чуть ниже при рассмотрении государственной гравиметрической сети СССР.

#### **4.2. Статический метод определения силы тяжести. Основы теории статических гравиметров и их классификация. Смещение нуля-пункта. Влияние внешней среды на показания гравиметров**

##### **4.2.1. Статический метод определения силы тяжести. Основы теории статических гравиметров и их классификация**

В обзоре методов определения силы тяжести уже было дано понятие статического метода. Так как на основе этого метода устроено большинство современных гравиметров, то рассмотрим его более подробно.

Напомним, что в статическом методе измерения ускорения силы тяжести наблюдается состояние равновесия тела в реальном гравитационном поле под действием двух сил: силы тяжести и некоторой компенсирующей силы. Уравнение статического равновесия имеет вид

$$m\bar{g} + \bar{F} = 0, \quad (4.6)$$

где  $m\bar{g}$  – сила тяжести,  $\bar{F}$  – компенсирующая сила.

В качестве компенсирующей силы может служить сила упругости пружины, давления газа, электромагнитная сила и т.д., но наиболее распространены механические гравиметры, где используется упругая сила пружины. Принцип работы статических гравиметров заключается в срав-

нении силы тяжести с постоянной компенсирующей силой и измерении их различия. Поясним это на простейшем примере, когда в качестве компенсирующей силы служит упругая сила пружины (рис. 23).

Пусть пружина имеет начальную длину  $l_0$ . Если мы подвесим на нее груз  $P$  массой  $m$ , то под действием силы тяжести этого груза пружина растянется до длины  $l$ , то есть по сравнению с первоначальной длиной пружина растянется на величину  $(l - l_0)$ . В результате сила тяжести  $mg$  уравнивается силой упругой деформации пружины  $k(l - l_0)$ , где  $k$  – коэффициент упругости пружины. Данное состояние статического равновесия можно записать в виде уравнения

$$mg = k(l - l_0), \quad (4.7)$$

то есть деформация подчиняется закону Гука (пропорциональна нагрузке).

Снабдим показанное на рис. 23 устройство шкалой и индексом от груза. Отрегулируем шкалу так, чтобы при некотором номинальном значении  $g = g_0$  индекс маятника показывал на нуль, и запишем состояние статического равновесия для этого случая

$$mg_0 = k(\bar{l}_0 - l_0), \quad (4.8)$$

где  $\bar{l}_0$  – длина пружины при  $g = g_0$ , когда индекс маятника показывал на нуль. Перейдем в точку 1 земной поверхности с  $g = g_1$  и запишем для нее уравнение статического равновесия. (При  $g_1 > g_0$  произойдет удлинение пружины до величины  $l$  и индекс маятника изменит свое положение на величину  $(l - l_0)$  относительно первоначальной длины пружины).

$$mg_1 = k(l - l_0). \quad (4.9)$$

Вычитая (4.8) из (4.9) и принимая  $m = 1$ , получим основное уравнение для измерения приращения ускорения силы тяжести между двумя пунктами статическим методом.

$$(g_1 - g_0) = k(l - \bar{l}_0). \quad (4.10)$$

Однако изображенная на рис. 23 упругая система недостаточно чувствительна к реальным изменениям ускорения силы тяжести, которые мы

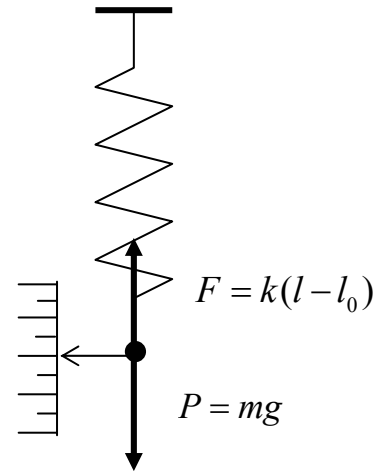


Рис. 23. Статический метод измерения ускорения силы тяжести

наблюдаем на земной поверхности. С целью повышения чувствительности упругой системы в конструкции гравиметра используют принцип сейсмографа Голицына (рис. 24).

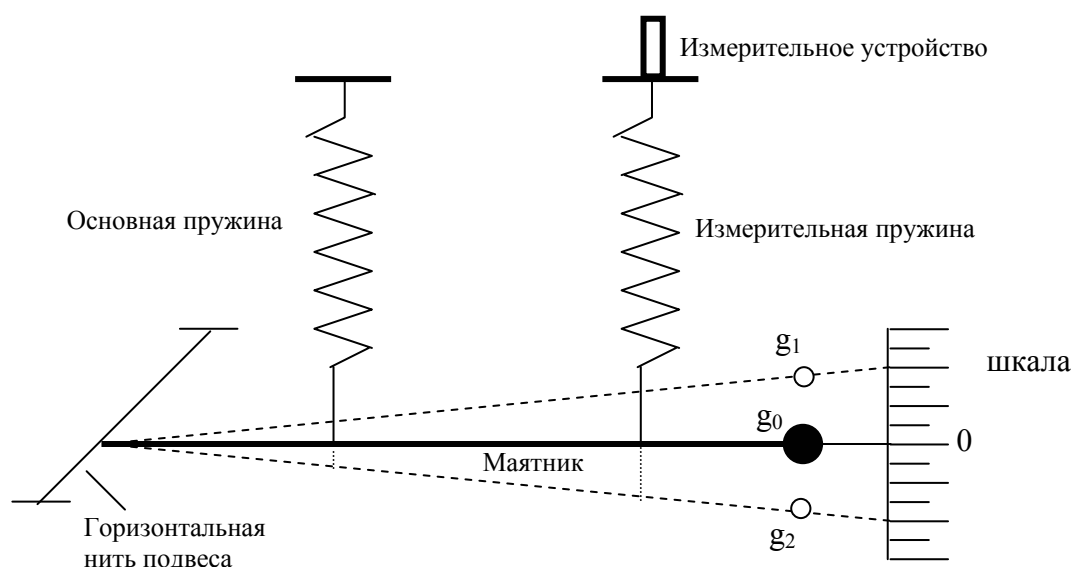


Рис. 24. Схема статического гравиметра, основанная на принципе сейсмографа Голицына

В гравиметрах, использующих этот принцип, на горизонтальной нити подвешивают маятник с грузом на конце единичной массы, который неустойчиво удерживается в горизонтальном положении с помощью основной пружины с таким коэффициентом упругости, что при некотором номинальном значении  $g = g_0$  ее длина равна  $l_0$  и индекс маятника находится на нуле шкалы. Изменение ускорения силы тяжести вызовет растяжение или сжатие основной пружины до длины  $l$  (при  $g_1 > g_0$  она удлинится, а при  $g_1 < g_0$  – укоротится), что зафиксируется изменением положения индекса маятника относительно нуля шкалы. В конструкциях современных гравиметров, как правило, используют нулевой или компенсационный способ измерения, при котором отсчет по гравиметру берут, когда индекс маятника находится на нулевом штрихе шкалы. Для этого гравиметр снабжается еще измерительной пружиной и измерительным устройством с микрометренным винтом и отсчетным приспособлением. Вращением микрометренного винта измерительного устройства пружина удлиняется или укорачивается, возвращая индекс маятника в исходное нулевое положение, соответствующее  $g = g_0$ , и берется отсчет по отсчетному устройству в оборотах пружины.

В теории механических гравиметров предполагается, что деформация, то есть изменение длины пружины, пропорциональна изменению силы тяжести. Следовательно, для каждого гравиметра можно установить



соответствие между деформацией пружины, взяв за ее единицу, например, один целый оборот пружины вокруг измерительного винта, и изменением ускорения силы тяжести в миллигалах. Это числовое соответствие оборота пружины изменению ускорения силы тяжести в миллигалах называется постоянной гравиметра, которая определяется на заводе при изготовлении каждого гравиметра, заносится в паспорт прибора, а затем еще контролируется по специальным методикам в процессе эксплуатации гравиметра. Постоянная гравиметра имеет размерность  $[c] = \text{мГал}/\text{об}$

При измерениях статическим гравиметром сравнивают переведенные в мГалы результаты измерений одним и тем же гравиметром на двух гравиметрических пунктах. Разность этих результатов будет равна приращению ускорения силы тяжести между пунктами (рис. 25).

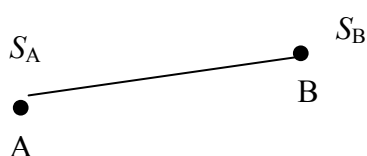


Рис. 25. Принцип измерения ускорения силы тяжести статическим гравиметром

$$\begin{aligned} c \cdot S^A &= S_{\text{мГал}}^A; \\ c \cdot S^B &= S_{\text{мГал}}^B; \end{aligned} \quad \Delta g_{\text{ВА}} = S_{\text{мГал}}^B - S_{\text{мГал}}^A. \quad (4.11)$$

В формулах (4.11)  $c$  – постоянная гравиметра в мГал/об;  $S^A, S^B$  – отсчеты по гравиметру в точках А и В в оборотах.

Таким образом, современные статические гравиметры – это приборы, основанные на статическом методе относительных измерений силы тяжести. Согласно принятой классификации они делятся по следующим признакам:

1. По типу компенсирующей силы на *газовые, механические и гравиметры, основанные на применении электромагнитных сил.*
2. По материалу, из которого сделана упругая система, механические гравиметры делятся на *кварцевые, получившие максимальное распространение на практике, и металлические.*
3. По диапазону измерительного устройства – *широкодиапазонные (или геодезические), узкодиапазонные и комбинированные.*
4. В соответствии с областью применения гравиметры бывают: *наземные* (для измерений на суше), *морские* (для измерений с надводных и подводных судов), *скважинные* (для измерений в глубине Земли), *аэрогравиметры* (для измерения с летательных аппаратов), *приливные* (для регистрации приливных изменений ускорения силы тяжести), *донные* (для измерений на дне водоемов), гравиметры *специального назначения* (например, для использования на космических летательных аппаратах).

5. По классу точности гравиметры делятся на 3 класса (А, В и С):

– класс А  $\Rightarrow m_{\Delta g} = (0,01 - 0,02)$  мГал,

– класс В  $\Rightarrow m_{\Delta g} = (0,02 - 0,03)$  мГал,

– класс С  $\Rightarrow m_{\Delta g} = (0,03 - 0,06)$  мГал.

Наиболее распространенными как в странах бывшего СССР, так и за рубежом, являются механические гравиметры, которые могут быть кварцевыми и металлическими.

Механические гравиметры основаны на принципе сейсмографа Голицина и состоят из следующих основных узлов:

- 1) упругой системы;
- 2) устройства для регистраций малых перемещений;
- 3) устройства для компенсации и измерения силы тяжести;
- 4) диапазонного устройства;
- 5) устройства для компенсации температуры;
- 6) устройства для компенсации влияния атмосферного давления.

Последние два узла сконструированы в связи с тем, что на работу гравиметра оказывают влияние внешние условия, прежде всего, атмосферное давление и температура. Кроме того, гравиметры снабжены двумя уровнями: продольным, расположенным параллельно оси маятника, и поперечным, расположенным параллельно нити подвеса маятника. Эти уровни контролируют горизонтальность плоскости главных упругих элементов гравиметра (плоскость, проходящая через нить подвеса маятника и ось маятника) в момент отсчитывания, так как наклон этой плоскости на момент измерений вызывает эффект кажущегося изменения ускорения силы тяжести на величину

$$\Delta g \approx -\frac{g_0 \beta^2}{2}, \quad (4.12)$$

где  $g_0$  – приближенное значение ускорения силы тяжести в районе работ;

$\beta$  – угол наклона плоскости главных упругих элементов к горизонту в момент отсчитывания.

Первым советским (российским) кварцевым астазированным гравиметром был гравиметр ГАК-3М. Затем на его базе стали выпускать другие более совершенные марки гравиметров.

Первым зарубежным кварцевым астазированным гравиметром был гравиметр Мотт-Смитта. Конструкция этого гравиметра с небольшими изменениями используется в современных гравиметрах таких фирм как Уорден, Шарп, Содин.

Из зарубежных металлических гравиметров следует назвать гравиметры «Северная Америка» и Ла-Коста-Ромберга.

Из современных российских гравиметров следует отметить наземные узкодиапазонные (ГНУК-А, ГНУК-В, ГНУК-С), широкодиапазонные (ГНШК-А, ГНШК-В, ГНШК-С) и комбинированные (ГНКК-А, ГНКК-В, ГНКК-С) кварцевые астазированные гравиметры классов точности А, В, С.

#### **4.2.2. Смещение нуля-пункта гравиметра**

В теории механических гравиметров предполагается, что деформация упругой системы пропорциональна силе тяжести, то есть связь между нагрузкой и деформацией соответствует закону Гука. В реальных телах зависимость деформации от нагрузки гораздо сложнее. Опыт свидетельствует, что даже при малых нагрузках деформация материала не строго соответствует закону Гука. Отклонения от закона пропорциональности при наблюдениях с гравиметрами проявляются как непрерывные изменения отсчета, которые называются *смещением нуля-пункта*.

При изготовлении гравиметров принимают меры для повышения стабильности упругих систем. Так упругие системы изготавливаются из плавленого кварца и элинвара (особого сплава никеля и хрома), которые обладают малыми температурными коэффициентами и относительным постоянством упругих свойств во времени.

Тем не менее, несмотря на это, смещение нуля-пункта существует у всех без исключения гравиметров. Данный факт является основным недостатком статических гравиметров и требует соблюдения специальных методик выполнения гравиметрических работ. Так гравиметрические измерения выполняют отдельными *гравиметрическими рейсами*, понимая под каждым *рейсом совокупность последовательных измерений гравиметром в точках земной поверхности, объединенных общей характеристикой смещения нуля-пункта*. В результаты этих измерений в каждом рейсе вводят поправку за смещение нуля-пункта гравиметра.

Для определения смещения нуля-пункта наблюдения в рейсе начинают и заканчивают на одном том же пункте или на исходных пунктах, приращение ускорения силы тяжести между которыми известно. В течение рейса скорость смещения нуля-пункта отдельного гравиметра (рейс может прокладываться не одним гравиметром) обычно предполагается постоянной, а поправка за смещение нуля-пункта изменяется по линейному закону пропорционально времени. В этом случае поправка в пункт, который на-

блюдался через два часа после начала наблюдений в рейсе будет в два раза больше по величине поправки в пункт, на котором производились гравиметрические измерения спустя один час после начала рейса. Поэтому перед выполнением полевых работ каждый гравиметр исследуют на линейный характер смещения нуля-пункта гравиметра. На основании этого исследования продолжительность гравиметрического рейса при работе со статическими гравиметрами обычно ограничивается (4 – 6) часами.

При проложении гравиметрического рейса поправка за смещение нуля-пункта вычисляется по формуле

$$\delta_i = -k(t_i - t_n), \quad (4.13)$$

где  $k$  – скорость смещения нуля-пункта, определяемая для случая проложения рейса по схеме замкнутого хода по формуле

$$k = \frac{S_k - S_n}{t_k - t_n}. \quad (4.14)$$

В (4.13) и (4.14)  $\delta_i$  – поправка за смещение нуля-пункта гравиметра в  $i$ -тый пункт наблюдений;  $t_n, t_i, t_k$  – время наблюдений на начальном, текущем и конечном гравиметрических пунктах рейса;  $S_n, S_k$  – начальный и конечный отсчеты по гравиметру в рейсе, переведенные в мГалы.

На скорость смещения нуля-пункта гравиметра существует допуск: для ГНУК-А  $k_{дон.} = 0,5$  мГал/сутки, для ГНУК-В  $k_{дон.} = 1,0$  мГал/сутки; для ГНУК-С  $k_{дон.} = 2,0$  мГал/сутки.

Лучшие зарубежные гравиметры отличаются очень высокой стабильностью упругой системы. Так высокоточные гравиметры фирм Шарп и Уорден имеют смещение нуля-пункта гравиметра менее 0,03 мГал/сутки, а аналогичные гравиметры Ла-Коста-Ромберга – менее (0,5 – 2,0) мГал/месяц.

#### *Исследование смещения нуля-пункта гравиметра*

Порядок исследования смещения нуля-пункта гравиметра является следующим:

1. Устанавливают гравиметр на жесткое основание, приводят в рабочее положение и в течение 10 часов через равные промежутки времени (обычно каждый час) берут отсчеты по отсчетному устройству.

2. Переводят отсчеты в миллигалы и по ним строят график смещения нуля-пункта во времени. При этом по оси абсцисс откладывают моменты

времени наблюдений, а по оси ординат – соответствующие отсчеты в миллигалах.

3. Соединив последовательно между собой все полученные точки, выполняют анализ графика. Если на графике все точки легли в пределах точности (для гравиметров среднего класса точности  $m_{дон} = 0,1$  мГал) на одну прямую, значит такое смещение нуля-пункта у данного гравиметра линейно во времени. Если в интервале времени  $(t_2 - t_1)$  наблюдается линейный характер графика, а в течение времени  $(t_3 - t_2)$  – нелинейный, то делается вывод, что смещение нуля-пункта в течение промежутка времени  $(t_2 - t_1)$  происходит по линейному закону, а в интервале  $(t_3 - t_2)$  – не по линейному закону, то есть не пропорционально времени. Продолжительность полевого рейса будет определяться временем, в течение которого смещение нуля-пункта соответствует линейному изменению во времени (в приведенном примере  $(t_2 - t_1)$ ).

Более подробно о смещении нуля-пункта гравиметра сказано в соответствующей лабораторной работе, описание которой дано ниже.

#### **4.2.3. Влияние внешней среды на показания гравиметров**

Механические статические гравиметры, основанные на принципе сейсмографа Голицина, представляют систему с вращательным перемещением груза. Рассмотрим ее действие в реальных условиях.

Обозначим через  $gM_g$  момент внешних сил (силы тяжести и выталкивающей силы воздуха), а через  $M_\tau$  – момент внутренних сил (сил упругости). Момент внешних сил будет изменяться при изменении температуры  $T$ , деформации  $\alpha$  (угла поворота системы относительно некоторого нулевого положения  $\alpha_0$ ), атмосферного давления  $B$  и угла  $\beta$  наклона системы; момент упругих сил зависит от деформации  $\alpha$  и температуры  $T$ .

Система будет находиться в состоянии статического равновесия, если сумма моментов всех действующих на систему сил равна нулю, то есть

$$gM_g(\alpha, T, B, \beta) + M_\tau(\alpha, T) = 0. \quad (4.15)$$

Предположим, что все аргументы в (4.15) изменились. Изменения деформации, температуры, давления, наклона гравиметра вызовут перемещения подвижного элемента упругой системы гравиметра, которые при наблюдениях неотделимы от изменения ускорения силы тяжести. Поэтому продифференцируем (4.15) по переменной  $g$ , считая все величины в этом

уравнении зависимыми от  $g$ , а моменты сил – неявными функциями от  $g$ .  
Получим

$$M_g + \left(g \cdot \frac{\partial M_g}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_\tau}{\partial \alpha}\right) \cdot \frac{d\alpha}{dg} + \left(g \cdot \frac{\partial M_g}{\partial T} + \frac{\partial M_\tau}{\partial T}\right) \cdot \frac{dT}{dg} + g \cdot \frac{\partial M_g}{\partial B} \cdot \frac{dB}{dg} + \\ + g \frac{\partial M_g}{\partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{dg} = 0, \quad (4.16)$$

где  $\frac{d\alpha}{dg}$  – механическая чувствительность гравиметра, характеризующая изменение деформации упругой системы, вызванное изменением ускорения силы тяжести;

$\frac{dg}{dT}$  – температурный коэффициент гравиметра, характеризующий кажущееся изменение ускорения силы тяжести (погрешность) вследствие изменения температуры упругой системы гравиметра;

$\frac{dg}{dB}$  – барометрический коэффициент гравиметра, характеризующий кажущееся изменение ускорения силы тяжести (погрешность) вследствие изменения атмосферного давления.

Как следует из выражения (4.16), называемого основным уравнением статического гравиметра, при конструировании механических гравиметров требуется тщательная защита его упругой системы от влияния внешних условий, прежде всего, температуры и давления. Поэтому в конструкциях гравиметров предусматривают *температурные и барометрические компенсаторы*. Так с целью уменьшения температурных влияний на показания гравиметров в чувствительную систему вводят дополнительные устройства, помещая ее, например, в жидкость, либо дополняя пружинами и рычагами, либо применяя биметаллические компенсаторы. Кроме того, при производстве наблюдений используют ряд методических приемов, уменьшающих эти влияния. Последнее вызвано тем, что компенсаторы не могут решить полностью проблему влияния температуры на результаты гравиметрических измерений, так как с помощью *температурных компенсаторов* температурный коэффициент гравиметра приводят к нулю только для некоторой постоянной температуры, которую называют температурой полной компенсации. Кроме того, при изменении температуры из-за различной теплоемкости отдельных деталей гравиметра температура различных частей прибора будет различной. Для ослабления этих влияний, приводящих к недокомпенсации, в гравиметрах предусматривают термостатирование. Поддержка постоянной температуры внутри гравиметра обеспе-

чивается либо с помощью надежной теплоизоляции, для чего гравиметр помещают в сосуд Дьюара, либо с помощью электрических термостатов.

Наконец, влияние температуры можно учесть и с помощью поправки. Для этого определяют температурный коэффициент гравиметра, применяя специальную термокамеру. Однако наблюдения показали, что введение поправки за температуру, как правило, только ухудшает результат. Поэтому стараются выполнять гравиметрические измерения в течение коротких интервалов времени при монотонно изменяющейся температуре и влияние температуры учитывать одновременно при учете поправки за смещение нуля-пункта.

Для исключения *влияния колебаний атмосферного давления* барометрические компенсаторы, как правило, устанавливаются в системах металлических гравиметров. Для кварцевых гравиметров при исключении влияния атмосферного давления на показания гравиметра идут по пути герметизации упругой системы, помещая ее в герметичную камеру с внутренним давлением в доли миллиметра ртутного столба.

### **4.3. Исследования кварцевых астазированных гравиметров**

Как было сказано выше в разделе (4.2.1), на практике наибольшее распространение получили кварцевые астазированные гравиметры. Эти гравиметры, как и металлические, представляют собой высокоточный весьма чувствительный прибор, нуждающийся в самом бережном обращении. При хранении и эксплуатации гравиметров рекомендуется соблюдать следующие меры:

- не находящиеся на полевых работах гравиметры должны храниться отнивелированными и в сухом месте;

- соблюдение температурного режима во время работы в рейсе и в промежутке между рейсами. Гравиметр должен быть защищен от попадания прямых солнечных лучей. В нерабочее время (между рейсами) гравиметр должен находиться при температуре возможно более близкой к температуре воздуха во время наблюдений;

- для уменьшения нелинейности сползания нуля-пункта рекомендуется в нерабочее время гравиметр устанавливать в горизонтальное положение (по уровням), причем маятник не должен лежать на ограничителе;

- особое внимание должно быть уделено амортизации гравиметров при их транспортировке. За перевозкой гравиметров при их транспортировке должен следить оператор;

- в полевых условиях разрешается производить только те регулировки и устранения погрешностей, которые не требуют вскрытия прибора.

Перед началом полевых работ должны выполняться следующие контрольные испытания гравиметров:

- 1) эталонирование приборов;
- 2) определение средней квадратической погрешности единичного измерения гравиметром;
- 3) предварительное определение промежутка времени, гарантирующего возможность линейного учета смещения нуля-пункта гравиметра в пределах требуемой точности;
- 4) определение времени становления отсчета;
- 5) установление гравиметра на минимум чувствительности к наклону (поверка уровней).

### *Эталонирование гравиметров*

Эталонирование состоит из определения цены деления шкалы отсчетного устройства (постоянной гравиметра), нелинейности этой шкалы и зависимости показаний гравиметра от температуры.

Для определения постоянной гравиметра нужно измерить исследуемым прибором известную заранее (эталонную) разность силы тяжести. Если  $\Delta S$  - разность отсчетов гравиметра в оборотах микрометренного винта,  $\Delta g$  – та же разность, выраженная в миллигалах, то цену деления гравиметра с линейной отсчетной шкалой определяют из соотношения

$$C = \frac{\Delta g}{\Delta S}. \quad (4.17)$$

В зависимости от того, каким способом определяют эталонную разность  $\Delta g$  ускорения силы тяжести, различают методы эталонирования: *эталонирование на пунктах с известными значениями силы тяжести, методом наклона, методом навешивания дополнительных грузов.*

**Эталонирование на пунктах с известными значениями силы тяжести** является наиболее общим методом для определения постоянной гравиметров всех типов. Для возможности применения этого метода нужно предварительно выполнить точные измерения на пунктах эталонного базиса. Для эталонирования гравиметров создают международные, национальные и местные базисы. При выборе пунктов базисов нужно стремиться, чтобы ускорения силы тяжести на конечных пунктах базиса максимально различались, поэтому базисы располагают вдоль меридиана. Иногда разность силы тяжести создается за счет изменения силы тяжести с высотой, и пункты эталонного базиса располагают на разных этажах высоких зданий.



Измерения на пунктах базисов выполняют с высокой точностью, чтобы не вносить систематических погрешностей в результаты полевых измерений, вызванных погрешностями постоянной гравиметра. Эталонные базисы, как правило, создают на эталонных гравиметрических полигонах. Точность эталонных базисов для эталонирования гравиметров составляет  $1 \cdot 10^{-4} - 3 \cdot 10^{-5}$ .

При эталонировании *методом наклона* эталонная разность создается за счет уменьшения составляющей силы тяжести, действующей на упругую систему по закону, описываемому формулой

$$\Delta g = -\frac{1}{2}g(\beta^2 + \frac{\beta^4}{12} + \dots) \quad (4.18)$$

Угол наклона  $\beta$  к горизонту, необходимый для эталонирования узкодиапазонных гравиметров, не превышает  $1^\circ$ . Величина  $\Delta g$  при различных углах наклона составляет:

$\Delta g$	$\beta$
10 мГал	$0^\circ 15' 32''$
50 мГал	$0^\circ 34' 44''$
100 мГал	$0^\circ 49' 07''$
200 мГал	$1^\circ 09' 27''$

Исходя из приведенных соотношений, можно сделать вывод, что в формуле (4.18) достаточно учитывать только первый член. Подставляя в (4.17) значение  $\Delta g$ , получим

$$C = -\frac{g\beta^2}{2\Delta S}. \quad (4.19)$$

Найдем необходимую точность определения  $g$  и  $\beta$  для эталонирования гравиметров с точностью  $1 \cdot 10^{-4}$ . Полагая погрешность отсчета  $\Delta S$  равной нулю, напишем

$$\left(\frac{m_c}{C}\right)^2 = \left(\frac{m_g}{g}\right)^2 + \left(\frac{2m_\beta}{\beta}\right)^2. \quad (4.20)$$

Если принять  $\frac{m_g}{g} = \frac{2m_\beta}{\beta}$ , то  $m_g = 70$  мГал, а  $m_\beta'' = 7,3\beta$ , где  $\beta$  – угол наклона в радианах. Таким образом, для эталонирования методом наклона достаточно знать приближенное значение ускорения силы тяжести в пункте наблюдений; точность измерения углов наклона зависит от их величины.

Для эталонирования методом наклона разработаны специальные установки УЭГ (установка для эталонирования гравиметров) и УЭПГ (установка для эталонирования гравиметров полевая).

Кроме определения постоянной гравиметра метод наклона позволяет выполнять детальное исследование шкалы гравиметра: определение нелинейности отсчетной шкалы гравиметра; зависимость цены деления от температуры; изменение цены деления с течением времени.

Постоянная гравиметра (цена деления гравиметра) должна определяться с относительной средней квадратической погрешностью, указанной в табл. 4.1

Таблица 4.1

**Точность определения постоянной гравиметра**

Диапазон измерений разности ускорения силы тяжести, мГал	Относительная средняя квадратическая погрешность	
	Класс прибора I	Класс прибора II
До 100	$3 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$
100 – 500	$2 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$
500 – 1500	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$
1500 – 3000	$1 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$

Контроль за постоянной гравиметра в процессе полевых работ осуществляется систематически на специально закрепленных пунктах с максимально возможной разностью  $\Delta g$  или методом наклона.

Эталонирование гравиметров выполняется до начала полевого сезона и после его окончания: в течение полевого сезона эталонирование проводится при наличии данных об изменении постоянной гравиметра, например, после ремонта гравиметра.

*Средняя квадратическая погрешность единичного измерения* (точность гравиметра) определяется по результатам наблюдений на эталонных полигонах или специально закрепленных пунктах. Для этого с принятой ценой деления (постоянной гравиметра) вычисляются разности значений силы тяжести между пунктами полигона (или закрепленными пунктами) и сравниваются с эталонными разностями. Средняя квадратическая погрешность единичного измерения  $\varepsilon_0$  определяется по формуле

$$\varepsilon_0 = \pm \sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{n} - \frac{k-2}{k} \varepsilon_{II}^2}, \quad (4.21)$$

где  $\Delta$  – отклонение наблюдаемых значений разности силы тяжести от эталонного значения;  $n$  – число единичных определений разности силы тяжести;  $k$  – число пунктов полигона;  $\varepsilon_{II}$  – погрешность определения пунктов полигона.

*Промежуток времени, в течение которого нуль-пункт гравиметра изменяется линейно*, определяется как по результатам эталонирования на полигонах, так и при помощи специальных наблюдений (см. раздел 4.2.2).

Методика *поверки уровней* гравиметра будет подробно изложена ниже в соответствующей лабораторной работе.

#### 4.4. Вариометрические измерения

Вторые производные потенциала силы тяжести  $(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2})$ ;  $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$ ;  $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}$ ;  $\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}$  (см. раздел 2.1.3), которые можно измерить, определяют градиенты силы тяжести в направлениях осей  $x, y$  и кривизны уровенной поверхности. Оси  $x, y$  расположены в плоскости, касательной к уровенной поверхности. Приборы для измерения вторых производных называют *гравитационными вариометрами и градиентометрами*. Теория вариометра и первый прибор для измерения вторых производных были разработаны венгерским физиком Этвешем в конце XIX столетия.

В устройствах гравитационных вариометров используют, в основном, коромысла, подвешенные на вертикальной крутильной нити, с разнесенными по горизонтали и вертикали массами. Для исключения влияния движений воздуха и изменений температуры коромысло помещают в теплоизолирующий футляр, который снабжен устройствами для вращения его вокруг вертикальной оси при переходе от азимута к азимуту. Повороты коромысла фиксируются путем фоторегистрации.

Гравитационные вариометры, а затем и градиентометры с устройствами, основанными на использовании коромысла, успешно использовались при решении многих гравиразведочных задач, особенно при поисках и исследовании соляных куполов, рифогенных структур, трассировании разломов и т.д. Сейчас их используют значительно реже, так как эти приборы громоздки, малопроизводительны и требуют высокой квалификации работающих с ними специалистов.

В настоящее время, в основном, развивается так называемая *динамическая градиентометрия* или метод *измерения градиентов силы тяжести на подвижном основании* (автомашине, самолете, спутнике). Особенно перспективным здесь представляется развитие аэроградиентометрии и спутниковой градиентометрии.

*Вопросы для проверки усвоения материала по теме 4*

1. Сформулировать отличия динамического и статического методов измерения силы тяжести, а также абсолютных и относительных измерений.
2. Преимущество маятниковых относительных измерений силы тяжести перед измерениями статическими гравиметрами и области их применения.
3. Принцип измерения ускорения силы тяжести статическим гравиметром. Основные узлы, составляющие конструкцию статического гравиметра.
4. Классификация статических гравиметров.
5. Что понимается под смещением нуля-пункта гравиметра и как результаты исследований смещения нуля-пункта используются при проложении гравиметрического рейса?
6. Какие влияния внешних условий учитываются в конструкции статических гравиметров?
7. Что понимается под эталонированием гравиметров?
8. Что контролируют продольный и поперечный уровни статического гравиметра?
9. Какие производные можно измерить с помощью вариометра?

## 5. ГРАВИМЕТРИЧЕСКАЯ СЪЕМКА

### 5.1. Мировая опорная гравиметрическая сеть. Государственные опорные сети. Полевые опорные и рядовые гравиметрические сети

Гравиметрическая обеспеченность нашей планеты, подобно геодезической, осуществляется по принципу «от общего к частному». Для этого на первом этапе создается мировая опорная гравиметрическая сеть, которая затем поэтапно сгущается государственными или национальными опорными гравиметрическими сетями, а затем полевыми опорными гравиметрическими сетями, являющимися исходными для выполнения рядовых съемок (рис. 26). *Мировая опорная гравиметрическая сеть задает единую мировую гравиметрическую систему, к которой, строго говоря, должны быть отнесены все гравиметрические измерения, выполненные на Земле.*

Совокупность всех гравиметрических измерений на земной поверхности принято называть *мировой гравиметрической съемкой*. В общем случае она включает в себя все опорные сети и рядовую съемку.



Рис. 26. Схема организации мировой гравиметрической съемки по принципу от общего к частному

Остановимся подробнее на каждом виде гравиметрической сети.

### 5.1.1. Мировая опорная гравиметрическая сеть

Под *опорной гравиметрической сетью* понимают систему гравиметрических пунктов повышенной точности, обеспечивающих исходную основу для различных видов съемок.

При гравиметрических съемках больших территорий необходимо, чтобы гравиметрические данные не содержали заметных систематических ошибок. Мировая опорная гравиметрическая сеть обеспечивает единство исходных абсолютных значений ускорения силы тяжести национальных гравиметрических сетей и масштаба относительных измерений.

К настоящему времени известны 3 мировых гравиметрических системы: Венская, Потсдамская, Международная гравиметрическая стандартная сеть (МГСС-71) или Севрская.

Венская гравиметрическая система названа по исходному гравиметрическому пункту, расположенному в Вене. Она существовала до 1909 года. Точность исходного значения силы тяжести в Вене оценивалась средней квадратической ошибкой  $\pm 10$  мГал.

После 1909 года была внедрена Потсдамская гравиметрическая система, исходное значение в этой системе (пункт Потсдам) характеризовалось ошибкой  $\pm 3$  мГала. Для перехода от Венской к Потсдамской системе значения ускорения силы тяжести должны быть уменьшены на 16 мГал.

Появление высокоточных гравиметрических приборов, позволяющих измерять абсолютное значение ускорения силы тяжести с высокой точностью, порядка  $10^{-9} g$ , дало возможность весьма существенно уточнить мировую опорную гравиметрическую сеть, охватывающую все континенты. В 70-е годы прошлого столетия была создана современная мировая гравиметрическая система, которая называется МГСС-71 и характеризуется следующим образом.

Для создания МГСС-71 использованы абсолютные определения ускорения силы тяжести баллистическими гравиметрами ГАБЛ, выполненные на восьми пунктах земного шара, и около 25000 высокоточных относительных измерений ускорения силы тяжести, 400 из которых произведены маятниковыми гравиметрами. Все маятниковые измерения ускорения силы тяжести приурочены к *международным гравиметрическим базисам: Европейско-Африканскому, западно-Тихоокеанскому и Американскому.*

Математическая обработка выполнялась в два этапа. На первом этапе было осуществлено предварительное уравнивание с целью контроля

выполненных гравиметрических измерений, отбраковки грубых измерений и установления весов уравниваемых разностей ускорения силы тяжести. На втором этапе выполнялось окончательное уравнивание по способу наименьших квадратов всей совокупности качественных измерений.

Благодаря принятому соотношению весов МГСС-71 практически опирается на абсолютное определение ускорения силы тяжести, выполненное с наивысшей точностью стационарным баллистическим гравиметром на постоянном гравиметрическом пункте в Севре. Масштаб системы задан абсолютными определениями ускорения силы тяжести на восьми пунктах и маятниковыми связями. Точность масштаба МГСС-71 оценивается величиной порядка  $5 \cdot 10^{-5}$ . Ускорение силы тяжести в любом пункте МГСС-71 после уравнивания характеризуется точностью не хуже  $\pm 0,2$  мГал.

По результатам уравнивания составлен каталог МГСС-71, в который вошли подробные сведения о 1854 гравиметрических пунктах. Этот каталог хранится в Международном бюро мер и весов в Париже.

В настоящее время наряду с системой МГСС-71 используется и Потсдамская система. Уровень системы МГСС-71 отличается от уровня Потсдамской системы на 14 мГал. Поэтому на Генеральной ассамблее в 1971 году была рекомендована поправка к определениям в Потсдамской системе для перехода в новую систему, равная

$$\delta g = -14 \text{ мГал.} \quad (5.1)$$

Одновременно была рекомендована и формула нормальной силы тяжести, ранее включенная в геодезическую референц-систему 1967 года (формула 2.43). Переход от формул Гельмерта (2.41) и Кассиниса (2.42) к формуле 1967 года может быть осуществлен с помощью соотношений

$$\gamma_{1967} = \gamma_G + 1,8 + 0,40 \sin^2 \varphi, \quad (5.2)$$

$$\gamma_{1967} = \gamma_K - 17,2 + 13,6 \sin^2 \varphi. \quad (5.3)$$

Обращает на себя внимание близость формул 1967 года и Гельмерта. Это объясняет широкое применение формулы Гельмерта вплоть до настоящего времени.

Используемые в настоящее время гравиметрические системы (МГСС-71 и Потсдамская) в свете новых требований к установлению систем координат и решению научных и практических задач, связанных с гравиметрией и высшей геодезией, нуждаются в серьезном совершенствовании. Поэтому мировая опорная гравиметрическая сеть уточняется и в перспективе предполагается, что на всех пунктах, входящих в эту сеть, будут выполнены только абсолютные измерения ускорения силы тяжести.

### ***5.1.2. Государственные (национальные) опорные гравиметрические сети***

В общем случае государственные или национальные опорные гравиметрические сети создаются на территории отдельных государств относительным методом, то есть относительно исходного пункта, связанного с Потсдамской системой или с мировой гравиметрической системой МГСС-71. Измерения в этих сетях выполняют, в основном, высокоточными маятниковыми и статическими гравиметрами. Как правило, государственные опорные сети состоят из редкой сети маятниковых пунктов и привязанной к ней сети гравиметровых пунктов (пунктов, на которых выполнены измерения статическими гравиметрами) разных классов. Маятниковые определения уменьшают систематические ошибки гравиметровых связей и задают масштаб национальной сети. Сети развивают в виде полигонов и уравнивают по способу наименьших квадратов.

Ясно, что при таком подходе точность государственных сетей будет ниже, чем точность мировой опорной гравиметрической сети. Однако, начиная с 70-х годов прошлого столетия, точность созданных таким образом Национальных опорных гравиметрических сетей перестала устраивать гравиметрические потребности ряда государств: США, Германии, Японии, Канады, СССР и т.д. В связи с этим в данных государствах созданы высокоточные национальные гравиметрические сети, опирающиеся на национальные пункты, на которых выполнены абсолютные измерения ускорения силы тяжести. Схему создания этих сетей мы разберем на примере гравиметрической сети бывшего СССР.

*Государственная опорная гравиметрическая сеть (ГОГС) СССР* была создана в 1978 – 1983 гг. по принципу перехода от общего к частному. Эта сеть состоит из государственной фундаментальной гравиметрической сети (ГФГС), на основе которой развивается государственная гравиметрическая сеть I класса (ГГС-I), которая затем последовательно сгущается II и III классами.

ГФГС совместно с ГГС-I образуют высокоточную государственную гравиметрическую сеть, создание которой как раз и включает в себе принципиальное отличие от организации государственных гравиметрических сетей в большинстве стран мира.

*Цели и задачи высокоточной государственной сети* заключаются в следующем:



1. Задание единой гравиметрической системы на территорию всего государства, которая являлась бы независимой от мировой опорной гравиметрической сети, но в то же время была надежно с ней связана.

2. Распространение заданной единой гравиметрической системы на территорию государства с необходимой точностью и плотностью.

3. Решение научных и технических задач, требующих точного гравиметрического обеспечения, включая изучение гравитационного поля и фигуры Земли и их изменений во времени, а также метрологию всех выполняемых в стране гравиметрических работ.

Сеть представляет собой совокупность закрепленных на местности и гравиметрически связанных между собой пунктов, на которых выполняют высокоточные относительные или *абсолютные* измерения ускорения силы тяжести и осуществляют определение высот и координат этих пунктов.

*Государственная фундаментальная гравиметрическая сеть (ГФГС)* является высшим звеном гравиметрической сети СССР и служит для определения и уточнения гравиметрической системы страны, ее связи с Мировой и зарубежными гравиметрическими системами, для метрологического обеспечения гравиметрических сетей низших классов и гравиметрической съемки территории государства.

ГФГС состоит из семи пунктов, на которых выполнены *абсолютные измерения ускорения силы тяжести* баллистическими гравиметрами ГАБЛ, и связанных с ними пунктов-спутников (не менее 4-х в радиусе до 50 км), предназначенных для выявления возможных локальных вариаций силы тяжести. Пункты ГФГС расположены в Москве (главный гравиметрический пункт), Апатитах, Полтаве, Тбилиси, Ташкенте, Новосибирске и Петропавловске-Камчатском.

Основной научной задачей, решаемой с помощью ГФГС, является изучение вариаций гравитационного поля во времени. С этой целью на фундаментальных пунктах, расположенных в различных геолого-тектонических регионах, систематически (не реже 1 раза в 5 лет) выполняются абсолютные и относительные определения ускорения силы тяжести с максимально возможной на данный момент точностью. ГФГС надежно связана с Потсдамом и Севром путем определения приращения ускорения силы тяжести относительно пунктов мировой опорной сети.

Государственная гравиметрическая сеть I класса (ГГС-I) развивается на основе ГФГС и ее основной задачей является распространение единой гравиметрической системы на территорию всей страны с необходимой точностью. Построение ГГС-I выполняют поэтапно. На первом этапе оп-

ределяют от пунктов ГФГС основные пункты I класса с густотой один пункт на 50 – 100 тыс. км<sup>2</sup>. Результаты измерений на основных пунктах I класса и пунктах ГФГС совместно уравнивают и каталогизируют. Затем, учитывая перспективные запросы практики, выполняют сгущение сети до плотности один пункт на 10 – 25 тыс. км<sup>2</sup> путем вставки отдельных пунктов, именуемых далее пунктами I класса, в созданную на первом этапе сеть. Пункты размещаются с учетом удобства подъезда к ним на автомашине или подлета на вертолете.

После завершения работ по сгущению ГГС-I сеть уравнивается совместно с ГФГС как единое построение и издается новый каталог, включающий все пункты ГФГС и ГГС-I. Пункты ГФГС и ГГС-I служат исходными при развитии гравиметрических сетей низших классов.

Основные технические характеристики ГФГС и ГГС-I приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

**Основные характеристики высокоточной гравиметрической сети  
бывшего СССР**

Вид сети	Средняя плотность, кол-во км <sup>2</sup> на 1 пункт	СКО из уравнивания, мГал	Приборы, используемые для измерений	Закрепление на местности	Класс нивелирования
ГФГС	2 000 000	≤ 0,02	Баллистические гравиметры ГАБЛ, маятниковые приборы «Агат»	Железобетонные монолиты размером (100×100) см <sup>2</sup>	I-II
ГГС-I: основные пункты;  пункты I класса	50000 – 100000	≤ 0,05	Маятниковые приборы «Агат»	Железобетонные монолиты размером (80×80) см <sup>2</sup>	I-II
	10000 – 25000	≤ 0,05	Маятниковые приборы «Агат», высокоточные статические гравиметры типа ГАГ-2 и ГНУК-А	Железобетонные монолиты размером (60×60) см <sup>2</sup>	IV

Точность гравиметрической сети II класса составляет (0,03 – 0,10) мГал.

По мере повышения точности гравиметрических измерений государственные гравиметрические сети должны уточняться. В настоящее время в России приступили к реализации проекта по обновлению и уточнению госу-

дарственной гравиметрической сети 1979 – 1983 гг. В Беларуси также разработан проект по обновлению гравиметрической сети. В высокоточной государственной гравиметрической сети Беларуси запроектировано 3 пункта ГФГС, 7 основных пунктов ГГС-I и 7 пунктов I класса. Проектная точность определения ускорения силы тяжести в ней составляет менее 0,02 мГал.

### ***5.1.3. Полевая опорная гравиметрическая сеть (ПОГС)***

Государственные опорные гравиметрические сети служат исходной основой для различных видов съемок. Эти съемки, сгущающие государственную гравиметрическую сеть, классифицируются как рядовые гравиметрические съемки.

Непосредственно перед началом наблюдений на пунктах рядовой сети или одновременно с ними создается *полевая опорная гравиметрическая сеть (ПОГС), под которой понимают сеть гравиметровых пунктов повышенной точности, развитая с целью учета смещения нуля-пункта гравиметра в рядовых рейсах, а также для приведения результатов гравиметрических измерений в рядовых рейсах в единую систему.*

Методика построения ПОГС изложена в Инструкции по гравиметрической разведке 1975 года.

Точность ПОГС должна быть в 1,5 – 2 раза выше точности рядовой сети. Повышение точности достигается за счет использования лучших гравиметров, а также более совершенной методики наблюдений. С этой целью при создании ПОГС применяют метод многократно-групповых измерений, когда в гравиметрическом рейсе сразу используют несколько гравиметров, сокращают длительность рейсов за счет использования более совершенных транспортных средств, выполняют уравнивание сети. ПОГС развивают в виде полигонов, в виде центральной и двухступенчатой систем и по методу узловых точек.

При создании опорной сети по центральной системе все пункты опорной сети непосредственно связывают с исходным опорным пунктом. Для повышения точности пункты опорной сети рекомендуется также связывать между собой. Для привязки определяемых пунктов к исходному опорному пункту применяют метод многократно-групповых измерений. Значение ускорения силы тяжести опорных пунктов относительно исходного определяют как среднее арифметическое из результатов многократных измерений. Средняя квадратическая погрешность  $m$  измерения разно-

сти силы тяжести между пунктами опорной сети, созданной по методу центральной системы, равна

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{N_{cp}}}, \quad (5.4)$$

где

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum \delta^2}{N - n}}. \quad (5.5)$$

В формулах (5.4) и (5.5)  $N_{cp}$  – среднее для сети число наблюдений на одном опорном пункте,  $\delta$  – уклонение измеренных значений силы тяжести от среднего арифметического,  $N$  – общее число всех измерений в сети,  $n$  – число определяемых опорных пунктов.

Двухступенчатая система построения опорной сети заключается в создании каркасной опорной сети по методу центральной системы и заполняющей сети опорных пунктов, которая выполняется рейсами, опирающимися на пункты каркасной сети. Двухступенчатая система применяется в том случае, если на площади съемки нельзя создать опорную сеть необходимой плотности с помощью одной центральной системы.

Наблюдения по методу узловых точек применяют в том случае, если опорная сеть по каким-либо причинам не была создана до начала измерений на пунктах рядовой сети или если плотность опорной сети оказалась недостаточной. Узловые точки образуются при пересечении в одном пункте нескольких рейсов. Сеть узловых пунктов уравнивается и используется затем для обработки наблюдений в рядовых рейсах.

Полевая опорная сеть должна иметь надежную привязку к пунктам государственной опорной сети I и II классов. Пункты полевой опорной сети, надежно закрепленные на местности, образуют опорную сеть III класса.

#### ***5.1.4. Наблюдения на пунктах рядовой сети***

Рядовые сети развиваются при выполнении различных видов гравиметрических съемок, и они должны обязательно опираться на полевые опорные гравиметрические сети.

Наблюдения на пунктах рядовой сети выполняют статическими гравиметрами. Методика наблюдений в рядовых сетях должна быть построена таким образом, чтобы оказалось возможным учесть смещение нуля-пункта гравиметра в результатах измерений, а также свести к минимуму влияние

различного рода ошибок. Для этого измерения организуют в виде *гравиметрического рейса*, под которым понимают совокупность последовательных гравиметрических измерений на различных пунктах сети, объединенных общей характеристикой смещения нуля-пункта гравиметра.

При измерениях предполагается, что смещение нуля-пункта гравиметра изменяется по линейному закону строго пропорционально времени. Поэтому гравиметрические рейсы ограничиваются во времени (продолжительность не более 4 – 8 часов). Кроме того, гравиметрический рейс должен прокладываться в одинаковых внешних условиях, а также в одинаковом режиме транспортировки.

Наблюдения на пунктах рядовой сети ведут по одной из следующих схем:

- 1) по схеме прямого замкнутого хода (рис. 27)

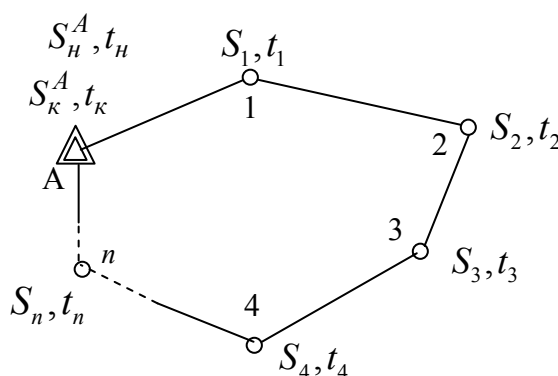


Рис. 27. Схема замкнутого хода гравиметрических наблюдений в рядовой сети:  
 А – исходный пункт полевой опорной сети, на котором начинается и заканчивается гравиметрический рейс;

$S_K^A, S_H^A$  – конечный и начальный отсчеты по гравиметру на исходном пункте гравиметрического рейса, переведенные в мГалы;

$t_K, t_H$  – моменты взятия конечного и начального отсчетов по гравиметру;

$S_1, S_2, \dots, S_n$  – текущие отсчеты по гравиметру;  $t_1, t_2, \dots, t_n$  – время взятия текущих отсчетов

Скорость смещения нуля-пункта гравиметра  $k$  в этом случае определяется по формуле

$$k = \frac{(S_K - S_H)_{\text{мГал}}}{t_K - t_H}. \quad (5.6)$$

2) по схеме прямого хода, опирающегося на два исходных пункта (рис. 28)

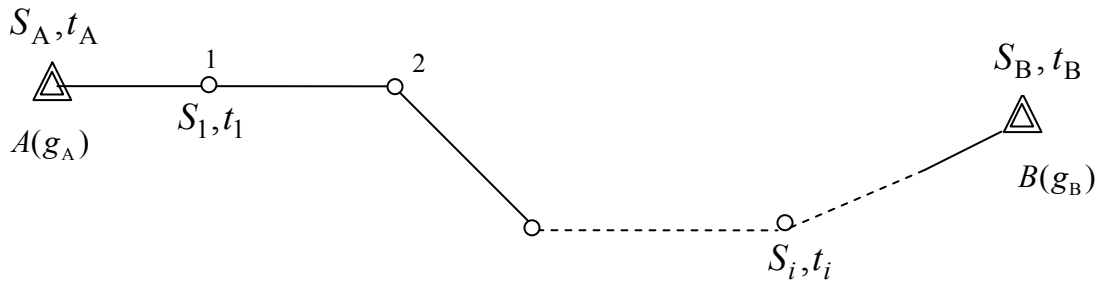


Рис. 28. Прямой ход, опирающийся на два исходных пункта:  
 $g_A, g_B$  – значения ускорения силы тяжести на исходных пунктах

Скорость смещения нуля-пункта гравиметра в данной схеме наблюдений вычисляется по формуле

$$k = \frac{(S_B - S_A)_{\text{мГал}} - (g_B - g_A)}{t_B - t_A}, \quad (5.7)$$

где  $S_B, S_A, t_B, t_A$  – отсчеты по гравиметру на исходных пунктах в миллигалах и время их взятия.

3) схема прямого и обратного хода (рис. 29)

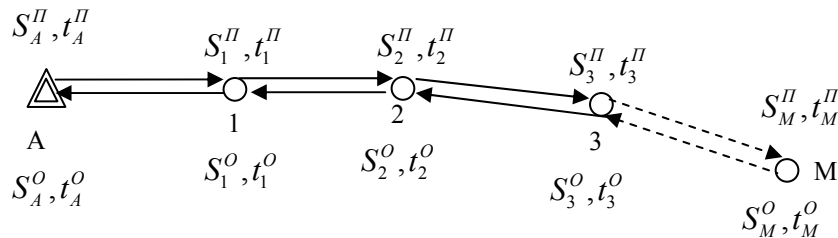


Рис. 29. Схема прямого и обратного хода

$S_A^II, t_A^II, S_1^II, t_1^II, \dots, S_M^II, t_M^II$  – отсчеты по гравиметру и временные отсчеты в прямом ходе;

$S_A^O, t_A^O, S_1^O, t_1^O, \dots, S_M^O, t_M^O$  – отсчеты по гравиметру и временные отсчеты в обратном ходе

Схема позволяет максимально проконтролировать линейный характер смещения нуля-пункта гравиметра, так как на каждой точке имеем два отсчета по гравиметру, которые соответствуют двум моментам времени.

Графики этих отсчетов в пределах рейса должны быть параллельными между собой и служат дополнительным контролем линейного характера смещения нуля-пункта используемого в рейсе гравиметра. Схема применяется только в том случае, если смещение нуля-пункта гравиметра недостаточно линейно и неустойчиво. Скорость смещения нуля-пункта гравиметра здесь можно вычислить по способу наименьших квадратов или как среднее весовое.

#### 4) схема прямого хода с разрывами

Используется в труднодоступных районах, когда рейс нельзя выполнить в течение одних суток (рис. 30).

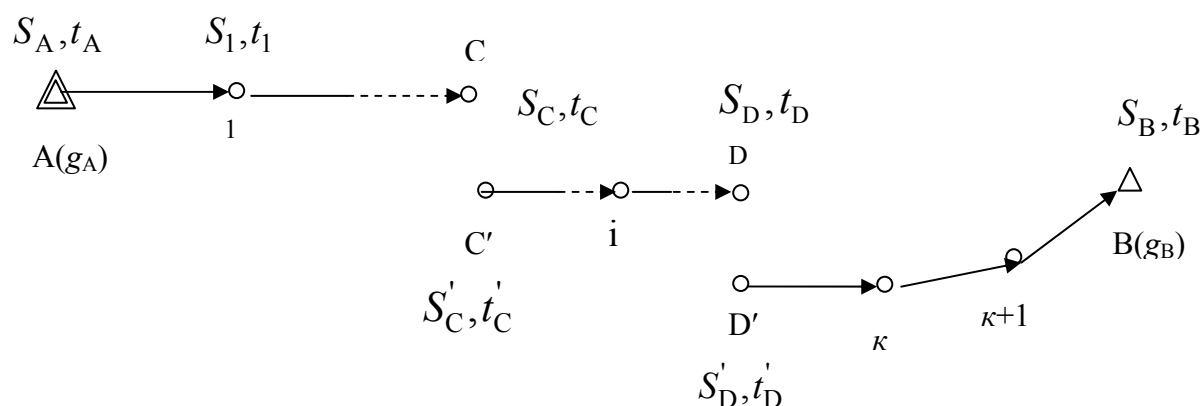


Рис. 30. Схема прямого хода с разрывами

A, B – исходные пункты; C и D – точки, на которых устраивают перерывы в наблюдениях. На точках C и D по гравиметру берут отсчеты с фиксацией соответствующих моментов времени два раза: до перерыва ( $S_C, t_C, S_D, t_D$ ) и после перерыва ( $S'_C, t'_C, S'_D, t'_D$ ).

Скорость смещения нуля-пункта гравиметра в этом случае определяется по формуле

$$k = \frac{(S_B - S_A)_{мГал} - (g_B - g_A) - (S'_C - S_C)_{мГал} - (S'_D - S_D)_{мГал}}{(t_B - t_A) - (t'_C - t_C) - (t'_D - t_D)}. \quad (5.8)$$

Кроме того, в рядовых рейсах часто используют методику разностного нуля-пункта (когда рейс прокладывают двумя гравиметрами), а также по схеме с узловыми точками.

*Методика разностного нуля-пункта.* Суть этой методики заключается в том, что с одного или нескольких опорных пунктов выполняют рейсы одновременно двумя гравиметрами. Для каждого гравиметра находят смещение нуля-пункта, используя редкую сеть опорных пунктов. Затем

строят график разности скорости смещения нуля-пункта и определяют точки перегиба кривой. В этих точках образуют дополнительные опорные пункты. Поправку за смещение нуля-пункта гравиметра вводят с учетом дополнительных наблюдений на опорных пунктах.

*Узловой метод.* Если местная опорная сеть по каким-либо причинам не была создана до начала полевых работ, наблюдения можно вести по схеме, представленной на рис. 31.

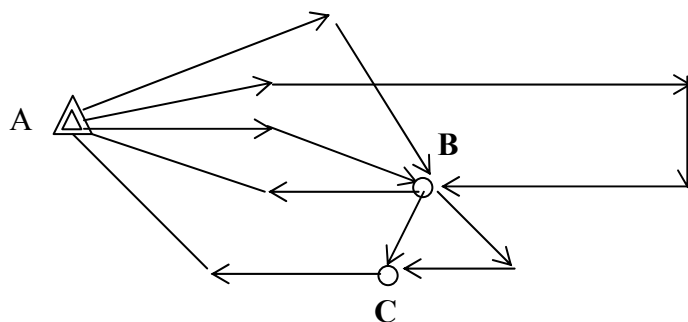


Рис. 31. Схема наблюдения по узловому методу

Точка А является пунктом опорной сети, точки В и С, в которых пересекаются несколько рейсов, – дополнительные опорные или узловые точки. После завершения полевых работ сеть узловых пунктов уравнивают и в дальнейшем узловые пункты используют как опорные для вычисления поправок за смещение нуля-пункта.

## 5.2. Виды гравиметрических съемок. Требования к проектированию гравиметрической съемки. Топографо-геодезическое обеспечение гравиметрической съемки

### 5.2.1. Виды гравиметрических съемок

Гравиметрической съемкой называют совокупность гравиметрических наблюдений и определения координат пунктов. Гравиметрические съемки производят для изучения гравитационного поля, поверхности и внутреннего строения Земли, гравиметрической разведки, обработки результатов геодезических измерений.

Различают несколько *видов гравиметрических съемок*. Гравиметрическую съемку, выполненную с гравиметрами, называют *гравиметровой*, а пункты этой съемки – гравиметровыми. Съемку, выполненную вариометрами или градиентометрами, называют *вариометрической*, а пункты этой съемки – вариометрическими пунктами.



Гравиметрическую съемку, необходимую для определения гравитационного поля и поверхности Земли, называют *мировой гравиметрической съемкой*. Как говорилось ранее, под мировой съемкой понимают совокупность всех гравиметрических наблюдений, выполняемых на Земле. Кроме того, гравиметрическая съемка может быть *региональной, поисковой, детальной, профильной, площадной и съемкой сгущения*.

*Региональную гравиметрическую съемку* выполняют при региональных геологических исследованиях на территориях протяженностью в тысячи километров. С помощью региональной съемки осуществляют геолого-тектоническое и литолого-петрографическое районирование с целью выявления участков для проведения более детальных геолого-геофизических исследований. В результате региональной съемки составляют гравиметрические карты мелких масштабов (1:1 000 000, 1:500 000) с сечением изоаномал (линий равных аномалий) 2 – 5 мГал и 10 мГал.

Гравиметрическая съемка, выполняемая в районах, перспективных на обнаружение полезных ископаемых, называется *поисковой съемкой*. В результате поисковой съемки составляют гравиметрические карты масштабов 1:200 000 – 1:100 000 с сечением 1 – 2 мГал.

Гравиметрическая съемка, выполняемая с максимально возможной точностью и высокой плотностью распределения пунктов, называется *детальной гравиметрической съемкой*. По материалам детальной съемки составляют карты масштабов 1:50 000 – 1:5000 с сечением (0,05 – 0,5) мГал.

Результаты детальных съемок, в основном, используют для изучения строения нефтегазоносных районов, определения участков, перспективных на черные, цветные и редкие металлы, исследования крупных залежей полезных ископаемых и пород, содержащих полезные ископаемые.

По характеру распределения пунктов на местности съемки могут быть площадными и профильными. *Площадной* называют гравиметрическую съемку с относительно равномерным распределением гравиметрических пунктов или профилей на местности. При проведении площадной съемки наблюдения выполняют отдельными линиями (профилями). Если расстояния между пунктами наблюдения вдоль профиля и между профилями одинаковы, площадная съемка называется *равномерной*. При неравномерной съемке расстояния между профилями больше, чем между точками наблюдений вдоль профиля. Чтобы не снижать достоверность гравиметрической карты, расстояние между профилями не должно превышать расстояние между пунктами вдоль профиля более чем в 5 раз.

Если расстояние между профилями больше, съемка называется *профильной*. Профильная съемка выполняется при изучении протяженных геологических объектов, при проложении профилей повышенной точности для повышения качества интерпретации гравиметрических данных и при наблюдениях в труднодоступной местности, например, в Антарктиде. При гравиметрической разведке развивают, в основном, площадные съемки.

Гравиметрические наблюдения за редким исключением выполняют относительным методом. Для приведения относительных измерений в единую систему, контроля за смещением нуль-пункта гравиметров и определения их масштабных коэффициентов необходимо иметь систему гравиметрических пунктов, разности ускорений силы тяжести между которыми известны с высокой точностью. Систему пунктов повышенной точности называют опорной гравиметрической сетью. Поэтому гравиметрическую съемку делят на опорные сети и рядовую съемку (см. раздел 5.1).

Гравиметрическую съемку вокруг астропунктов или пунктов триангуляции, выполняемую для вычисления уклонения отвеса и астрономо-гравиметрического нивелирования, называют *съемкой сгущения*.

### **5.2.2. Требования к проектированию гравиметрической съемки**

Все выше перечисленные гравиметрические съемки выполняют на основании технического проекта. В проекте формулируется задача съемки, в зависимости от которой, а также от ожидаемого гравитационного эффекта и геологического строения района работ должны быть определены и обоснованы:

- 1) вид и точность съемки;
- 2) рациональная густота сети пунктов наблюдений (расстояние между пунктами и профилями), количество и расположение опорных пунктов;
- 3) точность определения силы тяжести и вторых производных потенциала силы тяжести, а также координат и высот гравиметрических пунктов;
- 4) сечение изоаномал и масштаб отчетной карты;
- 5) способы обработки и интерпретации.

В проекте излагается методика наблюдений на опорных рядовых пунктах при работе гравиметрами; обосновывается система наблюдений при работе с вариометрами и градиентометрами; предусматривается возможное сгущение сети пунктов наблюдений на участках, требующих детализации; оценивается необходимость введения поправки за рельеф и выби-

рается радиус области учета влияния рельефа; указываются перекрытия с соседними съемками; определяются процент независимых контрольных наблюдений и процент дополнительных пунктов наблюдений для определения погрешностей интерполяции карты; объемы и сроки выполнения работ; определяются методика, точность и сроки выполнения геодезических работ.

Проектная точность съемки (среднеквадратическая погрешность определения аномалий силы тяжести) выбирается в зависимости от интенсивности предполагаемых или исследуемых аномалий, а также условий работ и заданного масштаба съемки.

При площадной съемке среднеквадратическая погрешность определения аномалий силы тяжести должна составлять 0,4 интервала сечения изоаномал отчетной карты, в горных районах – 0,5 интервала сечения изоаномал.

Среднеквадратическая погрешность определения аномалий силы тяжести или ее производных не должна превышать при поисковой съемке 1/5, а при региональной – 1/3 минимальной величины локальных аномалий гравитационного поля, создаваемых искомыми объектами.

Таблица 5.2

**Технические характеристики съемки в соответствии с масштабами карт  
(для равнинных районов)**

Масштаб карт	Сечение изоаномал, мГал	СКР определения аномалий силы тяжести в редукции Буге, мГал	СКП наблюдаемых значений силы тяжести, мГал	Полная погрешность интерполяции, мГал	СКР определения высот, $m_H$ , м	СКП определения плановых координат $m_{x,y}$ , м	Густота сети	
							Число пунктов на 1 км <sup>2</sup>	Расстояния между пунктами при наблюдениях по профилям, м
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1:1000000 1:500 000	5	± 1,5	± 0,5	± 2,0	± 5,0	± 200	0,04–0,10	2500–5000
1:200 000	2	± 0,8	± 0,4	± 1,0	± 2,5	± 100	0,10–0,25	1000–2000
1:100 000	1	± 0,4	± 0,3	± 0,5	± 1,2	± 80	0,25–1,00	500–1000
1:50 000	0,50	± 0,20	± 0,15	± 0,35	± 0,70	± 40	2–30	100–500
	0,50	± 0,10	± 0,07	± 0,20	± 0,35		4–50	
1:25 000	0,25	± 0,10	± 0,06	± 0,20	± 0,35	± 20	12–60	50–250
	0,20	± 0,08	± 0,06	± 0,15	± 0,25		16–80	
1:10 000	0,20	± 0,08	± 0,06	± 0,15	± 0,20	± 4	20–100	20–100
	0,10	± 0,04	± 0,03	± 0,07	± 0,10		25–200	
1:5 000	0,10	± 0,04	± 0,030	± 0,07	± 0,10	± 2	50–250	10–50
	0,05	± 0,02	± 0,015	± 0,03	± 0,05		100–500	

Профили наблюдений при площадной съемке, как правило, должны быть прямолинейными, ориентироваться вкрест простирания изучаемых объектов и связываться между собой не менее чем двумя-тремя профилями. При наличии на исследуемой площади профилей других геофизических методов и бурения гравиметрические профили должны быть совмещены с ними.

Густота сети пунктов наблюдений зависит от задач съемки, размеров и интенсивности ожидаемых аномалий и выбранного сечения изоаномал отчетной карты. Аномалия силы тяжести считается достоверной, если она выделена не менее чем на трех пунктах различных рейсов и имеет амплитуду, не меньшую сечения изоаномал карты.

При детальной съемке расстояние между профилями и пунктами наблюдений должно обеспечивать интерполяцию не более одной изолинии. На участках выявленных аномалий рекомендуется сгущение съемки.

Масштаб отчетной карты и технические характеристики съемки устанавливаются в соответствии с табл. 5.2 для равнинных районов и табл. 5.3 для горных районов.

Таблица 5.3

**Технические характеристики съемки в соответствии с масштабами карт  
(для горных районов)**

Масштаб карт	Сечение изоаномал, мГал	СКР определения аномалий силы тяжести в редукции Буге, мГал	СКП наблюдаемых значений силы тяжести, мГал	Полная погрешность интерполяции, мГал	СКР определения высот, $m_H$ , м	СКП определения плановых координат $m_{x,y}$ , м	Густота сети	
							Число пунктов на 1 км <sup>2</sup>	Расстояния между пунктами при наблюдениях по профилям, м
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1:1000000 1:500 000	5	± 2,0	± 0,5	± 3,0	–	–	0,04–0,10	2500–5000
1:200 000	2	± 1,0	± 0,40	± 1,50	± 3,00	± 100	0,10–0,25	1000–2000
1:100 000	1	± 0,5	± 0,25	± 0,70	± 1,80	± 100	0,25–1,00	500–1000
1:50 000	1	± 0,5	± 0,25	± 0,70	± 1,60	± 50	1,0–10,0	100–500
	0,50	± 0,25	± 0,12	± 0,35	± 0,90		2–30	
1:25 000	0,50	± 0,25	± 0,12	± 0,35	± 0,90	± 25	4–50	50–250
	0,25	± 0,12	± 0,06	± 0,20	± 0,45		12–60	
1:10 000	0,20	± 0,10	± 0,06	± 0,15	± 0,25	± 5	20–100	20–100
1:5 000	0,10	± 0,05	± 0,03	± 0,07	± 0,12	± 2	50–250	10–50

Методика и техника полевых измерений определяются типом применяемой аппаратуры, требованиями к точности измерений, физико-географическими условиями участка работ и другими условиями. Она излагается в Инструкции по гравиметрической разведке 1975 г.

### 5.2.3. Топографо-геодезическое обеспечение гравиметрической съемки

Пространственные координаты гравиметрических пунктов нужны для вычисления аномалий силы тяжести, составления каталога пунктов и нанесения пунктов на карты. Установим требования к точности определения координат пунктов.

Для вычисления аномалий силы тяжести нужно найти нормальное значение ускорения силы тяжести и вычислить поправку (редукцию) в измеренное значение ускорения силы тяжести  $g$ . Аномалию Буге вычисляют по формуле (с учетом поправки за рельеф)

$$(g - \gamma)_B = g - 2\pi f \delta H^\gamma + \Delta g_p - \gamma_0 + 0,3086 H^\gamma. \quad (5.9)$$

Найдем погрешность  $m_{\Delta g}$  аномалии, вызванную погрешностями координат. Дифференцируя (5.9) по  $B$  и  $H$  с учетом зависимости  $\gamma_0$  от широты  $B$  (см. раздел 2.2.2) и переходя к погрешностям, получим

$$m_{\Delta g}^2 = \left(\frac{\partial \gamma_0}{\partial B}\right)^2 m_B^2 + (0,3086 H^\gamma - 2\pi f \delta)^2 m_H^2. \quad (5.10)$$

Далее перейдем от  $B$  к  $x$  и, принимая для широт от  $34^\circ$  до  $54^\circ$   $\frac{\partial \gamma_0}{\partial x} = 0,81 \sin 2B$  мГал/км = 0,0008 мГал/м, а значение коэффициента  $(0,3086 - 2\pi f \delta H)$  при плотности  $\delta = 2,5$  г/см<sup>3</sup> – равным 0,2 мГал/м, получим

$$m_{\Delta g}^2 = (0,0008)^2 m_x^2 + (0,2)^2 m_H^2. \quad (5.11)$$

В (5.11)  $m_x$  и  $m_H$  выражены в метрах. Так как коэффициент при  $m_x$  мал, требования к точности определения плановых координат для вычисления аномалий силы тяжести невысоки: при допустимой погрешности аномалий в 0,01 мГал допустимая погрешность  $m_{x,y}$  (считаем, что  $m_x = m_y$ ) составит 12,5 м. Поэтому при определении погрешностей плановых координат нужно исходить из масштаба отчетной карты. Если графическая точность нанесения пункта на карту равна 0,2 – 0,4 мм, то для масштаба 1:10000 погрешность плановых координат должна быть не ниже 40 см.

Точность определения высот гравиметрических пунктов из формулы (5.11) является следующей: при  $m_{\Delta g}$  в 0,01 мГал высоты следует определять

с точностью 5 см. Точность привязки гравиметрических пунктов определена Инструкцией по гравиметрической разведке и приведена в табл. 5.2 и 5.3 предыдущего раздела. Метод определения координат гравиметрических пунктов зависит от требуемой точности их определения. Плановые координаты при составлении гравиметрических карт мелких масштабов достаточно снять с топографических карт более крупных масштабов. При съемках масштабов 1:50000 и крупнее для определения плановых координат прокладывают теодолитные ходы или строят засечки. Как следует из указанных таблиц, точность определения высот достаточно высока. При детальном съемках они уже определяются из геометрического нивелирования.

Топографо-геодезическое обеспечение должно быть осуществлено раньше гравиметрической съемки.

### **5.3. Методика и математическая обработка результатов измерений. Уравнивание опорной сети**

Обработка результатов гравиметровых измерений разделяется на два этапа: *текущую и камеральную*.

*Текущая* обработка должна обеспечивать непрерывный контроль качества и получение предварительных результатов съемки. Она включает: обработку наблюдений, выполняемых в опорных и рядовых рейсах; уравнивание опорных сетей; вычисление наблюденных значений силы тяжести; учет нормального поля; введение поправок за высоту и притяжение промежуточного слоя; вычисление аномалий силы тяжести.

*Камеральная* обработка материалов выполняется после завершения полевых работ в камеральный период. Она включает: вычисление поправок за влияние рельефа местности; уточнение плотности промежуточного слоя; вычисление аномалий силы тяжести с различной плотностью промежуточного слоя; построение окончательных карт и графиков аномалий силы тяжести в различных редуциях.

При *обработке наблюдений на пунктах рядовой сети* переводят отсчеты по гравиметру в оборотах в миллигалы, а также вводят следующие поправки:

- 1) поправку за нелинейность отсчетной шкалы гравиметра;
- 2) поправку за температуру;
- 3) поправку за приливные изменения силы тяжести;
- 4) поправку за смещение нуля-пункта гравиметра.

В результаты высокоточных измерений дополнительно еще вводится поправка за изменение атмосферного давления.

Отсчеты в оборотах переводятся в миллигалы по следующей формуле:

$$S_{\text{мГал}} = c_{\text{мГал/об}} \cdot S_{\text{об}}, \quad (5.12)$$

где  $c$  – постоянная гравиметра, выраженная в единицах мГал/оборот;  
 $S_{\text{об}}$  – отсчет по гравиметру в оборотах.

Поправка за нелинейность отсчетной шкалы гравиметра вводится по результатам исследований конкретного гравиметра.

Поправка за температуру  $\delta_{g_T}$  вводится при работе с нетермостатированными гравиметрами и при продолжительных гравиметрических рейсах по формуле

$$\delta_{g_T} = k_T(T_i - T_0) + k'_T(T_i - T_0)^2, \quad (5.13)$$

где  $k_T$ ,  $k'_T$  – линейный и квадратичный температурные коэффициенты для материалов, из которого сделаны упругая система гравиметра; выбирается либо из паспорта гравиметра, либо из специальных физических справочников.

$T_0$  – температура в исходном пункте наблюдения;

$T_i$  – температура на текущем наблюдаемом пункте.

К сожалению, температурные коэффициенты  $k_T$  и  $k'_T$  на практике оказываются известны недостаточно точно и при проложении гравиметрических рейсов, по возможности, стараются эту поправку не учитывать, а рейсы делать непродолжительными и прокладывать их в постоянных или плавно изменяющихся температурных условиях. В этом случае поправка за температуру войдет в поправку за смещение нуля-пункта гравиметра и будет учтена с введением поправки за смещение нуля-пункта гравиметра.

Приливные поправки, в основном, вызываются изменениями расположения Луны и Солнца по отношению к Земле. Эта поправка хорошо изучена и вводится по известным формулам либо снимается со специальных графиков. Она может достигать 0,3 мГал и во всех точных гравиметрических измерениях обязательно учитывается.

Поправка за смещение нуля-пункта гравиметра  $\delta_{g_0}$  вводится всегда. Она вычисляется по формуле

$$\delta_{g_0} = -k(t_i - t_0), \quad (5.14)$$

где  $k$  – скорость смещения нуля-пункта гравиметра, которая вычисляется по соответствующей формуле в зависимости от схемы проложения гравиметрического хода (см. раздел 5.1.4);

$(t_i - t_0)$  – приращение времени относительно начального момента.

Для контроля и оценки точности результатов гравиметрических измерений в рядовых сетях прокладывают контрольные гравиметрические рейсы, пункты которых как минимум в 10 % от общего числа пунктов совмещаются с пунктами рядовой сети. При этом стараются, чтобы контрольные гравиметрические рейсы начинались от опорных пунктов, не участвующих при проложении рядовых рейсов. Средняя квадратическая погрешность измерения единичной разности ускорения силы тяжести  $m_{\Delta g}$  по результатам контрольных наблюдений на пунктах вычисляется по формуле разностей двойных измерений:

$$m_{\Delta g} = \sqrt{\frac{\sum \delta^2}{2n}}, \quad (5.15)$$

где  $\delta$  – разность ускорения силы тяжести на контрольных пунктах, которая получается по формуле  $\delta = g_i - g_{i(\text{контр.})}$ .

*Уравнивание опорной сети.* Необходимость в уравнивании наблюдений при обработке результатов возникает при наличии избыточного числа измерений. Для уравнивания обычно применяют способ наименьших квадратов. При этом реальный физический объект аппроксимируется математической моделью, содержащей функциональную и случайную части. В большинстве случаев при уравнивании применяют параметрический способ.

*Функциональная модель* описывает связь между результатами измерений и неизвестными в виде параметрического уравнения связи

$$l + v = Ax, \quad (5.16)$$

где  $l$  – вектор  $n$  измерений, а  $x$  – вектор  $u$  неизвестных параметров, которые необходимо оценить ( $n > u$ ). Матрица  $A$  размерностью  $n \times u$ , состоящая из коэффициентов модели, связывает результаты измерений с неизвестными. Вектор поправок  $v$  определяется влиянием неучтенных ошибок измерений. При обработке гравиметрических сетей обычно считают, что зависимость между результатами измерений и неизвестными описывается линейной функцией. Если зависимость нелинейная, то ее линеаризируют разложением в ряд Тейлора, используя при этом приближенные величины.

*Стохастическая модель* описывает характер ошибок измерений через ковариационную матрицу

$$\sum_{ll} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \dots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \vdots \\ \rho_{n1}\sigma_n\sigma_1 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$



где  $\sigma^2$  – дисперсия, а  $\rho$  – коэффициенты корреляции. В общем случае нормирование матрицы  $\sum_{ll}$  выполняют после введения весов измерений

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}, \quad (5.18)$$

где  $\sigma_0^2$  – дисперсия единицы веса ( $p=1$ ). Матрица обратных весов  $Q_{ll}$  и весовая матрица имеют вид

$$Q_{ll} = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{ll}, \quad (5.19)$$

$$P_{ll} = Q_{ll}^{-1}. \quad (5.20)$$

Из основного условия уравнивания

$$v^T P v = \min \quad (5.21)$$

следует алгоритм уравнивания. Из системы нормальных уравнений

$$N x - A^T P l = 0, \quad N = A^T P A \quad (5.22)$$

получим величины неизвестных

$$x = N^{-1} A^T P l, \quad (5.23)$$

матрицу обратных весов уравненных значений неизвестных

$$Q_{xx} = N^{-1} = (A^T P A)^{-1} \quad (5.24)$$

и вектор поправок

$$v = A x - l. \quad (5.25)$$

Среднеквадратическая ошибка единицы веса из уравнивания  $\mu_0$  вычисляется по формуле

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{v^T P v}{n - u}}. \quad (5.26)$$

Точность неизвестных определяется ковариационной матрицей

$$\sum_{xx} = \mu_0^2 Q_{xx}. \quad (5.27)$$

Оценить точность функций неизвестных (например, приращений силы тяжести) можно, используя закон переноса ошибок. Для линейных функций

$$\varphi = f^T x \quad (5.28)$$

дисперсия вычисляется по формуле

$$\mu_\varphi^2 = f^T \sum_{xx} f. \quad (5.29)$$

#### 5.4. Методика составления и точность построения гравиметрических карт

Конечным продуктом гравиметрической съемки являются гравиметрические карты. На гравиметрических картах показывают поле аномалий силы тяжести. Гравиметрические карты, как правило, составляют в аномалиях в свободном воздухе и в аномалиях Фая и Буге. Аномалии силы тяжести на гравиметрических картах показывают в виде изоаномал, то есть линий равных аномалий.

Основные этапы составления гравиметрической карты можно представить следующим образом:

- 1) приведение аномалий силы тяжести в единую систему;
- 2) выбор масштаба и сечения карты;
- 3) приведение аномалий к одному уровню;
- 4) выбор плотности промежуточного слоя;

5) нанесение гравиметрических пунктов на картографическую основу, интерполирование аномалий силы тяжести и построение гравиметрической карты.

*Приведение результатов гравиметрических измерений и вычисленных по ним аномалий силы тяжести в единую систему осуществляется и контролируется на этапе обработки путем использования при уравнивании исходных данных, заданных в единой государственной системе, которая должна быть, в свою очередь, надежно связана с международной гравиметрической системой. Кроме того, все участвующие в измерениях гравиметры должны быть надежно проэталонированы, то есть должны иметь надежные постоянные, соответствующие принятой гравиметрической системе. Участвующие в вычислениях аномалий силы тяжести значения нормальной силы тяжести также должны быть вычислены по одинаковой формуле. В странах бывшего Союза для этой цели обычно используют формулу Гельмерта.*

Если аномалии силы тяжести вычислены с использованием различных формул определения нормальной силы тяжести (Гельмерта, Кассиниса, международной формулы 1967 года; см. раздел 2.2.2), то следует учесть поправки за переход от одной системы к другой. Так для перехода от аномалий, вычисленных с использованием формулы Кассиниса, к аномалиям по формуле Гельмерта нужно ввести поправку

$$\gamma_{1930K} - \gamma_{1909Г} = (19,0 - 13,20 \sin^2 B + 1,08 \sin^2 2B) \text{ мГал.} \quad (5.30)$$

Поправка за переход от аномалий, вычисленных с использованием формулы Гельмерта, к аномалиям относительно международной формулы 1967 года равна

$$\gamma_{1909Г} - \gamma_{1967} = (-1,8 - 0,40 \sin^2 B - 1,08 \sin^2 2B) \text{ мГал.} \quad (5.31)$$

Эта же поправка с учетом поправки Потсдамской системы составит

$$\gamma_{1909} - \gamma_{1967} = (-15,8 - 0,40 \sin^2 B - 1,08 \sin^2 2B) \text{ мГал.} \quad (5.32)$$

Наконец, поправка за переход от формулы Кассиниса к международной формуле 1967 года равна

$$\gamma_{1930К} - \gamma_{1967} = (17,2 - 13,6 \sin^2 B) \text{ мГал,} \quad (5.33)$$

с учетом поправки Потсдамской системы

$$\gamma_{1930К} - \gamma_{1967} = (3,2 - 13,6 \sin^2 B) \text{ мГал.} \quad (5.34)$$

При вычислении коэффициентов формулы распределения нормальной силы тяжести 1967 года использована масса Земли с учетом атмосферы. При наблюдениях на поверхности Земли притяжение атмосферы будет близко к нулю. Поэтому если аномалии вычисляются с использованием международной формулы 1967 года, в наблюдаемое значение ускорения силы тяжести нужно добавить поправку за притяжение атмосферы, величина которой приведена в табл. 5.4.

Таблица 5.4

**Значения поправки за атмосферу Земли в зависимости от высоты точки наблюдения**

Высота точки, км	Поправка за атмосферу, мГал	Высота точки, км	Поправка за атмосферу, мГал
0	0,87	3,0	0,60
0,5	0,82	3,5	0,57
1,0	0,77	4,0	0,53
1,5	0,73	4,5	0,50
2,0	0,68	5,0	0,47
2,5	0,64		

Гравиметрические карты крупных масштабов составляют по материалам детальным съемкам, выполняемым в пределах одной страны. Приведение результатов этих измерений в единую систему обеспечивается надежной привязкой к пунктам государственной опорной сети. Кроме того, для приведения результатов измерений, полученных различными ведомствами, в единую систему, в каждой стране создаются эталонные гравиметрические полигоны, позволяющие контролировать постоянные гравиметров.

*Выбор масштаба и сечения карты* определяется плотностью съемки, погрешностями аномалий силы тяжести и сложностью гравитационного поля. Соотношение между плотностью съемки, точностью вычислений аномалий, масштабом и сечением карты определяется Инструкцией по гравиметрической разведке и представлено в табл. 5.2 и 5.3.

Необходимость в *приведении аномалий силы тяжести к одному уровню* обычно возникает при решении задач гравиметрической разведки. Дело в том, что формулы, приведенные в разделе 2.3.1, определяют аномалии силы тяжести в точках земной поверхности. В гравиметрической разведке при интерпретации аномального поля часто предполагают, что аномалии силы тяжести известны на горизонтальной плоскости. Приведение аномалий к одному уровню (на одну высоту, например, среднюю высоту участка съемки) можно выполнить, если известны аномалии вертикального градиента. Однако так как вертикальный градиент непосредственно не измеряют, а при его вычислении возможны большие ошибки, такой метод приведения аномалий встречает практические трудности. Поэтому для приведения аномалий на горизонтальную плоскость используют различные аналитические методы.

*Плотность промежуточного слоя* необходимо знать при вычислении топографических аномалий или аномалий Буге (см. формулы 2.55 – 2.57). Особенно важно правильно установить плотность при составлении карт по результатам детальных гравиметрических съемок. В этом случае плотность для вычисления редукции Буге определяют по гравиметрическим наблюдениям, выполненным на разных высотах при наземных наблюдениях на участках со сложным рельефом или по измерениям в скважинах и шахтах. Плотность промежуточного слоя с использованием гравиметрических наблюдений, произведенных на разных высотах, определяется по формуле

$$\delta = \frac{g_2 - g_1 + 0,3086(H_2 - H_1)}{0,0836(H_2 - H_1)}. \quad (5.35)$$

В (5.35)  $\delta$  – плотность промежуточного слоя;  $(g_2 - g_1)$  и  $(H_2 - H_1)$  – соответственно разности ускорений силы тяжести и разности высот в точках 1 и 2, расположенных на разных уровнях.

При составлении карт мелких масштабов плотность промежуточного слоя обычно принимают одинаковым: 2,67 г/см<sup>3</sup> для горных районов и 2,33 г/см<sup>3</sup> для равнинных.

*Гравиметрические карты строят* по трапециям международной разграфки. На карты наносят разреженную топографическую ситуацию и

гравиметрические пункты с подписанными значениями аномалий силы тяжести. Значения аномалий силы тяжести между пунктами интерполируют либо по методу косвенной интерполяции, либо методом линейного интерполирования. Точки с одинаковыми значениями аномалий силы тяжести соединяют изоаномалами, то есть линиями равных аномалий.

Гравиметрические карты, как правило, изготавливаются цветными. Области положительных аномалий раскрашивают в различные теплые тона (коричневый, розовый и др.), а области отрицательных аномалий – в холодные (голубые и зеленые оттенки).

В случае, если плотность гравиметрических пунктов является недостаточной, то гравиметрическую карту не составляют, а дают просто среднее значение аномалий силы тяжести по трапециям размерами либо  $(5 \times 7,5)'$ ,  $(10 \times 15)'$ ,  $(20 \times 30)'$ ,  $(1 \times 1)^\circ$  и даже  $(5 \times 5)^\circ$ .

### 5.5. Гравиметрическая изученность Земли

Для характеристики изученности гравитационного поля Земли используют среднее значение силы тяжести на стандартных трапециях  $(1 \times 1)^\circ$  или  $(5 \times 5)^\circ$ . При этом трапеция считается изученной, если на нее имеется хотя бы один гравиметрический пункт. В гравиметрическом плане Земля изучена очень неравномерно. Северное полушарие изучено лучше, чем южное, и на него приходится 80 % всех гравиметрических работ. Материки изучены больше, чем водные акватории. Хорошо изучены территории Европы, Северной Америки, Австралии, но слабо – Африки и Антарктиды. Из морских акваторий наиболее изученным является Средиземное море. Морские съемки покрывают Северную Атлантиду и северную часть Тихого и Индийского океанов. Однако довольно слабо еще изучены Тихий океан, а также юг Атлантического и Индийского океанов.

Существующей в настоящее время мировой гравиметрической съемки недостаточно для надежного определения гравитационного поля Земли только по гравиметрическим данным. Поэтому, особенно в последнее время, активно привлекают результаты спутниковых измерений и наземных геодезических измерений.

Результаты мировой и региональных гравиметрических съемок хранятся в базах гравиметрических данных. База данных по земному шару существует под эгидой МАГ в международном гравиметрическом бюро (МГБ, Тулуза, Франция). Информация, хранимая в базе МГБ, содержит:

- номер источника информации по нумерации МГБ;
- номер банка, широту и долготу;
- точность координат с указанием системы координат;

- класс точности (например, пункт национальной сети 1-го класса);
- тип местности (суша, поверхность моря и т.д.), высоту пункта и ее точность;
- измеренное значение силы тяжести и ее точность;
- систему отсчета (например, МГСС-71), исходные пункты, калибровочные параметры;
- аномалию в свободном воздухе и аномалию Буге; точность их определения;
- информацию о поправке за рельеф и принятом значении плотности, величину поправки за рельеф;
- название используемого гравиметра, условия измерений;
- изостатические аномалии;
- скорость судна, поправку Этвеша;
- время наблюдений;
- шифр пункта (в соответствии с оригиналом);
- код страны, источник исходной информации, порядковый номер.

Во многих странах, включая и Россию, существуют национальные гравиметрические базы данных. Анализ Российской базы гравиметрических данных показал, что в гравиметрическом плане хорошо изучены европейская часть страны, а слабее – ее северо-восточные территории. Однако на востоке России достаточно хорошо изучены остров Сахалин и восточное побережье Камчатки.

#### *Вопросы для проверки усвоения материала по теме 5*

1. Схема организации мировой гравиметрической съемки.
2. Какие мировые гравиметрические системы используются в настоящее время?
3. Технические характеристики современной мировой опорной гравиметрической сети.
4. Технические характеристики высокоточной опорной гравиметрической сети СССР.
5. Обновление государственной гравиметрической сети Беларуси.
6. Схемы геодезических наблюдений на пунктах рядовой сети.
7. Виды гравиметрических съемок и основные требования к проектированию гравиметрической съемки.
8. Зависимость технических характеристик гравиметрической съемки от масштаба отчетной гравиметрической карты.
9. Почему требуемая точность определения высот гравиметрических пунктов выше точности определения плановых координат?
10. Содержание текущей и камеральной обработки результатов гравиметровых измерений.
11. Основные этапы составления гравиметрической карты.
12. Почему гравиметрические карты составляются в аномалиях силы тяжести?

## 6. ПРИМЕНЕНИЕ ГРАВИМЕТРИИ В РЕШЕНИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В разделе 1.3 мы уже сформулировали основные пункты приложения гравиметрии к решению геодезических задач. А теперь рассмотрим конкретно некоторые из них, опираясь на знания, полученные в ходе изучения предмета.

### 6.1. Определение сжатия Земли по результатам гравиметрических измерений

Как известно, сжатие Земли по результатам гравиметрических измерений можно определить по теореме Клеро. Обратимся к формулам (2.36) – (2.40), иллюстрирующим эту теорему (см. раздел 2.2.2).

Вторая формула теоремы Клеро (2.40) позволяет определить сжатие  $\alpha$  земного эллипсоида по результатам гравиметрических измерений на поверхности Земли.

В формуле (2.36) коэффициент  $\beta_1$  относится к постоянным высшего порядка малости, уверенно определяемым при задании параметров нулевого порядка и порядка сжатия. Поэтому будем его считать известным и равным 0,000 007. Таким образом, в формулу 2.36 входят два неизвестных коэффициента:  $\gamma_e$  и  $\beta$ . Для их определения достаточно иметь значение  $\gamma_0$  в двух точках. Но так как нормальную силу тяжести нельзя получить по результатам измерений, то для нахождения неизвестных  $\gamma_e$  и  $\beta$  используют измерения силы тяжести в точках поверхности Земли. В этом случае  $\gamma_0$  выражается из формулы для определения аномалии в свободном воздухе в точке, расположенной внутри Земли.

$$(g - \gamma)_{св.в} = g - (\gamma_0 + 0,3086H) + 4\pi f \delta \cdot H, \quad (6.1)$$

$$\gamma_0 = g - \Delta\gamma + \Delta_1g - (g - \gamma)_{св.в}, \quad (6.2)$$

где  $\Delta\gamma = 0,3086H$ , а  $\Delta_1g = 4\pi f \delta H$ .

Подставляя (6.2) в (2.36), запишем

$$\gamma_e + \gamma_e \beta \cdot \sin^2 B - (g - \Delta\gamma + \Delta_1g + \gamma_e \beta_1 \cdot \sin^2 2B) = -(g - \gamma)_{св.в}. \quad (6.3)$$

Введем обозначения:

$$x = \gamma_e - 978000, \quad y = \gamma_e \cdot \beta, \quad b = \sin^2 B, \quad v = -(g - \gamma)_{св.в},$$

$$l = -(g - \Delta\gamma + \Delta_1g + \gamma_e \beta_1 \sin^2 2B) + 978000.$$

Тогда уравнение (6.3) примет вид

$$x + b \cdot y + l = v. \quad (6.4)$$

Уравнение (6.4) рассматривают как уравнения погрешностей; их число равно числу точек с измеренными значениями силы тяжести. Неизвестные  $x$  и  $y$  определяют под условием  $[vv] = \min$  из решения системы нормальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} n \cdot x + [b]y + [l] &= 0 \\ [b]x + [bb]y + [bl] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

где  $n$  – число измерений или число точек с измеренными значениями силы тяжести.

После решения системы уравнений (6.5) находим определяемые коэффициенты  $\gamma_e = x + 978000$  мГал,  $\beta = \frac{y}{\gamma_e}$ .

Сжатие  $\alpha$  определим по формуле (2.40), параметр  $q$  в которой равен отношению центробежной силы  $w^2 a$  на экваторе к силе тяжести  $\gamma_e$  на экваторе; для  $a = 6378,2$  км,  $w^2 = 53,175 \cdot 10^{-10} (\text{рад/с})^2$ ,  $\gamma_e = 978,0$  Гал параметр  $q$  равен 0,003468.

## 6.2. Учет неоднородности гравитационного поля в результатах геодезических измерений

Мы уже знаем, что гравитационное поле Земли неоднородно, так как оно зависит от таких достаточно случайных факторов как распределение масс внутри Земли и на ее поверхности, наличия искусственных сооружений, хозяйственной деятельности человека, формы Земли, рельефа и т.д. Неоднородность гравитационного поля Земли для геодезистов проявляется в факте непараллельности между собой уровенных поверхностей и в аналогичной непараллельности отвесных линий, проходящих через различные точки земной поверхности. Поэтому результаты геодезических измерений, выполненные в реальном гравитационном поле при положениях основных осей геодезических инструментов, совпадающих с уровенными поверхностями и направлениями отвесных линий, нуждаются во введении поправок, учитывающих эту неоднородность (см. рис. 1). Так результаты угловых измерений, например, необходимо исправить поправками за отклонения отвесных линий, а в результатах нивелирования должна быть учтена непараллельность уровенных поверхностей.



Запишем формулы поправок за неоднородность гравитационного поля в каждый вид геодезических измерений.

1. Поправка за уклонение отвесных линий в *горизонтальное направление*

$$\delta_{\alpha_{in}} = -(\xi_i \sin A_{in} - \eta_i \cos A_{in}) \operatorname{ctg} Z_{in}, \quad (6.6)$$

где  $\delta_{\alpha_{in}}$  – поправка за уклонение отвесных линий в наблюдаемое горизонтальное направление  $in$ ;

$\xi_i, \eta_i$  – составляющие уклонения отвесных линий в меридиане и в первом вертикале в пункте наблюдения;

$A_{in}$  – азимут направления  $in$ ;

$Z_{in}$  – зенитное расстояние направления  $in$ .

При обработке государственных геодезических сетей данная поправка учитывается всегда в триангуляции 1 класса и в горных районах триангуляции 2 класса, начиная с углов наклона свыше  $2^\circ$ . Заметим, что в этом случае в формуле (6.6) должны использоваться составляющие *астрономо-геодезического* уклонения отвесной линии.

2. Поправка за уклонение отвесных линий в *зенитное расстояние*  $\delta_{Z_{in}}$  вычисляется по формуле

$$\delta_{Z_{in}} = \xi_i \cos A_{in} + \eta_i \sin A_{in}, \quad (6.7)$$

По величине поправка  $\delta_{Z_{in}}$ , как правило, значительно превосходит первую из перечисленных поправок, то есть  $\delta_{\alpha_{in}}$ . Однако практически она никогда не вводится в результаты измерений из-за низкой точности определения зенитного расстояния.

Поправка за уклонение отвесных линий в зенитное расстояние в точности совпадает со значением уклонения отвеса в азимуте направления  $in$ , обычно обозначаемого  $\mathcal{G}_{in}$ . Таким образом,

$$\mathcal{G}_{in} = \xi_i \cos A_{in} + \eta_i \sin A_{in}. \quad (6.8)$$

3. *Влияние уклонения отвеса на измеренные расстояния.*

Формула для вычисления поправки за уклонение отвесных линий в *длину линии* имеет вид

$$\delta_{S_{in}} = (\xi_i \cos A_{in} + \eta_i \sin A_{in}) \cdot h_{in}, \quad (6.9)$$

где  $\delta_{S_{in}}$  – поправка в измеренное расстояние;  $h_{in}$  – превышение между концами линии (точками  $i$  и  $n$ ).

Расчеты показали, что при измерении линий с точностью порядка  $1 \cdot 10^{-6}$  поправку  $\delta_s$  следует учитывать при углах наклона между концами измеряемой линии свыше  $5^\circ$ . Однако следует помнить, что данная поправка вводится

только в том случае, если линия измерена мерными проволоками, что в настоящее время достаточно редко. В случае производства линейных измерений светодальномерами необходимость во введении данной поправки отпадает, так как положение оптических центров приборов, между которыми дает расстояние светодальномер, не зависит от состояния гравитационного поля.

4. Поправка  $\delta_{h_{in}}$  за неоднородность гравитационного поля в результате *геометрического нивелирования* определяется по формуле

$$\delta_{h_{in}} = -g_{in} \cdot S_{in} = -(\xi_i \cos A_{in} + \eta_i \sin A_{in}) \cdot S_{in}, \quad (6.10)$$

где  $h_{in}$  – превышение по секции;  $S_{in}$  – длина секции.

$$\text{При } g = 0,5'', \quad S = 2 \text{ км} \Rightarrow \delta_{h_{in}} = \frac{0,5'' \cdot 2 \cdot 10^6}{206265''} \approx 5 \text{ мм}.$$

Для длины секции в 2 км точность нивелирования I и II классов характеризуется ошибкой  $m_{h_{in}} = 0,7 \text{ мм} \cdot \sqrt{2 \text{ км}} \approx 1 \text{ мм}$ . Таким образом, расчеты показывают необходимость учета неоднородности гравитационного поля в результатах высокоточного геометрического нивелирования.

Проанализировав приведенные формулы, можно заметить, что они все включают в себя составляющие уклонения отвесной линии в меридиане и в первом вертикале, соответственно  $\xi_i$  и  $\eta_i$ . Из ранее пройденного материала мы знаем, что эти составляющие можно получить по формулам Веннинг-Мейнеса (3.10) согласно методике, описанной в разделе 3.2.4.

Однако следует помнить, что *по формулам Веннинг-Мейнеса определяются составляющие гравиметрического уклонения отвесной линии*, то есть  $\xi_{гр.}$  и  $\eta_{гр.}$ , в то время как при обработке *государственных сетей* в формулах (6.6) – (6.10) надо *использовать составляющие астрономо-геодезического уклонения отвеса*. В самом деле, в этом случае направление отвесной линии заменяется направлением нормали к эллипсоиду и при редуцировании результатов геодезических измерений с поверхности Земли на поверхность эллипсоида вводится поправка за угол между направлением нормали к эллипсоиду и направлением отвесной линии, то есть за астрономо-геодезическое уклонение отвесной линии.

Переход от  $\xi_{гр.}$  и  $\eta_{гр.}$  к составляющим астрономо-геодезического уклонения отвеса для референц-эллипсоида Красовского осуществляют по формулам

$$\left. \begin{aligned} \xi_{a-г.} &= \xi_{гр.} + 0,171 \cdot H_{км}^{\gamma} \sin 2B \\ \eta_{a-г.} &= \eta_{гр.} \end{aligned} \right\}. \quad (6.11)$$

В (6.11)  $\xi_{гр.}$ ,  $\eta_{гр.}$  определяются по формулам Веннинг-Мейнеса.

### 6.3. Учет неоднородностей гравитационного поля в инженерной геодезии

Вопросы учета неоднородности гравитационного поля при развитии инженерно-геодезических построений довольно новые, так как в общем случае до последнего времени считалось, что инженерно-геодезические работы выполняются на небольших территориях и гравитационное поле в пределах промышленной площадки следует считать однородным. При этом силовые линии и уровенные поверхности гравитационного поля в инженерной геодезии используют в качестве материализованной координатной системы. Такой взгляд на поле в подавляющем большинстве случаев оправдан, так как монтаж оборудования ведут с погрешностью  $10^{-4} - 10^{-5}$ , а съемочные работы с еще меньшей точностью.

При работах с погрешностью  $10^{-5} - 10^{-6}$  гипотеза об однородности гравитационного поля в пределах промышленной или стройплощадки перестает себя оправдывать и приходится различать выбранные нами и потому геометрически определенные координатные линии от реально существующих неизвестных нам силовых линий.

Как вам известно (раздел 2.1.1), силовой линией называется кривая, касательная к которой в каждой точке совпадает с вектором силы тяжести  $\bar{g}$ . Силовую линию на практике обычно считают плоской кривой, а касательную к ней называют отвесной линией. В действительности силовые линии имеют кривизну, они не совпадают с отвесными линиями и непараллельны друг другу. Вместе с силовыми линиями искривляются и поверхности, ортогональные силовым линиям (уровенные поверхности потенциала силы тяжести). Работать геодезисту в таких условиях становится трудно. Но если не принимать все это во внимание, то точность  $10^{-6}$  останется недостижимой, что на практике в современных условиях может оказаться необходимым, так как в последние десятилетия требования к строительству таких инженерных сооружений как крупные радиотелескопы, ГЭС, ядерные ускорители, горные тоннели, дома повышенной этажности и т.д. очень возросли.

При выполнении различных видов геодезических измерений требуется учитывать и различные неправильности гравитационного поля. При измерениях, например, горизонтальных и вертикальных углов влияет отклонение оси вращения теодолита от координатной линии  $z$ , а при разбивке кривой с заданными геометрическими свойствами приходится учитывать форму уровенных поверхностей и расположение их относительно координатных.

В инженерной геодезии могут возникнуть и свои специфические задачи. Например, фундамент должен быть не плоскостью вообще, а непременно горизонтальной плоскостью. Поэтому, если требования к точности построения фундамента очень высокие, то выносить в натуру придется не плоскость, а уровенную поверхность потенциала силы тяжести, чтобы давление ей всюду было ортогонально. В подобных случаях необходимо различать геодезические высоты от динамических, силовые линии – от отвесных и координатных, и сознательно все их использовать в соответствии с решаемой задачей.

При учете неоднородности гравитационного поля в результатах геодезических измерений, выполненных в инженерно-геодезических сетях, используют приведенные ранее формулы (6.6) – (6.10) со следующими замечаниями.

Если инженерно-геодезические сети, обслуживающие тот или иной объект, занимают значительные по площади территории и математическая обработка результатов геодезических измерений в этих сетях выполняется с использованием референц-эллипсоида, то учет неоднородности гравитационного поля в результатах высокоточных геодезических измерений может быть произведен по тем же формулам, что и в государственных геодезических сетях.

Однако очень часто в прикладной геодезии используется местная система координат, и промышленная площадка занимает относительно небольшую по площади территорию. В этом случае можно пренебречь кривизной Земли и считать, что геодезические работы выполняются на плоскости. Тогда отпадает необходимость во введении референц-эллипсоида, а значит, и в вычислении астрономо-геодезических уклонений отвесных линий. Тем не менее, при обработке результатов геодезических измерений здесь все равно сохраняется необходимость учета непараллельностей отвесных линий и уровенных поверхностей в пределах промышленной площадки и приведения их к началу выбранной системы координат.

Тогда формулы по учету влияния неоднородности гравитационного поля на результаты инженерно-геодезических измерений будут иметь вид:

$$\delta_{\alpha_{in}} = -[(\xi_i - \xi_o) \sin A_{in} - (\eta_i - \eta_o) \cos A_{in}] \cdot \operatorname{ctg} Z_{in}; \quad (6.12)$$

$$\delta_{S_{in}} = [(\xi_i - \xi_o) \cos A_{in} + (\eta_i - \eta_o) \sin A_{in}] \cdot h_{in}; \quad (6.13)$$

$$\delta_{h_{in}} = -[(\xi_i - \xi_o) \sin A_{in} + (\eta_i - \eta_o) \cos A_{in}] \cdot S_{in}. \quad (6.14)$$

В формулах (6.12) – (6.14)  $\xi_0, \eta_0$  – составляющие гравиметрического уклонения отвеса в меридиане и первом вертикале в начале выбранной системы координат. Остальные обозначения те же, что и в предыдущих формулах. С помощью этих формул решается задача по приведению различных направлений отвесных линий и положений уровенных поверхностей в пределах площадки к единому началу.

Особенностью инженерно-геодезических сетей является наличие больших углов наклона, достигающих  $30 - 40^\circ$ . При таких углах  $\text{ctg}Z$  в формуле (6.12) равен  $0,58 - 0,84$ . Поэтому при производстве высокоточных угловых измерений поправку  $\delta_{\alpha_{in}}$  в инженерно-геодезических сетях требуется вводить практически всегда, а уклонение отвесной линии нужно знать по крайней мере с той же точностью, с которой выполняют измерение горизонтальных углов. Поправка  $\delta_{S_{in}}$  вводится при точности измерений стороны порядка  $1 \cdot 10^{-6}$ , начиная с углов наклона свыше  $5^\circ$ . При выполнении линейных измерений электрооптическими дальномерами необходимость во введении этой поправки вообще отпадает. Из-за недостаточной точности измерения зенитного расстояния поправка за уклонения отвесной линии в нем практически не учитывается, хотя по величине она значительно превосходит поправку  $\delta_{\alpha}$ . В результаты нивелирования поправка за неоднородность гравитационного поля вводится, начиная с расстояния свыше 1 км.

#### *Основные этапы учета неоднородности гравитационного поля в результатах геодезических измерений*

Решение вопроса о необходимости учета неоднородности гравитационного поля в результатах геодезических измерений зависит от точности геодезических работ, вида сетей, а также от самих величин уклонений отвеса в районе работ.

Как правило, эти поправки вводятся в случае, если они соизмеримы с ошибками геодезических измерений. Учет влияния неоднородности гравитационного поля целесообразно выполнять в следующей последовательности:

- 1) расчет предельных колебаний уклонений отвеса, при которых еще можно не учитывать их влияние на результаты измерений;
- 2) оценка возможных колебаний уклонений отвеса в районе работ, сравнение их с предельно допустимыми, заключение о необходимости их учета;
- 3) определение действительных уклонений отвеса (выбор метода определения, проектирование гравиметрической съемки, полевые работы);

4) вычисление поправок за уклонение отвеса в результаты геодезических измерений.

*Расчет предельного колебания уклонений отвеса*, при которых еще может не учитываться их влияние на результаты измерений, выполняется на основании анализа конкретных формул и вида измерений.

Для *оценки возможных колебаний уклонений отвеса в районе работ* можно использовать гравиметрические карты, результаты измерения вторых производных потенциала силы тяжести, данные о геологическом строении земной коры или топографические карты. Удобнее всего использовать гравиметрические карты, с помощью которых можно вычислить уклонения отвеса по формулам Венинг-Мейнеса (см. раздел 3.2.4).

В предгорных и горных районах, где аномалии гравитационного поля в значительной степени обусловлены топографическими массами, можно использовать *топографические уклонения отвеса, вызванные притяжением только топографических масс*. В равнинных районах топографические уклонения отвеса малы, а вариации уклонения отвеса вызываются неоднородностью земной коры. Поэтому для ориентировочной оценки уклонений отвеса можно использовать данные о геологическом строении местности. По известным положению, форме и аномальной плотности геологических тел можно вычислить создаваемый этими телами потенциал и его производные, то есть решить прямую задачу гравиметрической разведки.

Наконец, уклонения отвеса можно получить по результатам вариометрической съемки. Этот метод удобно применять в том случае, если в районе работ ожидаются значительные колебания уклонений отвеса, вызванные притяжением аномальных масс, залегающих на небольшой глубине.

При *определении действительных уклонений отвеса* используются те же методы, что и при оценке колебаний уклонений отвеса. Однако здесь необходимо более детальное знание неоднородностей гравитационного поля. Поэтому при положительном заключении о необходимости учета неоднородности гравитационного поля на объекте проектируется либо гравиметровая съемка, либо вариометрическая съемка. Вариометрическая съемка перед гравиметровой имеет то преимущество, что ее достаточно выполнить только в пределах участка работ. Определение действительных уклонений отвеса по результатам измерений вторых производных потенциала силы тяжести рассмотрено ниже в разделе 6.4. Схема проектирования гравиметрической съемки приведена в 6.6.

#### 6.4. Дифференциальный метод определения аномалий высот и уклонений отвеса по измерениям силы тяжести и вторых производных потенциала силы тяжести

Дифференциальный метод изучения гравитационного поля, наиболее простой по идее, состоит в том, чтобы проинтегрировать по маршруту измеренные вторые или первые производные потенциала и получить разность первых производных или разность самого потенциала. Способ известен давно, но до сих пор широкого применения не нашел главным образом потому, что первые горизонтальные производные  $W_x = -\gamma\xi$  и  $W_y = -\gamma\eta$  измерять трудно, только вертикальная производная  $W_z = -g$  измеряется гравиметром быстро и достаточно точно. А датчики вторых производных, обычные вариометры, сложны в обращении и дают лишь четыре производных из пяти нужных (см. раздел 2.1.3). Нехватка данных приводит к дополнительным, хотя и устранимым, осложнениям. Наконец, этот метод позволяет определить лишь приращения потенциала или его производных и только там, где выполнены измерения. Вне точек измерения метод ничего определить не позволяет.

Несмотря на все указанные недостатки, дифференциальный метод найдет свое применение в будущем. Особенно он представляется полезным в инженерной геодезии, так как приспособлен именно для локального изучения поля с высокой точностью. Рассмотрим *применение этого метода при вычислении уклонений отвеса*.

Для составляющих уклонения отвеса в плоскости меридиана и первого вертикала известны формулы

$$\xi_{zp.} = -\frac{g_x}{g_z} = -\frac{1}{\gamma} g_x, \quad (6.15)$$

$$\eta_{zp.} = -\frac{g_y}{g_z} = -\frac{1}{\gamma} g_y.$$

В (6.15)  $g_x, g_y$  – проекции вектора силы тяжести на плоскость, касательную к нормальной уровенной поверхности. Возьмем две произвольные точки  $A$  и  $B$  на поверхности Земли. Для этих точек можно записать

$$\xi_B - \xi_A = -\left[\left(\frac{1}{\gamma} g_x\right)_B - \left(\frac{1}{\gamma} g_x\right)_A\right],$$

(6.16)

$$\eta_B - \eta_A = -\left[\left(\frac{1}{\gamma} g_y\right)_B - \left(\frac{1}{\gamma} g_y\right)_A\right].$$

В соответствии с основным свойством потенциала проекции  $g_x$  и  $g_y$  равны производным потенциала  $W$  по направлениям  $x$  и  $y$ . Поэтому формулы (6.16) перепишем в виде

$$\xi_B - \xi_A = -\frac{1}{\gamma} \left[ \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_A \right], \quad (6.17)$$

$$\eta_B - \eta_A = -\frac{1}{\gamma} \left[ \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_B - \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_A \right].$$

Чтобы найти разности производных потенциала, напишем полный дифференциал

$$d\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} dy + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} dz \quad (6.18)$$

и проинтегрируем выражение (6.18) между точками  $A$  и  $B$ . Получим

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_A = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx + \int_{y_A}^{y_B} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} dy + \int_{z_A}^{z_B} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} dz. \quad (6.19)$$

Аналогично

$$\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_B - \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_A = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} dx + \int_{y_A}^{y_B} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} dy + \int_{z_A}^{z_B} \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} dz. \quad (6.20)$$

Предположим, что  $A$  и  $B$  – близко расположенные точки, расстояние между которыми составляет десятки или сотни метров, и вторые производные между точками меняются линейно.

Заменяя под знаком интеграла производные их средними значениями, для разностей уклонения отвеса получим

$$\xi_B - \xi_A = -\frac{1}{\gamma} \left[ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_m (x_B - x_A) + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)_m (y_B - y_A) + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\right)_m (z_B - z_A) \right]; \quad (6.21)$$

$$\eta_B - \eta_A = -\frac{1}{\gamma} \left[ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)_m (x_B - x_A) + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_m (y_B - y_A) + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}\right)_m (z_B - z_A) \right].$$



Производные  $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$  и  $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$  по измерениям с гравитационным вариомером отдельно не определяют. Из измерений можно найти только разность  $W_{\Delta} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ . Введем эту разность в (6.21). Для этого умножим первое из уравнений (6.21) на  $\sin A_{AB}$ , а второе – на  $\cos A_{AB}$  и вычтем из первого равенства второе. При этом учтем, что  $x_B - x_A = S_{AB} \cos A_{AB}$ ,  $y_B - y_A = S_{AB} \sin A_{AB}$ ,  $z_B - z_A = \Delta h_{AB}$ , где  $S_{AB}$  – расстояние между точками  $A$  и  $B$ ,  $A_{AB}$  – азимут линии  $AB$ ,  $h_{AB}$  – превышение между точками  $A$  и  $B$ .

Получим

$$\begin{aligned} (\xi_B - \xi_A) \sin A_{AB} - (\eta_B - \eta_A) \cos A_{AB} = \frac{S_{AB}}{\gamma} \left[ \frac{1}{2} W_{\Delta} \sin 2A_{AB} + W_{xy} \cos 2A_{AB} \right] - \\ - (W_{xz} \sin A_{AB} - W_{yz} \cos A_{AB}) \frac{\Delta h_{AB}}{\gamma}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

В (6.22) все величины в правой части получают из вариометрических измерений как среднее между точками  $A$  и  $B$ . Для определения неизвестных  $(\xi_B - \xi_A)$  и  $(\eta_B - \eta_A)$  в уравнении (6.22) поступим следующим образом: добавим к точкам  $A$  и  $B$  точку  $C$  и запишем уравнение (6.22) для линий  $AC$  и  $BC$ .

$$\begin{aligned} (\xi_C - \xi_B) \sin A_{BC} - (\eta_C - \eta_B) \cos A_{BC} = \frac{S_{BC}}{\gamma} \left[ \frac{1}{2} W_{\Delta} \sin 2A_{BC} + W_{xy} \cos 2A_{BC} \right] - \\ - (W_{xz} \sin A_{BC} - W_{yz} \cos A_{BC}) \frac{\Delta h_{BC}}{\gamma}, \\ (\xi_C - \xi_A) \sin A_{AC} - (\eta_C - \eta_A) \cos A_{AC} = \frac{S_{AC}}{\gamma} \left[ \frac{1}{2} W_{\Delta} \sin 2A_{AC} + W_{xy} \cos 2A_{AC} \right] - \\ - (W_{xz} \sin A_{AC} - W_{yz} \cos A_{AC}) \frac{\Delta h_{AC}}{\gamma}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

В уравнениях (6.22) – (6.23) шесть неизвестных:  $\xi_A, \xi_B, \xi_C, \eta_A, \eta_B, \eta_C$ .

При обработке результатов геодезических измерений можно использовать местную систему координат, ориентированную по направлению отвесной линии в исходном пункте сети. В этом случае отклонения отвеса в исходном пункте будут равны нулю и число неизвестных в уравнениях (6.22) – (6.23) уменьшится до четырех. Уравнения типа (6.22) составляют последовательно вдоль сторон треугольников, образованных пунктами вариометрической съемки. Для каждой точки добавляются две неизвестные

разности составляющих уклонения отвеса и два уравнения, поэтому в сети из  $n$  точек неизвестных будет на единицу больше числа уравнений. Для определения всех составляющих уклонений отвеса нужно добавить еще одно уравнение. Таким уравнением может быть известная разность составляющих уклонений отвеса, которую можно найти как разность топографических уклонений отвеса.

Разность составляющих уклонений отвеса можно найти непосредственно по формулам (6.21), если известна производная  $W_{zz}$  – вертикальный градиент силы тяжести. Используя уравнение

$$W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} = 2\omega^2, \quad (6.24)$$

где  $\omega$  – угловая скорость вращения Земли, можно найти отдельно производные  $W_{xx}$  и  $W_{yy}$ :

$$2W_{xx} = 2\omega^2 - W_{zz} - W_{\Delta}, \quad (6.25)$$

$$2W_{yy} = 2\omega^2 - W_{zz} + W_{\Delta}$$

и вычислить разности  $(\xi_B - \xi_A)$  и  $(\eta_B - \eta_A)$ .

Точность определения составляющих уклонения отвеса по вторым производным  $m_{\xi}, m_{\eta}$  можно вычислить по формуле

$$m_{\xi, \eta} = \frac{\sqrt{2} \cdot m \cdot S}{\gamma},$$

где  $m_{\xi, \eta}$  – СКО определения составляющих уклонения отвеса;

$m$  – ошибка вариометрических измерений;

$S$  – расстояние между пунктами;

$\gamma$  – нормальная сила тяжести.

Современная точность вариометрических измерений позволяет определить  $\xi$  и  $\eta$  при расстоянии 30 – 40 км с ошибкой не хуже 0,5". Основным источником погрешностей при определении разности уклонения отвеса по измерениям вторых производных потенциала является предположение о линейном изменении вторых производных между соседними точками, использованное при выводе формулы (6.21).

Преимущество данной методики по сравнению с традиционной с использованием гравиметрической съемки заключается в том, что вариометрические измерения достаточно выполнить только в пределах рабочего

участка. Поэтому данная методика рекомендуется при решении инженерно-геодезических задач.

### 6.5. Влияние вариаций гравитационного поля на результаты повторных геодезических измерений

При изучении деформаций земной коры методом повторных геодезических измерений на геодинамических полигонах (ГДП) серьезное внимание должно быть обращено на факторы, искажающие реальную картину деформаций. Поскольку результаты геодезических измерений зависят от состояния гравитационного поля, к таким факторам следует отнести и вариации гравитационного поля (ВГП) во времени, в результате которых сравниваемые циклы геодезических измерений на ГДП окажутся выполненными при различных состояниях гравитационного поля.

Как известно, ВГП могут быть вызваны изменением взаимного положения планет Солнечной системы относительно Земли, прежде всего, Луны и Солнца, миграцией подземных вод, перемещением масс в результате крупных вулканических извержений, а также техногенными перемещениями масс на земной поверхности.

Наиболее ощутимо искажения за ВГП могут проявиться при анализе результатов повторного нивелирования, так как геометрическое нивелирование дает расстояние между уровенными поверхностями потенциала силы тяжести, проходящими через точки стояния нивелира и реек. С изменением значений силы тяжести изменяются и положения уровенных поверхностей, а, следовательно, превышения при повторном нивелировании также изменяются (рис. 32). *Важно, что эти изменения превышений могут возникнуть даже при абсолютной неподвижности земной коры.*

Для правильного анализа результатов повторных нивелировок необходимо иметь в виду, что *данные геометрического нивелирования зависят от пути нивелирования между исследуемыми точками и имеют ясный физический смысл только в том случае, если они обрабатываются совместно с результатами измерения силы тяжести  $g$  вдоль нивелирных линий.* Покажем это с помощью следующих рассуждений.

Разность потенциалов  $W$  силы тяжести в некоторой точке  $A$  земной поверхности и точке  $O$  начала счета высот у уровня моря можно представить формулой

$$W_O - W_A = \int_{OA} g dh \approx \sum_{OA} g \Delta h, \quad (6.26)$$

где  $dh$  – элементарное нивелирное превышение;

$\Delta h$  – превышение между некоторыми промежуточными реперами на пути от точки  $O$  начала счета к точке  $A$ .

Криволинейный интеграл или сумма в формуле (6.26) должны быть вычислены вдоль пути нивелирования. Если между эпохами нивелирования произошло изменение разности потенциалов, то из этой же формулы данное изменение можно представить как

$$\delta(W_O - W_A) = \int_{OA} (\delta g \cdot dh + g \cdot \delta dh) \approx \sum_{OA} (\delta g \cdot \Delta h + g \cdot \delta \Delta h), \quad (6.27)$$

где  $\delta(W_O - W_A)$  – изменение разности потенциалов силы тяжести;

$\delta g$  – изменение силы тяжести;

$\delta dh$  и  $\delta \Delta h$  – изменение соответствующих превышений.

Из (6.27) следует, что изменение разности потенциалов силы тяжести, наблюдаемое между эпохами нивелирования, может быть вызвано как изменениями силы тяжести ( $\delta g$ ), так и изменениями превышений ( $\delta \Delta h$ ).

В равнинных районах при наблюдаемых изменениях нивелирных превышений и силы тяжести преобладающее влияние на изменение потенциалов окажет последний член под знаком суммы в формуле (6.27). Действительно, при  $\delta \Delta h = 5$  мм,  $\delta g = 0,03$  мГал,  $g = 1000000$  мГал,  $\Delta h = 5 \cdot 10^5$  мм этот член равен  $5 \cdot 10^6$  мГал·мм, а первый член под знаком суммы этой формулы равен  $0,015 \cdot 10^6$  мГал·мм. Только в высоких горах при  $\delta g = 0,1$  мГал (на Северном Кавказе обнаружено изменение  $\delta g$ , равное  $0,08$  мГал/год), и  $\Delta h = 6$  км первый член может приблизиться по порядку своей величины ко второму, достигнув  $0,6 \cdot 10^6$  мГал·мм.

Из приведенных расчетов следует, что для равнинных районов, например, Беларуси (при условии отсутствия техногенных перемещений масс), формулу (6.27) можно упростить и переписать как

$$\delta(W_O - W_A) \approx \sum_{OA} (g \cdot \delta \Delta h). \quad (6.28)$$

Следовательно, вертикальные перемещения земной коры здесь будут соответствовать изменению разности потенциалов, выявляемому из повторных нивелировок, и в этом случае не надо заботиться о повторных измерениях силы тяжести.

Однако в строгом смысле, исходя из формулы (6.27), можно сказать, что *только при неизменном гравитационном поле результаты повторных нивелировок будут соответствовать изменению высот.*

На практике же при обработке результатов повторного нивелирования следует иметь в виду, что поправки за изменения взаимного положения Земли, Луны и Солнца, так называемые приливные поправки, достигают существенной величины только в ходах большой протяженности. Поэтому вопрос об учете этих поправок в результатах повторного нивелирования на ГДП обычно не возникает.

Однако неприливные ВГП, то есть обусловленные техногенными перемещениями масс, извержениями вулканов, землетрясениями, миграцией подземных вод и т.д., могут достичь значительных величин и вызвать существенные искажения в исследуемых деформациях, если не учесть их в результатах повторных геодезических измерений.

Вопросу изучения неприливных изменений силы тяжести на ГДП во всем мире уделяется большое внимание. В Японии этот вопрос исследуется с помощью повторных гравиметрических измерений, начиная с 50-х годов прошлого столетия. Широко распространены подобные исследования в Северной Исландии, Мексике, США, Германии, странах бывшего Союза и еще в ряде других государств мира. В последние годы к ним активно привлекается спутниковая альтиметрия, позволяющая фиксировать высоты геоида (квазигеоида), а, следовательно, и их изменения, с точностью в несколько сантиметров.

Выполненные исследования изменений силы тяжести на геодинимических полигонах показали, что величины этих изменений могут составлять десятки мГал/год. Уверенно зафиксированы изменения силы тяжести, вызываемые совокупностью явлений, предвещающих или сопровождающих извержения вулканов. В ряде случаев зафиксировано изменение гравитационного поля до и после происшедших землетрясений большой силы, вызвавших большие вертикальные перемещения земной поверхности. Поэтому сведения об изменениях локального гравитационного поля, полученные с помощью повторных гравиметрических и спутниковых альтиметрических измерений, могут рассматриваться как один из видов предвестников землетрясений и извержений вулканов.

Наибольшие изменения силы тяжести на нашей планете зафиксированы вследствие перемещений масс, обусловленных деятельностью человека. Доступные измерения вариации силы тяжести наблюдаются при эксплуатации нефтяных и газовых месторождений, геотермальных полей, откачке воды, добыче угля, а также заполнении и спуске водохранилищ. По величине эти изменения могут достичь нескольких мГал.

Так, например, конкретные расчеты, выполненные для Саяно-Шушенского водохранилища, показали, что вариации силы тяжести, обусловленные изменением уровня воды от 225 до 250 м, вблизи береговой линии могут достигать 1 мГал, а вариации уклонов отвесных линий при этом могут составить 0,2" и при выполнении высокоточных геодезических измерений ими нельзя пренебрегать. Поэтому на техногенных ГДП при вычислении характеристик деформаций земной поверхности поправки за изменение гравитационного поля в результатах повторных геодезических измерений должны быть учтены.

Рассмотрим, как учитывается изменение локального гравитационного поля в результатах геодезических измерений на ГДП ГЭС.

***6.5.1. Учет изменений гравитационного поля, вызванных заполнением водохранилища и колебанием его уровня в период эксплуатации, при обработке данных повторного нивелирования на геодинимических полигонах ГЭС***

Источником вариаций гравитационного поля (ВГП) в районах водохранилищ ГЭС являются массы воды в водохранилище при его заполнении и изменение уровня воды в нем в период эксплуатации.

Как известно, на ГДП ГЭС линии повторного нивелирования прокладываются по периметру водохранилища и перпендикулярно к нему. Вследствие гравитационного притяжения масс воды водохранилища направления отвесных линий меняются таким образом, что превышения вдоль нивелирных ходов, идущих в перпендикулярном направлении к водохранилищу, будут больше, чем до его заполнения, то есть возникает ложный эффект опускания ложа водохранилища. Этот эффект будет наибольшим при сравнении результатов нивелирования, выполненного до и после заполнения водохранилища. Однако он будет замечен также при сравнении нивелировок, выполненных уже после заполнения, из-за колебания уровня, обусловленного режимом расхода воды при эксплуатации ГЭС.

Таким образом, результаты высокоточного нивелирования на каждом ГДП ГЭС должны приводиться к некоторому стандартному уровню наполнения водохранилища. Методика вычисления соответствующих поправок разработана в ЦНИИГАиК. Она различает два случая: учет изменения всей массы воды водохранилища (при сравнении нивелировок, выполненных до и после его заполнения) и учет влияния колебаний уровня воды.

Поскольку указанный эффект проявляется в сравниваемых превышениях вследствие небольших изменений направлений отвесных линий, то его можно оценить, определив упомянутые изменения уклонения отвеса для реперов анализируемой линии и умножив их на расстояние между реперами. Однако в этом случае, как известно, каждая эпоха нивелирования должна сопровождаться гравиметрической съемкой, что трудоемко и дорого. Для удешевления работ ЦНИИГАиК предлагает учесть тот факт, что источник изменения гравитационного поля в районах водохранилища известен, так как службы ГЭС ведут практически непрерывные наблюдения за уровнем воды водохранилища.

Исходным теоретическим положением методики ЦНИИГАиК является то, что при нивелировании в результате изменения окружающих масс происходит радиальное смещение уровенных поверхностей (поверхностей одинакового потенциала), проходящих через каждый репер. Поясним это с помощью чертежа (рис. 32).

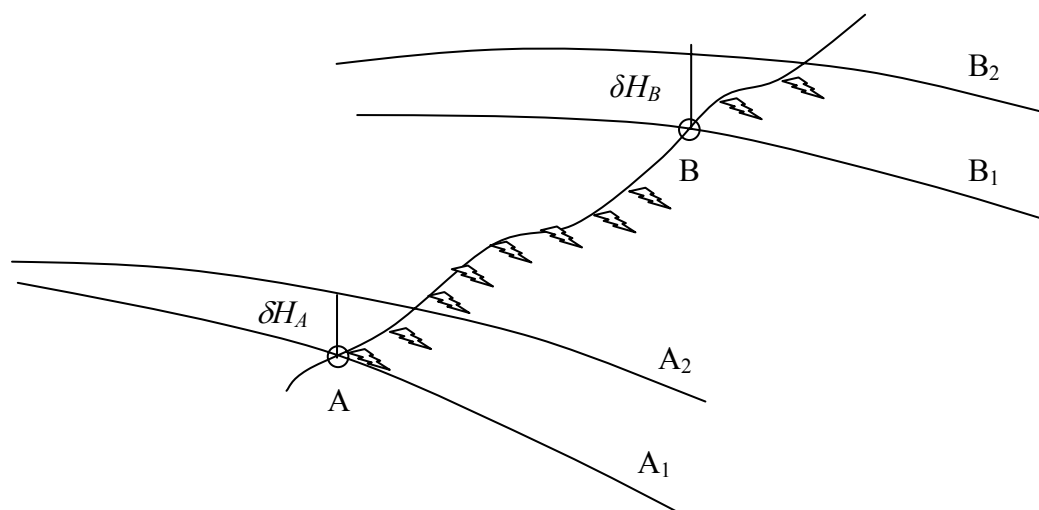


Рис. 32. Радиальное смещение уровенных поверхностей реперов А, В вследствие изменения масс воды в водохранилище

Если до заполнения водохранилища уровенные поверхности реперов А и В занимали положения  $A_1$  и  $B_1$ , то после его заполнения (или после изменения его уровня в период эксплуатации ГЭС) они займут положение  $A_2$  и  $B_2$ . Это неизбежно будет наблюдаться, так как вследствие изменения окружающих масс произойдет изменение характеристик локального гравитационного поля, что выразится в изменении направлений отвесных линий, проходящих через реперы А и В, а, следовательно, и в изменении положений перпендикулярных этим направлениям уровенных поверхностей до положения  $A_2$ ,  $B_2$ . Показанные на рис. 32 отрезки  $\delta H_A$  и  $\delta H_B$  как раз и будут

характеризовать радиальные смещения уровенных поверхностей на реперах А и В, вызванные заполнением или изменением уровня водохранилища. Кроме того, разность  $(\delta H_B - \delta H_A)$  будет равна поправке в измеренное превышение  $h_{AB}$  в эпоху  $T_2$  за изменение гравитационного поля. Величины  $\delta H_i$  и их разности для соседних реперов  $(\delta H_{i+1} - \delta H_i)$  могут быть вычислены без особых затруднений, исходя из следующих соображений.

Из теории потенциала известно, что изменение потенциала тяготения в точке земной поверхности на величину  $\Delta V$  приводит к радиальному смещению  $\delta H$  проходящей через нее уровенной поверхности, вычисляемому по формуле

$$\delta H = \frac{\Delta V}{\gamma}, \quad (6.29)$$

где  $\gamma$  – нормальное значение силы тяжести в данной точке, то есть известная величина.

При заполнении водохранилища изменение потенциала  $\Delta V$  создается массой воды, объем и плотность которой известны, так как за уровнем водохранилища ведутся непрерывные наблюдения. Поэтому величина  $\Delta V$  может быть вычислена по известной формуле

$$\Delta V = f \cdot \rho \iiint_{\tau} \frac{d\tau}{r}, \quad (6.30)$$

где  $f$  – гравитационная постоянная ( $f = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ );

$\rho$  – плотность воды ( $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ );

$\tau$  – объем воды в водохранилище;

$d\tau$  – элементарный объем воды в водохранилище;

$r$  – расстояние от репера, в котором вычисляется величина  $\Delta V$ , до элемента объема воды  $d\tau$ .

Предусматриваемое формулой (6.30) интегрирование выполняется численно. Для этого используется известная круговая палетка Еремеева. Она строится в масштабе карты, на которой нанесены водохранилище и нивелирная сеть ГДП ГЭС. Вид требуемой палетки и радиусы ее зон даны в прил. 5.

При использовании круговых палеток операция интегрирования соответствует суммированию отдельных вкладов вертикальных столбов (призм) воды, горизонтальные сечения которых задаются отсеками применяемой палетки (рис. 33), в изменение потенциала тяготения, то есть

$$\Delta V = \sum_{i=F}^{IV} \sum_{K=1}^{16} \delta V_{iK}, \quad (6.31)$$



где  $\Delta V$  – изменение потенциала тяготения, вызванное заполнением водохранилища;

$\delta V_{iK}$  – изменение потенциала тяготения, вызванное столбом воды, высекаемым в водохранилище отдельным отсеком палетки;

$K = 1, 2, 3 \dots 16$  – номер сектора палетки;

$i = F, E, D, C, B, A, I, \dots IV$  – наименование зоны палетки.

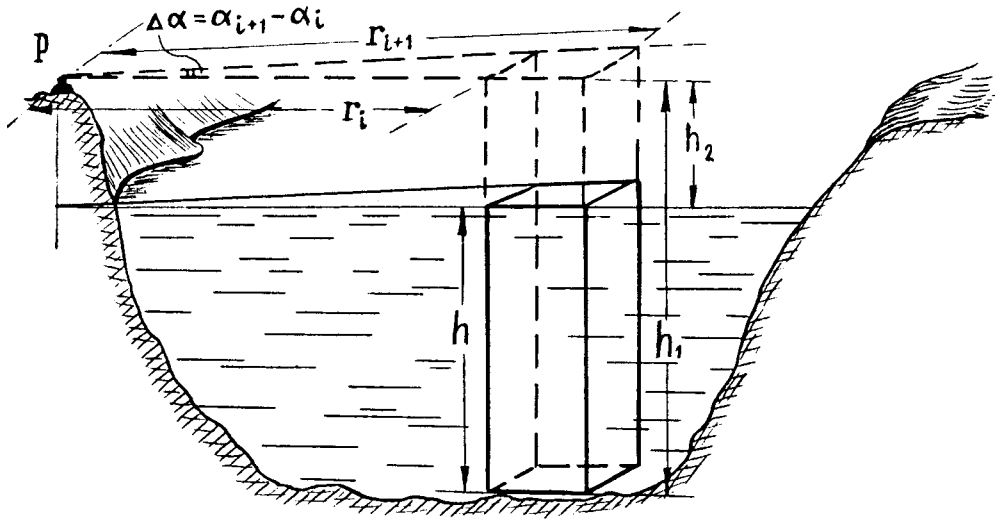


Рис. 33. Иллюстрация к операции численного интегрирования формулы (6.31):

$P$  – репер, в котором вычисляется изменение потенциала  $\Delta V$ ;  $h$  – высота столба воды (глубина водохранилища), соответствующая отсеку палетки  $iK$  с радиусами  $r_i$  и  $r_{i+1}$ ;  $h_2$  – высота репера  $P$  над уровнем воды водохранилища;  $h_1 = h + h_2$

Гравитационный потенциал изображенной на рис. 33 вертикальной призмы может быть вычислен по формуле

$$\delta V_{iK} = \frac{1}{2} f \rho (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \left[ h_1 \left( \sqrt{r_{i+1}^2 + h_1^2} - \sqrt{r_i^2 + h_1^2} \right) - h_2 \left( \sqrt{r_{i+1}^2 + h_2^2} - \sqrt{r_i^2 + h_2^2} \right) + r_{i+1}^2 \ln \left( \frac{h_1 + \sqrt{r_{i+1}^2 + h_1^2}}{h_2 + \sqrt{r_{i+1}^2 + h_2^2}} \right) - r_i^2 \ln \left( \frac{h_1 + \sqrt{r_i^2 + h_1^2}}{h_2 + \sqrt{r_i^2 + h_2^2}} \right) \right], \quad (6.32)$$

Формула (6.32) получается как разность выражений для потенциала тяготения двух призм с основанием на горизонтальной плоскости, проходящей через репер  $P$ . Ввиду малости вычисляемой поправки формулу (6.32) для нашего случая можно существенно упростить. Ее достаточным приближением является выражение

$$\delta V_{iK} = f \cdot \rho \cdot h \cdot (\alpha_{i+1} - \alpha_i) (r_{i+1} - r_i) = f \cdot \rho \cdot h \frac{2\pi}{16} \cdot (r_{i+1} - r_i). \quad (6.33)$$

Результирующая величина смещения урвенной поверхности равна

$$\delta H = \frac{\Delta V}{\gamma} = \frac{\sum_{i=F}^{IV} \sum_{K=1}^{16} \delta V_{iK}}{\gamma}. \quad (6.34)$$

В формуле (6.34) суммирование выполняется по числу элементарных призм, на которые при вычислении разбивается объем водохранилища с помощью используемой палетки (см. рис. 33).

Вычислительная процедура сводится к оцениванию средних значений глубин в отсеках палетки, задающих горизонтальные сечения упомянутых элементарных призм. При этом палетка накладывается на топографическую карту, на которой желательнее заранее поднять горизонтали, попадающие на водохранилище. Особо нужно выделить и подписать выбранный стандартный уровень. Центр палетки должен быть совмещен с репером, для которого вычисляется смещение урвенной поверхности. Хотя для этих вычислений азимутальная ориентировка палетки может быть произвольной, палетку лучше всего ориентировать единообразно, что позволит использовать результаты снятия для вычисления изменений уклонов отвеса, если они будут представлять интерес.

Подходящим масштабом карты является 1:100000. *Палетка строится в масштабе используемой карты.*

### **6.6. Принципы расчета гравиметрической съемки при решении геодезических задач**

Рассчитать гравиметрическую съемку – это значит установить на этапе проектирования площадь этой съемки, оптимальную плотность пунктов и точность измерения. Отправным пунктом при расчете гравиметрической съемки является ее назначение. Так при проектировании опорной сети одним из основных условий является удобное расположение и пути подъезда к гравиметрическому пункту. Если съемка проектируется для разведочных геолого-геофизических целей, то при расчете учитывается геологическое строение участка земной коры, а также особенности гравитационного поля. Если съемка проектируется для геодезических целей, то основным критерием здесь является необходимая точность выполнения геодезических работ и связанная с ней точность определения аномалий силы тяжести, уклонов отвеса и аномалий высот. В инженерно-геодезических работах может появиться необходимость проектирования съемки для вычисления составляющих уклонов отвеса в большом числе близко расположенных точек.

Расчет съемки для вычисления уклонения отвеса выполняют следующим образом. При вычислении гравиметрических уклонений отвеса по формулам Венинг-Мейнеса предполагается, что аномалии силы тяжести известны во всех точках поверхности интегрирования. Практически уклонения отвеса всегда вычисляют по результатам дискретной гравиметрической съемки, используя результаты съемки в виде гравиметрической карты изоаномал. Средние аномалии силы тяжести на элементарных площадках, на которые разбивают поверхность интегрирования при вычислении уклонений отвеса, будут определяться с ошибкой, равной полной ошибке интерполяции  $m_u$ . Ошибка определения уклонения отвеса  $m_{\xi,\eta}$  определится по формуле

$$m_{\xi,\eta}^2 = \left(\frac{\rho}{2\pi\gamma}\right)^2 \sum m_{\Delta g_{i,k}}^2 \left[ \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} (\sin A_k - \sin A_{k-1}) \right]^2. \quad (6.35)$$

В (6.35)  $m_{\Delta g_{i,k}}$  – ошибка определения аномалии силы тяжести на элементарной трапеции, ограниченной радиусами  $r_i$  и  $r_{i+1}$  и лучами с азимутами  $A_{k-1}$  и  $A_k$ . По этой формуле вычисляются ошибки определения уклонения отвеса, вызванные дискретностью гравиметрической съемки, поэтому она используется для расчета гравиметрической съемки.

Проектирование съемки для вычисления уклонения отвеса с заданной точностью выполняют следующим образом. Напишем для ошибки аномалии эмпирическую формулу

$$m_{\Delta g} = c(\sqrt{x} + \sqrt{y}),$$

где  $x$  и  $y$  размеры участка, на котором находится один гравиметрический пункт,  $c$  – коэффициент. Выразим  $x$  и  $y$  через  $r_i$ . Для этого примем  $x = y = r_{i+1} - r_i$ , где  $(r_{i+1} - r_i)$  – ширина зоны. Для разбивки зоны на площадки потребуем, чтобы средняя линия элементарной площадки равнялась ее высоте  $y$  (рис. 34).

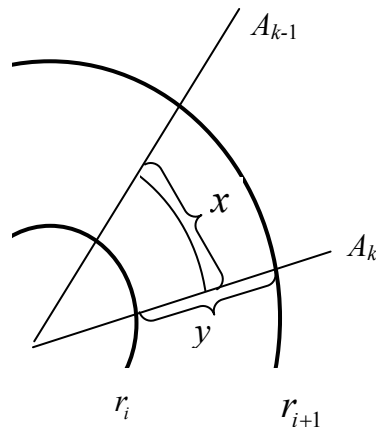


Рис. 34. Иллюстрация к проектированию гравиметрической съемки

Число площадок в зоне найдем из условия  $x = y$ .

$$(r_{i+1} - r_i) = \frac{\pi(r_{i+1} + r_i)}{n},$$

откуда

$$n = \pi \frac{r_{i+1} + r_i}{r_{i+1} - r_i}.$$

С учетом сказанного для ошибки аномалии напишем

$$m_{\Delta g} = 2c\sqrt{y} = 2c\sqrt{r_{i+1} - r_i}. \quad (6.36)$$

Разность  $\sin A_k - \sin A_{k-1}$  выразим через  $r_i$ . Имеем

$$\sin A_k - \sin A_{k-1} = 2 \sin \frac{A_k - A_{k-1}}{2} \cos \frac{A_k + A_{k-1}}{2} = 2 \sin \frac{A_k - A_{k-1}}{2} \cos A_{cp}.$$

Поэтому для одной зоны напишем

$$\sum (\sin A_k - \sin A_{k-1})^2 = 4 \sin^2 \frac{A_k - A_{k-1}}{2} \sum_k \cos^2 A_{cp}.$$

Для определения  $\sum \cos^2 A_{cp}$  поступим следующим образом. При достаточно большом числе площадок в зоне можно написать

$$\frac{1}{\Delta A} \sum_k \cos^2 A_{cp} \Delta A \approx \frac{1}{\Delta A} \int_0^{2\pi} \cos^2 A dA = \frac{\pi}{\Delta A},$$

где  $\Delta A = A_k - A_{k-1} = \frac{2\pi}{n} = 2 \frac{r_{i+1} - r_i}{r_{i+1} + r_i}$ .

Для одной зоны получим

$$\sum (\sin A_k - \sin A_{k-1})^2 = 2\pi \frac{(r_{i+1} + r_i)}{r_{i+1} - r_i} \sin^2 \frac{A_k - A_{k-1}}{2} \sum_k \cos^2 A_{cp}. \quad (6.37)$$

Подставляя (6.36) и (6.37) в (6.35), получим

$$m_{\xi, \eta}^2 = \left( \frac{2\rho^2 c^2}{\pi\gamma^2} \right)^2 \sum (r_{i+1} + r_i) \ln^2 \frac{r_{i+1}}{r_i} \sin^2 \frac{r_{i+1} - r_i}{r_{i+1} + r_i}. \quad (6.38)$$

Радиусы зон  $r_i$  находят под условием минимума ошибки уклонения отвеса.

Это условие приводит к системе уравнений вида

$$\frac{\partial m_{\xi, \eta}^2}{\partial r_i} = 0. \quad (6.39)$$

Для решения системы задают допустимое значение ошибки уклонения отвеса и радиус гравиметрической съемки.

Подобные расчеты выполняют для вычисления уклонений отвеса с высокой точностью (например, для вычисления уклонений отвеса с погрешностью около  $0,03''$ ). Такая съемка проектируется для контроля координат астрономических пунктов. Съемка сгущения запроектирована в радиусе 48,5 км. Число дополнительных гравиметрических пунктов, определенных вокруг астропунктов, составляют от 201 до 363.

Рассчитанная описанным способом съемка будет неравномерной по площади, так как влияние аномалий силы тяжести на уклонение отвеса убывает с увеличением расстояния  $r$ . Поэтому такая методика проектирования неудобна в том случае, когда нужно вычислять уклонения отвеса в нескольких близких точках. Исходя из этого, *в инженерно-геодезических работах, как правило, проектируют равномерную гравиметрическую съемку*, ограничиваясь по площади ближними зонами (обычно 48,5 км). При проектировании этой равномерной съемки используют формулу Молоденского:

$$m_g'' = 0,15 \cdot m_{\Delta g}, \quad (6.40)$$

где  $m_g''$  – ошибка определения уклонения отвеса;

$m_{\Delta g}$  – ошибка определения аномалий силы тяжести;

0,15 – экспериментальный коэффициент, который уже имеет необходимую размерность ( $''/мГал$ ).

Так как гравиметрическая съемка – дискретная, то опыт показал, что ошибка определения аномалий силы тяжести, в основном, обусловлена ошибками интерполирования. Поэтому для расчета ошибку определения аномалий силы тяжести принимают равную ошибке интерполирования ( $E$ ):

$$m_{\Delta g} = E. \quad (6.41)$$

При этом Молоденский предлагает формулу, по которой вычисляется ошибка интерполирования

$$E = \kappa \cdot x, \quad (6.42)$$

где  $x$  – расстояние между гравиметрическими пунктами в км,

$\kappa$  – экспериментальный коэффициент, имеющий необходимую размерность, который принимается для равнинных районов  $\kappa = 0,11$ , для горных в 2 – 3 раза выше, то есть  $\kappa = 0,22$  или  $\kappa = 0,33$ .

$m_g'' = 0,15 \cdot \kappa \cdot x$ . Откуда  $x = \frac{m_g''}{0,15 \cdot 0,11}$ . Если  $m_g'' = 0,1''$ , тогда  $x = 6$  км

(при  $\kappa = 0,11$ ), в горных районах плотность съемки увеличивается до 2 – 3 км.

*Вопросы для проверки усвоения материала по теме 6*

1. Как определить сжатие Земли по результатам гравиметрических измерений?
2. Как учитывается неоднородность гравитационного поля в результатах геодезических измерений, выполняемых в государственных геодезических сетях?
3. Специфика учета неоднородности гравитационного поля в результатах геодезических измерений, выполняемых в высокоточных инженерных геодезических сетях.
4. Основные этапы учета неоднородностей гравитационного поля в результатах геодезических измерений.
5. Использование вторых производных потенциала силы тяжести при решении задач прикладной геодезии.
6. В каких районах (горных или равнинных) будет больше влияние ВГП в разностях превышений повторного нивелирования?
7. Обосновать необходимость учета ВГП в результатах повторного нивелирования на примере геодинамических полигонов ГЭС.

## 7. РУКОВОДСТВО К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Лабораторные работы являются важнейшей составляющей учебно-методического комплекса по гравиметрии, и они подобраны таким образом, чтобы студенты смогли максимально закрепить теоретический материал лекций, а также приобрести практические навыки работы с гравиметрами. Наибольшее внимание в них уделено вопросам применения гравиметрии в геодезии.

Руководство содержит 7 лабораторных работ, на 3 из которых отведено по 2 часа аудиторного времени, еще на 3 – по 4 часа, и на последнюю работу – 6 часов. Освоение студентами материала на лабораторных занятиях контролируется защитой работ и на экзамене.

### 7.1. Лабораторная работа № 1 (2 часа) Знакомство со статическими гравиметрами

*Цель работы:* Ознакомиться с устройством статических гравиметров. Приобрести практические навыки наблюдения гравиметрами ГНУК-В, Дельта, ГАГ-2.

Класс механических гравиметров (ГАГ, ГНУ, ГМПШ и т.д.) основан на статическом методе относительных измерений ускорения силы тяжести. В их устройстве использован принцип вертикального сейсмографа Голицина.

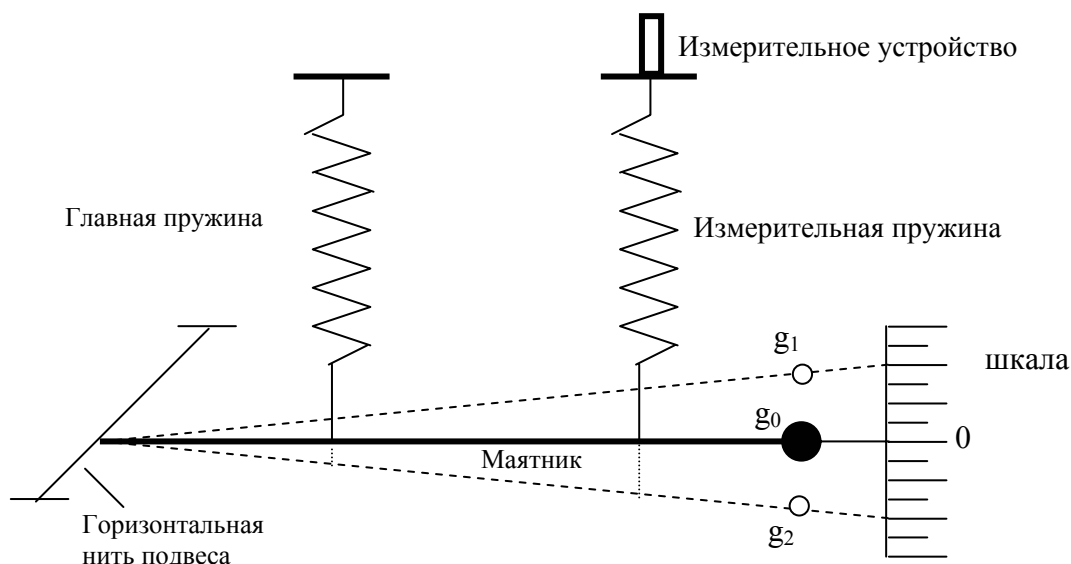


Рис. 7.1.1. Принципиальная схема механического статического гравиметра:  
0 – неподвижный индекс на шкале, совмещенный с подвижным индексом от маятника  
в момент отсчитывания

В самых общих чертах схема устройства рассматриваемых гравиметров заключается в следующем. На тонкой *горизонтальной нити подвеса* (рис. 7.1.1) укреплен рычаг с грузиком на конце (*маятник*).

Маятник удерживается в горизонтальном положении с помощью натяжения *главной пружины*, прикрепленной нижним концом к отростку маятника, и силой закручивания нити подвеса маятника.

При изменении силы тяжести маятник отклоняется от горизонтального положения, занимаемого им при  $g = g_0$ , изменяя натяжение главной пружины и силу закручивания нити подвеса до тех пор, пока момент силы тяжести не уравновесится моментами упругих сил главной пружины и закручивания нити подвеса.

При измерениях используется *нулевой или компенсационный способ*, согласно которому маятник возвращают в горизонтальное положение введением в систему дополнительного момента сил, компенсирующего *изменение момента силы тяжести и являющегося мерой изменения ускорения силы тяжести*.

На основе сказанного дадим схему устройства статического гравиметра (рис. 7.1.2). Главную часть прибора составляет упругая система, которая, как правило, изготавливается из чистого плавленного кварца (за исключением нити температурного компенсатора и грузика на конце маятника). *Упругая система состоит из трех частей: чувствительного элемента, измерительного устройства и температурного компенсатора*.

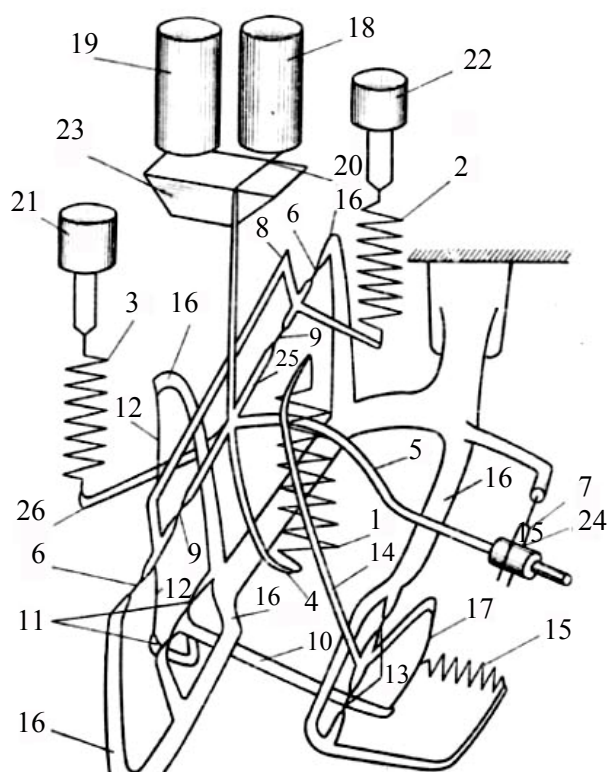


Рис. 7.1.2. Схема упругой системы гравиметра ГНУК-В



*Чувствительный элемент гравиметра* (см. рис. 7.1.2) представляет собой вертикальный сейсмограф Голицина – рычаг, подвешенный на горизонтальных нитях 9 и главной пружине 1. Рычаг имеет сложную форму и состоит из осевого стержня 25, к которому прикреплены: изогнутый горизонтальный стержень 5 с платиновым грузиком 24, нижний отросток 4, задний отросток 26 и вертикальный отросток Г-образной формы 20.

Главная пружина 1 прикреплена нижним концом к отростку 4, а верхним – ко второму рычагу температурного компенсатора 14. Диапазонная пружина 3 прикреплена нижним концом к заднему отростку 26, а верхним – к диапазонному микрометрическому устройству 21. Нити подвеса 9 натянуты на измерительной рамке 2, верхний конец которой соединен с измерительным микрометрическим устройством 22. Осями вращения измерительной рамки 8 служат горизонтальные нити 6, натянутые на основном каркасе кварцевой системы. Вторым рычагом температурного компенсатора 14, вращающийся на горизонтальных нитях 13, соединен нитью 17 с первым рычагом температурного компенсатора 10, вращающимся на нитях 11. К противоположной стороне рычага 10 приварена металлическая нить 12, второй конец которой закреплен на основном каркасе кварцевой системы. Основной каркас 16 прикрепляется к металлическому основанию корпуса.

В положении равновесия момент силы тяжести рычага уравновешивается моментом упругих сил главной 1 и диапазонной 3 пружин, а также моментом сил кручения нити подвеса 9. Рычаг может вращаться в пределах зазора ограничителя 7. Основной момент упругих сил создается главной пружиной 1. Величина его примерно в 100 раз больше остальных моментов.

При изменении силы тяжести рычаг поворачивается, а вместе с ним поворачивается вертикальный отросток с горизонтальным стержнем 20 на конце, называемый подвижным индексом. Этот стержень освещается лучом света от осветителя 19, проходящим через призму 23 в микроскоп 18. *В поле зрения шкалы гравиметра подвижный индекс обозначается в виде светлой полосы, соизмеримой с шириной штриха окулярной шкалы.* На окулярной шкале выбирают какой-либо штрих за исходный, называемый *неподвижным индексом.*

Процесс измерения заключается в следующем (см. рис. 7.1.1, 7.1.2). Пусть при некотором номинальном значении  $g = g_0$  маятник занимает некоторое фиксированное положение равновесия и его подвижный индекс совмещен с неподвижным индексом окулярной шкалы. При изменении си-

лы тяжести до величины  $g_1$  или  $g_2$  маятник отклоняется от своего первоначального положения на некоторый угол  $\alpha$ , растягивая главную пружину 1 до нового состояния равновесия упругой системы. Для измерения величины изменения силы тяжести используют нулевой или компенсационный способ, при котором подвижный индекс маятника возвращают в первоначальное положение, соответствующее номинальному значению силы тяжести  $g = g_0$ , то есть совмещая его с неподвижным индексом шкалы окуляра. Это достигается с помощью изменения натяжения (длины) измерительной пружины 2, жестко соединенной через измерительную рамку с нитями подвеса маятника 9, путем вращения микрометрического винта 22. Мерой изменения силы тяжести является число оборотов этого винта, отсчитанное по специальному отсчетному устройству.

Зависимость между показанием отсчетного устройства микрометрического винта и изменением силы тяжести имеет вид

$$\Delta g = C \cdot \Delta n,$$

где  $C$  – цена оборота отсчетного устройства (постоянная гравиметра, имеющая размерность мГал/оборот);

$\Delta n$  – изменение отсчета в оборотах.

Приспособление для температурной компенсации выполнено с целью уменьшения влияния температурного фактора на функционирование упругой системы.

Описанная упругая система гравиметра располагается в герметически закрытом сосуде, помещенном в теплоизоляционном слое и сосуде Дьюара. Сосуд Дьюара предохраняет упругую систему от резких изменений температуры. Сосуд Дьюара вставляют во внешний кожух гравиметра, установленный на 3-х подъемных (установочных) винтах (рис. 7.1.3, 7.1.4).

На верхней панели гравиметра размещаются счетчик измерительного устройства, окуляр микроскопа, в поле зрения которого виден световой индекс маятника (подвижный индекс), лампочка осветителя и подсветка, термометр, продольный и поперечный уровни, отверстие для диапазонного ключа.

По точностной классификации гравиметры типа ГНУК-В относятся к классу В и характеризуются средней квадратической ошибкой измерения приращения ускорения силы тяжести  $m_{\Delta g} = (0,02 - 0,03)$  мГал, гравиметры Дельта относятся к классу точности С и характеризуются  $m_{\Delta g} = (0,03 - 0,06)$  мГал.

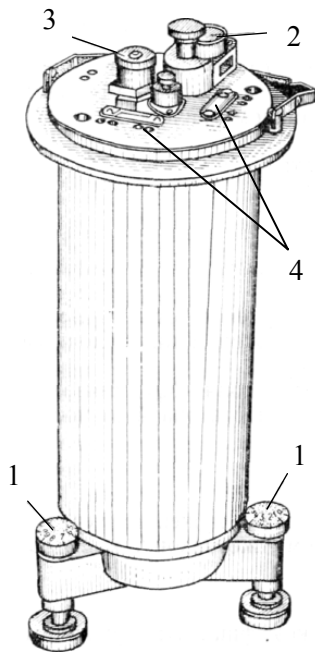


Рис. 7.1.3. Внешний вид гравиметра ГНУК-В:

- 1 – установочные (подъемные) винты;
- 2 – отсчетное микрометрическое устройство;
- 3 – окуляр;
- 4 – продольный и поперечный уровни гравиметра

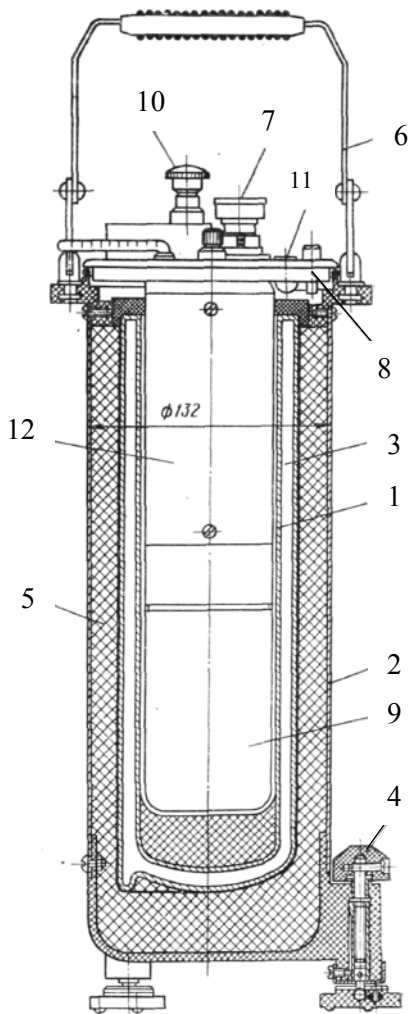


Рис. 7.1.4. Разрез гравиметра ГНУК-В:

- 1 – средняя часть гравиметра;
- 2 – внешний кожух;
- 3 – сосуд Дьюара;
- 4 – установочный винт;
- 5 – теплоизоляция;
- 6 – ручки для переноски;
- 7 – окуляр;
- 8 – верхняя плата;
- 9 – вакуумная камера;
- 10 – отсчетное микрометрическое устройство;
- 11 – уровень;
- 12 – теплозащитный столб

*Приобретение практических навыков работы с гравиметрами  
ГНУК-В и Дельта*

*Порядок выполнения работы*

1. Изучить расположение всех винтов гравиметра и научиться брать отсчеты по отсчетному устройству.
2. Привести гравиметр в рабочее положение, то есть вывести пузырьки продольного и поперечного уровней на середину, вращением микрометрического винта вывести индекс маятника в поле зрения окуляра, убедиться в правильности расположения этого индекса относительно шкалы и в четкости его изображения.
3. Навести индекс маятника на нулевой штрих шкалы, взять 3 отсчета по отсчетному устройству гравиметра и записать в журнал.

*Образец журнала наблюдения с гравиметром*

Гравиметр ГНУК-В № 468

Наблюдатели: Соснова Л.М., Солнцев С.И.

Дата 27 октября 2003 года

№ пункта	Время наблюдения	Температура	Отсчет, обор.	Ср. отсчет	Фамилия наблюдателя
л. 316	12 <sup>h</sup> 00 <sup>m</sup>	20,1°	10,876 10,879 10,882	10,879	Соснова
л. 316	12 <sup>h</sup> 05 <sup>m</sup>	20,1°	10,901 10,906 10,903	10,903	Солнцев

*Приобретение практических навыков работы  
с гравиметром ГАГ-2*

Гравиметр ГАГ-2 – геодезический астазированный гравиметр. Его устройство также основано на принципе сейсмографа Голицина. Используемая в приборе кварцевая упругая система отличается от изображенной на рис. 7.1.5 следующим: верхний конец главной пружины здесь прикрепляется к отростку термокомпенсатора; измерительная пружина отсутствует, так как для компенсации и измерения силы тяжести применяется метод наклона. Метод наклона основан на эффекте кажущегося изменения силы тяжести при отклонении плоскости, содержащей нить подвеса маят-

ника и ось маятника, в момент взятия отсчета по гравиметру от горизонтального положения на угол  $\beta$ .

Величина кажущегося изменения силы тяжести в зависимости от угла  $\beta$  определяется по формуле

$$\Delta g = -\frac{g_0 \beta^2}{2}, \quad (7.1.1)$$

где  $\beta$  – угол наклона;

$g_0$  – приближенное значение силы тяжести в районе наблюдений.

Из формулы (7.1.1) следует, что путем наклона гравиметра можно подобрать такой угол  $\beta$ , при котором кажущееся изменение силы тяжести станет равным реальному изменению силы тяжести, то есть с помощью наклона гравиметра можно совместить подвижный индекс маятника с неподвижным отсчетным индексом шкалы окуляра. Эта идея как раз и используется в конструкции гравиметра ГАГ-2, где при взятии отсчета индекс маятника наводится на отсчетный неподвижный индекс шкалы с помощью наклона гравиметра. Мерой изменения силы тяжести в данном случае является угол  $\beta$ , на который необходимо наклонить гравиметр для совмещения подвижного и неподвижного индексов.

Конструкция гравиметра ГАГ-2 выполнена таким образом, что обеспечивается возможность наклона гравиметра при производстве измерения. Он состоит из двух основных частей (рис. 7.1.5): подвижной и неподвижной. Подвижная часть 11 содержит кварцевую систему, заключенную в двухступенчатый термостат. Неподвижная же часть состоит из плиты 16 и двух колонок 4, на которые опирается ось вращения подвижной части. В левой колонке установлен стеклянный лимб диаметром 18 см, находящийся на одной оси с подвижной частью. Лимб разделен через  $10'$ . Отсчет по нему производится с помощью оптического микрометра, имеющего микроскоп 5 и барабан 3. На правой колонке расположены закрепительный 10 и дифференциальный 12 винты подвижной части, а также ограничитель наклона 13. Для нивелирования прибора служат подъемные винты 2, уровни 9 на верхней панели и круглый уровень 17. При измерениях подвижную часть наклоняют до тех пор, пока изображение индекса в поле зрения окуляра (7 на рис. 7.1.5) не совпадет с нулевым штрихом шкалы. Совмещение индекса добиваются при наклоне подвижной части окуляром от себя (положительный угол наклона) и на себя (отрицательный угол наклона). При каждом совмещении берут отсчет по вертикальному лимбу.

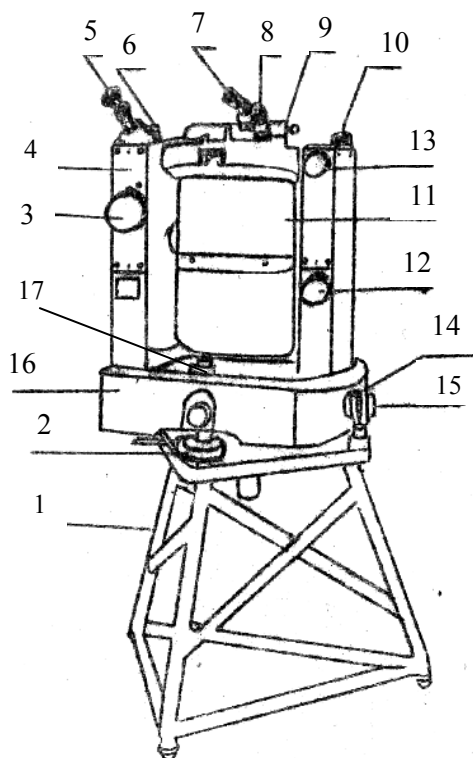


Рис. 7.1.5. Общий вид гравиметра ГАГ-2:

1 – штатив; 2 – подъемные винты; 3 – барабан микрометра; 4 – колонка; 5 – микроскоп отсчетного устройства; 6 – трубка; 7 – окуляр; 8 – осветитель; 9 – уровни; 10 – закрепительный винт; 11 – подвижная часть гравиметра, содержащая кварцевую систему; 12 – дифференциальный винт; 13 – ограничители; 14 – арретир; 15 – стопор подъемного винта; 16 – плита; 17 – круглый уровень

Гравиметр ГАГ-2 имеет масштабный коэффициент, равный 1, и поэтому, в отличие от всех существующих гравиметров, не требует эталонирования.

Средняя квадратическая ошибка одного измерения гравиметром ГАГ-2 при разности ускорения силы тяжести до 1000 мГал и продолжительности рейса до 8 часов при минимальных возможных углах раствора гравиметра не более  $\pm 0,10$  мГал. При измерении разности ускорения силы тяжести более 1000 мГал и продолжительности рейса более 8 часов (но менее 16 часов) СКО одного измерения не более  $\pm 0,15$  мГал.

#### *Порядок работы с гравиметром ГАГ-2*

1. Установить гравиметр микрометром и окуляром к наблюдателю на треногу и посредством станового винта и переходной пластины жестко прикрепить к штативу.

2. Дезарретировать прибор.

3. Отnivelировать прибор так, чтобы оба уровня на верхней панели гравиметра были в нуль-пункте.

4. Включить освещение гравиметра.

5. Открепить закрепительный винт подвижной части гравиметра правой рукой и, поддерживая подвижную часть левой снизу, наклонить последнюю от себя так, чтобы индекс маятника появился в поле зрения окуляра микроскопа, и закрепить зажимной винт. Точное совмещение штрихов производится дифференциальным микрометрическим винтом (сначала грубым, затем точным). После точного совмещения штрихов производится отсчет по угломерному устройству. Это будет одно направление угла ( $+\beta$ ). Аналогичным образом, наклоняя прибор в другую сторону (на себя), отсчитывается второе направление ( $-\beta$ ). Разность этих направлений даст величину угла  $2\beta$  (угол раствора системы).

На этом заканчивается измерение угла одним приемом. Измерение угла производится тремя приемами с перестановкой лимба между приемами на  $60^{\circ}21'40''$ . Допустимое расхождение угла  $2\beta$  между приемами  $1,0''$ . Ниже приведен пример измерения угла наклона на пункте гравиметром ГАГ-2.

*Материалы, представляемые к сдаче*

1. Журнал наблюдений гравиметром ГАГ-2.
2. Журнал наблюдений гравиметрами ГНУК-В, Дельта.

Измерение угла наклона на пункте гравиметром ГАГ-2

Время	Отсчеты по гравиметру		Угол раствора $2\beta$
	Окуляр от себя	Окуляр к себе	
12 <sup>h</sup> 08 <sup>m</sup>	67°17'23,4"	64°43'20,1"	2°34'03,3"
12 10	124 39 06,9	122 05 02,8	2 34 04,1
12 13	185 00 47,1	182 26 43,6	2 34 03,5
		Среднее	$2\beta = 2^{\circ}34'03,6''$ $\beta = 1\ 17\ 01,8$

**7.2. Лабораторная работа № 2 (4 часа)**

**Установка гравиметра на минимум чувствительности к наклону (исследование уровней)**

Исследования и регулировка гравиметров осуществляется при их изготовлении, при подготовке к полевым работам, а также в процессе работ. Основными видами поверочных испытаний гравиметров являются следующие:

1. Установка уровней на минимум чувствительности к наклону.
2. Определение времени становления отсчета.
3. Определение температурного коэффициента и температурной характеристики.
4. Эталонирование.
5. Исследование смещения нуля-пункта.

Все исследования гравиметров проводятся в соответствии с ГОСТом 13017-83 (Гравиметры наземные. Общие технические условия).

Порядок исследования по установке уровней на минимум чувствительности к наклону основан на следующих соображениях.

Гравиметр нивелируют подъемными винтами по двум цилиндрическим уровням, укрепленным на верхней панели прибора. Взаимное расположение подъемных винтов, уровней, нити подвеса и оси маятника даны на рис. 7.2.1.

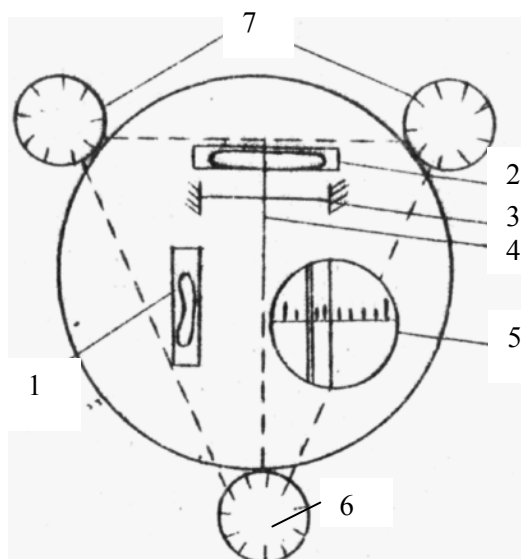


Рис. 7.2.1. Взаимное расположение элементов гравиметра

Продольный уровень 1 установлен параллельно оси маятника 4; ось этого уровня параллельна также изображению подвижного индекса маятника в поле зрения окуляра 5. Пузырек продольного уровня 1 приводят в нуль-пункт с помощью подъемного винта 6. Уровень 2 (поперечный) расположен параллельно нити подвеса 3 маятника и линии, соединяющей подъемные винты 7. Если уровни установлены правильно, то после приведения их пузырьков в нуль – пункт плоскость, образованная нитью подвеса 3 и осью маятника 4 (при совмещении индекса с нулевым штрихом в поле зрения окуляра 5) займет горизонтальное положение.



В таком случае отсчет по гравиметру будет соответствовать величине измеряемого приращения силы тяжести, а чувствительность гравиметра к наклону являться минимальной.

Если во время наблюдений с гравиметром уровни установлены неправильно и плоскость, проходящая через ось и нить подвеса маятника, после совмещения индексов будет наклонена на угол  $\beta$  к горизонту, то в результате измерений войдет погрешность  $\Delta g$ , которая уменьшит истинное значение силы тяжести на величину, равную

$$\Delta g \approx -\frac{g_0 \beta^2}{2}, \quad (7.2.1)$$

где  $g_0$  – приближенное значение силы тяжести в пункте наблюдения.

Согласно (7.2.1) график зависимости  $\Delta g$  от  $\beta$  имеет вид параболы. Вершина этой параболы, соответствующая  $\beta = 0$ , должна соответствовать и положению пузырьков уровней в нуль-пункте. На этом соображении и построено исследование по установке уровней на минимум чувствительности к наклону, которое выполняется отдельно для каждого уровня.

*а) Исследование поперечного уровня:*

– устанавливаем гравиметр на прочное основание и выводим пузырьки уровней на середину при помощи подъемных винтов. Замечаем положение условного нуля подъемных винтов (отсчеты по подъемным винтам, соответствующие положению пузырьков уровней на середине);

– микрометрическим винтом выводим индекс маятника на нулевой штрих шкалы (неподвижный отсчетный индекс) и берем отсчет по гравиметру;

– вращая в противоположные стороны подъемные винты, контролируемые поперечный уровень, наклоняем гравиметр вправо на 0,2 оборота по каждому из винтов, выводим индекс маятника на середину и берем отсчет по гравиметру. Продолжаем постепенный наклон гравиметра через 0,2 оборота до полного оборота подъемного винта, сопровождая каждый наклон отсчетом по гравиметру. (*Прямой ход*);

– выполняем *обратный ход*, который заключается в постепенном возвращении гравиметра в исходное горизонтальное положение с помощью обратного вращения подъемных винтов через 0,2 оборота, сопровождающегося отсчетами по гравиметру;

– аналогично выполняем прямой и обратный ходы при наклоне гравиметра влево;

– величины наклонов и соответствующие им отсчеты по гравиметру оформляются в виде таблицы. По данным исследования строится график. (Пример дан в прил. 1).

#### *Анализ графика и юстировка уровня*

При правильно установленном уровне вершина параболы должна соответствовать отсчету по гравиметру при положении пузырька уровня на середине. Если вершина параболы смещена относительно оси симметрии, то уровень нуждается в юстировке. Юстировка уровня производится следующим образом:

- из графика снимается наклон  $n$ , соответствующий вершине параболы, и устанавливается с помощью подъемных винтов;
- микрометрическим винтом индекс маятника наводится на нулевой штрих шкалы;
- исправительными винтами уровня пузырек уровня выводится на середину.

Для контроля правильности юстировки исследование повторяется.

#### *б) Исследование продольного уровня*

Исследование продольного уровня и его юстировка выполняется аналогично поперечному уровню. Отличие заключается лишь в том, что наклон гравиметра по направлению продольного уровня осуществляется с помощью 3-го подъемного винта через 0,1 оборота.

#### *Ускоренный способ установки уровней на минимум чувствительности прибора к наклону*

В производственных условиях при наличии у наблюдателя достаточных практических навыков и при пониженных требованиях к точности определения ускорения силы тяжести для юстировки уровней часто применяют ускоренный способ юстировки, который называется установкой уровней на минимум чувствительности прибора к наклону.

Поверку в этом случае производят следующим образом:

1. Устанавливают уровни в нулевое положение и совмещают маятник с отсчетным штрихом окулярной шкалы.
2. Соответствующими подъемными винтами прибора отклоняют пузырек одного из уровней вправо и влево на одно деление, наблюдая за положением маятника на окулярной шкале. Если при этом заметного смещения маятника не происходит или в обоих случаях он отклонится на малую величину в сторону уменьшения силы тяжести (обычно влево), то можно считать, что нарушения регулировки уровня нет.

Следует помнить, что при отклонении пузырька одного из уровней второй уровень должен оставаться в нулевом положении. Если он отклонится от нулевого положения, то уровень нужно поправить соответствующими подъемными винтами. В том случае, когда при отклонении пузырька уровня на одно деление вправо и влево маятник также переместится вправо и влево, имеет место нарушение регулировки уровня на минимум чувствительности к наклону. Порядок юстировки дан ниже.

#### *Порядок юстировки уровня в ускоренном способе*

Подъемными винтами отводят пузырек уровня на несколько делений в направлении, соответствующем отклонению маятника в сторону увеличения силы тяжести (обычно вправо), и затем совмещают маятник с исходным положением на окулярной шкале, а пузырек уровня при помощи исправительных винтов приводят на середину. Снова подъемными винтами отклоняют пузырек уровня в том же направлении и совмещают маятник с отсчетным индексом на окулярной шкале, а уровень приводят на середину. Так поступают до тех пор, пока маятник при очередном наклоне прибора не отклонится влево. Уровень считается отрегулированным, если отклонение его пузырька (наклон прибора) в любую сторону вызовет смещение маятника в сторону уменьшения силы тяжести от исходного положения или не вызовет никакого смещения.

Далее контролируют правильность настройки так, как это описано в пункте 2.

Второй уровень регулируется аналогичным образом. После регулировки второго уровня необходимо вновь проверить правильность установки первого уровня.

#### *Материалы, представляемые к сдаче*

1. Результаты исследования продольного и поперечного уровней гравиметра.
2. Графики зависимостей показаний гравиметра от угла наклона по каждому уровню. Анализ графиков.
3. Описание ускоренной методики установки гравиметра на минимум чувствительности к наклону.

### **7.3. Лабораторная работа № 3 (2 часа)**

#### **Исследование гравиметра на смещение нуль-пункта**

В теории механических гравиметров предполагается, что деформация упругой системы пропорциональна силе тяжести, то есть связь между

нагрузкой и деформацией соответствует закону Гука. В реальных же телах зависимость деформации от нагрузки гораздо сложнее, что особенно заметно с увеличением нагрузки.

Материал в упругих системах гравиметров подвергается нагрузкам, значительно меньшим предела пропорциональности. Тем не менее, опыт свидетельствует, что даже при малых нагрузках деформации материала не строго соответствуют закону Гука. При наблюдениях с гравиметром отклонение от закона пропорциональности проявляется как непрерывные изменения отсчета, которые называют *смещением нуля-пункта*.

Основное требование, которое предъявляется к любому гравиметру, заключается в следующем: *смещение нуля-пункта должно быть линейным во времени и не превышать установленного допуска*. Поэтому перед началом полевого сезона каждый гравиметр исследуется на смещение нуля-пункта, по результатам которого для прибора устанавливается продолжительность полевого рейса, в течение которого смещение нуля-пункта линейно во времени. Предельный допуск на величину смещения нуля-пункта российских гравиметров составляет 2 мГал/сутки.

#### *Методика исследования смещения нуля-пункта гравиметра*

1. Устанавливают гравиметр на жесткое основание, приводят в рабочее положение и в течение 10 часов через равные промежутки времени берут отсчеты по отсчетному устройству.

2. Переводят отсчеты в миллигалы и по ним строят график поведения смещения нуля-пункта во времени. При этом по оси абсцисс откладывают моменты времени наблюдений, а по оси ординат – соответствующий отсчет в миллигалах.

3. Соединив последовательно между собой все полученные точки, выполняют анализ графика. Если на графике все точки легли в пределах точности (для гравиметров среднего класса точности  $m_{дон} = 0,1$  мГал) на одну прямую, значит такое смещение нуля-пункта у данного гравиметра линейно во времени. Если в интервале времени  $t_2 - t_1$  часть точек образовала прямую линию, а другая часть точек в интервале  $t_3 - t_2$  – ломаную линию, значит смещение нуля-пункта в течение  $t_2 - t_1$  происходит по линейному закону, а в интервале  $t_3 - t_2$  – не по линейному закону, то есть не пропорционально времени. Продолжительность полевого рейса будет определяться временем, в течение которого смещение нуля-пункта соответствует линейному закону.

4. Коэффициент  $k$  (скорость изменения смещения нуля-пункта в единицу времени) определится по формуле

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n (S_i - S_{i-1})}{2 \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})}, \quad (7.3.1)$$

где  $i-1$ ,  $i$  – порядковые номера двух соседних отсчетов;  $n$  – число отсчетов.

Пример исследования смещения нуля-пункта гравиметра дан в прил. 2.

#### *Материалы, представляемые к сдаче*

1. Результаты исследования гравиметра на смещение нуля-пункта (таблица отсчетов, результаты обработки, график).
2. Анализ результатов исследования.

### **7.4. Лабораторная работа № 4 (4 часа)** **Проложение и обработка гравиметрического рейса**

Результаты наблюдений силы тяжести обычно представляют в виде гравиметрических карт, на которых показывают картину площадного распределения аномалий силы тяжести. Для определения аномалий силы тяжести на участке работ выполняется гравиметрическая съемка.

При производстве гравиметрических съемок гравиметрические измерения выполняются, как правило, относительным методом. Для приведения различных съемок в единую систему, а также с целью обеспечения гравиметрических съемок исходными данными на территории каждого государства создана система пунктов повышенной точности, называемая опорной гравиметрической сетью. Пункты опорных сетей служат исходными для создания рядовых гравиметрических сетей на участке работ.

Методика наблюдения на пунктах рядовой сети зависит от особенностей поведения нуля-пункта гравиметра, и она построена таким образом, чтобы обеспечить возможность введения максимально достоверных поправок за смещение нуля-пункта в результаты гравиметрических измерений. На пунктах рядовой сети наблюдения выполняют отдельными рейсами, которые начинаются и заканчиваются на опорных пунктах. *При этом под рейсом понимается совокупность последовательных наблюдений на нескольких пунктах, объединенная общей характеристикой смещения нуля-пункта гравиметра.* Предполагается, что при продолжительности рейса 6 – 8 часов смещение нуля-пункта изменяется по линейному закону пропорционально времени.

Наблюдения на пунктах рядовой сети чаще всего ведут по одной из схем, изложенных в разделе 5.1.4.

В настоящей лабораторной работе предлагается проложить гравиметрический рейс по схеме замкнутого хода (рис. 7.4.1).

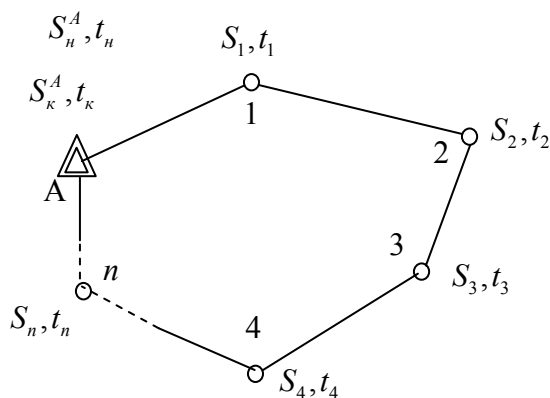


Рис. 7.4.1. Схема замкнутого хода гравиметрических наблюдений в рядовой сети:  
 А – исходный пункт полевой опорной сети, на котором начинается и заканчивается гравиметрический рейс;

$S_k^A, S_n^A$  – конечный и начальный отсчеты по гравиметру на исходном пункте гравиметрического рейса, переведенные в мГгалы;

$t_k, t_n$  – моменты взятия конечного и начального отсчетов по гравиметру;

$S_1, S_2, \dots, S_n$  – текущие отсчеты по гравиметру;  $t_1, t_2, \dots, t_n$  – время взятия текущих отсчетов

При этом в качестве исходного пункта принимается одна из тумб гравиметрической лаборатории, в качестве определяемых пунктов – площадки вблизи центральной и боковой лестниц здания.

Результаты наблюдений в гравиметрическом рейсе записываются в журнал наблюдений с гравиметром, образец которого дан в лабораторной работе № 1.

### *Обработка гравиметрического рейса*

В общем случае математическая текущая обработка наблюдений в гравиметрическом рейсе заключается в переводе отсчетов по микрометру гравиметра в миллигалы и во введении трех основных поправок: за температуру, за приливные изменения силы тяжести, за смещение нуля-пункта (см. раздел 5.3).

В лабораторной работе при обработке гравиметрического рейса предполагается вычислить и ввести только одну *поправку за смещение нуля-пункта*

гравиметра, которая вводится всегда в результаты гравиметрических измерений. После ее введения все отсчеты гравиметра в рейсе как бы приводятся к моменту отсчета на исходном пункте. Смещение нуля-пункта считают линейным, и полученные невязки распределяют пропорционально времени.

После введения в результаты гравиметрических измерений всех необходимых поправок получают приращение силы тяжести на пунктах относительно исходного, по которым вычисляют силу тяжести  $g_i$  в каждой точке.

*Рабочие формулы:*

$$S_i = c \cdot d_i; \quad (7.4.1)$$

$$\Delta t_i = t_i - t_n; \quad (7.4.2)$$

$$k = \frac{S_k - S_n}{t_k - t_n}; \quad (7.4.3)$$

$$\delta S_i = -k \Delta t_i; \quad (7.4.4)$$

$$S'_i = S_i + \delta S_i; \quad (7.4.5)$$

$$\delta g_i = S'_i - S_n; \quad (7.4.6)$$

$$g_i = g_{ucx} + \delta g_i; \quad (7.4.7)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \frac{\partial g}{\partial H} = \frac{\Delta g}{h}. \quad (7.4.8)$$

где  $c$  – постоянная гравиметра, определяемая из эталонирования прибора;  
 $k$  – скорость смещения нуля-пункта гравиметра в единицу времени;  
 $d_i, S_i$  – текущие отсчеты по гравиметру соответственно в оборотах и миллигалах;

$S_n, S_k$  – начальный и конечный отсчеты по гравиметру в рейсе;

$t_i$  – момент времени на текущей точке;

$t_n, t_k$  – время взятия начального и конечного отсчетов по гравиметру в рейсе;

$\delta S_i$  – поправка за смещение нуля-пункта гравиметра;

$S'_i$  – исправленный отсчет;

$\delta g_i$  – приращение силы тяжести на определяемом пункте относительно исходного;

$g_{ucx}, g_i$  – значения силы тяжести соответственно на исходном и определяемом пунктах;

$h$  – превышение между соседними этажами в метрах.

Формула (7.4.8) определяет вертикальный градиент действительной силы тяжести, показывающий скорость изменения силы тяжести с высотой.

Результаты всех вычислений по формулам (7.4.1) – (7.4.7) оформляются в виде табл. 7.4.1. Исходные данные для вычислений, то есть столбцы 1, 2, 3 таблицы, выбираются из журнала наблюдений в гравиметрическом рейсе.

Таблица 7.4.1

**Обработка гравиметрического рейса**  
Гравиметр ГАК-7Т № 137 с = 5,000 мГал/об

Название пункта	Время наблюдения $t_i$	Отсчет в делениях отсчетного устр. $d_i$ , в оборотах	Отсчет $S_i$ , в мГал	Приращение времени $\Delta t_i$ , в мин	Поправка за смещение нуля-пункта $\delta S_i$ , в мГал	Исправленный отсчет $S'_i = S_i + \delta S_i$ , в мГал	Приращение силы тяжести относит. начального $\delta g_i$ , в мГал	Ускорение силы тяжести $g_i$ , в мГал	Вертикальный градиент $\frac{\Delta g}{h}$ , мГал/м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Исх	8 <sup>h</sup> 00 <sup>m</sup>	5,707	28,53	0	0	28,53	0	<b>981056,4</b>	
2	8 15	5,805	29,02	15	-0,040	28,98	0,45	981056,8	
3	8 20	5,701	28,50	20	-0,054	27,96	-0,57	981055,8	
⋮	⋮								
⋮	⋮								
43	13 51	5,300	26,50	351	-0,0951	25,55	-2,98	981053,4	
⋮	⋮								
⋮	⋮								
1	14 10	5,904	29,52	370	-0,999	28,52	-0,01	981056,4	

$$\left( \frac{\Delta g}{\Delta h} \right)_{cp.}$$

*Материалы, представляемые к сдаче*

1. Журнал наблюдений гравиметрического рейса.
2. Таблица обработки гравиметрического рейса.
3. Анализ полученных результатов.

### 7.5. Лабораторная работа № 5 (4 часа)

#### Определение аномалий силы тяжести с редуциями в свободном воздухе и Буге. Построение гравиметрической карты

*Общие замечания*

По результатам полевых наблюдений, выполненных в процессе гравиметрической съемки, строятся *гравиметрические карты в аномалиях с редуциями в свободном воздухе и Буге.*



Аномалия силы тяжести  $\Delta g$  есть разность между действительным (измеренным) значением силы тяжести  $g$  и ее нормальным (теоретическим) значением  $\gamma$  в пункте наблюдений.

$$\Delta g = g - \gamma. \quad (7.5.1)$$

В зависимости от поправок (редукций), которые вводятся (или не вводятся) в измеренные значения силы тяжести, различают следующие аномалии: в свободном воздухе, топографические, Буге, Фая (см. раздел 2.3.1). Из перечисленных аномалий силы тяжести геодезистов больше всего интересуют аномалии в свободном воздухе, так как именно эти аномалии наиболее полно отражают состояние реального гравитационного поля, в котором выполняются геодезические измерения. Однако именно эти аномалии изменяются на земной поверхности по очень сложному закону, не подчиняющемуся закону линейного интерполирования. Поэтому часто геодезисты вынуждены использовать гравиметрические карты, составленные в аномалиях Буге.

Составление гравиметрической карты состоит из следующих этапов:

- 1) вычисление аномалий силы тяжести и приведение их в единую систему;
- 2) выбор масштаба и сечения карты;
- 3) приведение аномалий к одному уровню;
- 4) выбор плотности промежуточного слоя;
- 5) нанесение гравиметрических пунктов на картографическую основу, интерполирование аномалий силы тяжести и построение гравиметрической карты.

Подробное описание перечисленных этапов дано в разделе 5.4.

#### *Задание к выполнению лабораторной работы*

1. По исходным данным, выданным преподавателем, которые состоят из гравиметрических пунктов с известными координатами, высотами и измеренными значениями ускорения силы тяжести  $g$ , вычислить аномалии в свободном воздухе и аномалии Буге, используя рабочие формулы (7.5.2) – (7.5.4).

2. По результатам вычислений построить гравиметрическую карту в масштабе 1:1 000 000 в заданной проекции с использованием данных табл. 7.5.1.

**Координаты углов рамок трапеций в конической проекции Коврайского  
в метрах**

Долгота $\lambda^\circ$ \ Широта $B^\circ$	40	42	44	46
40	x=2161070 y=1689500	x=2210670 y=1853260	x=2264560 y=2015560	x=2324600 y=2176260
42	x=2374190 y=1627830	x=2422270 y=1785620	x=2474650 y=1941990	x=2531650 y=2092630
44	x=2586010 y=1566540	x=2632280 y=1718390	x=2682700 y=1868870	x=2736540 y=2017880

*Рабочие формулы*

Формула Гельмерта

$$\gamma_0 = 978030(1 + 0,005302 \sin^2 B - 0,000007 \sin^2 2B) \text{ мГал}; \quad (7.5.2)$$

$$(g - \gamma)_{св.в} = g - (\gamma_0 - 0,3086H); \quad (7.5.3)$$

$$(g - \gamma)_B = (g - \gamma)_{св.в} - 2\pi f \delta H. \quad (7.5.4)$$

В формулах (7.5.2) – (7.5.4)  $\gamma_0$  – нормальное значение силы тяжести на поверхности эллипсоида;

$H$  – отметка гравиметрического пункта;

$g$  – измеренное значение силы тяжести, полученное из обработки гравиметрических рейсов;

$f$  – гравитационная постоянная ( $f = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ сек}^{-2}$ );

$\delta$  – плотность промежуточного слоя (обычно средняя плотность земной коры);

$B$  – широта точки наблюдения (гравиметрического пункта).

*Материалы, представляемые к сдаче*

1. Таблица вычисления аномалий силы тяжести с редукциями в свободном воздухе и Буге.

2. Гравиметрическая карта в масштабе 1:1 000 000.

### 7.6. Лабораторная работа № 6.

**Определение уклонений отвеса и высот квазигеоида в нулевом приближении (согласно решению Стокса). Вычисление поправок за уклонение отвеса в результаты геодезических измерений**

*Общие замечания*

Для решения ряда задач геодезии (например, решения редукционной проблемы) необходимо знание аномалий высот, а также уклонений отвеса

и их составляющих для точек земной поверхности. Эти величины могут быть получены в соответствии со строгой теорией определения фигуры и внешнего гравитационного поля Земли, созданной выдающимся ученым М.С. Молоденским. Составляющие уклонения отвеса в меридиане ( $\xi$ ) и первом вертикале ( $\eta$ ) и аномалии высот ( $\zeta$ ) у Молоденского определяются последовательными приближениями, то есть

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 + \Delta\xi_1 + \Delta\xi_2 + \dots; \\ \eta &= \eta_0 + \Delta\eta_1 + \Delta\eta_2 + \dots; \\ \zeta &= \zeta_0 + \Delta\zeta_1 + \Delta\zeta_2 + \dots\end{aligned}\tag{7.6.1}$$

В формулах (7.6.1) нулевые приближения  $\xi_0, \eta_0$  определяются по формулам Венинг-Мейнеса, а  $\zeta_0$  – по формуле Стокса (см. раздел 3.2). Так как методика вычисления  $\xi, \eta, \zeta$  по формулам строгой теории для реальных условий является очень трудоемкой, то в настоящее время на практике широко применяются формулы нулевого приближения, то есть Стокса и Венинг-Мейнеса. Для пунктов, расположенных в равнинных районах, составляющие уклонений отвеса и высот квазигеоида по этим формулам определяются с точностью соответственно  $(0,3 - 0,4)''$  и  $(1 - 1,5)$  м, что в большинстве случаев является достаточным. В горных же районах вычисление величин  $\xi, \eta, \zeta$  по формулам нулевого приближения требует уточнения.

Так как формулы Стокса и Венинг-Мейнеса интегральные и аналитическое интегрирование входящих в них выражений невозможно из-за дискретности гравиметрической съемки, то на практике определение  $\xi, \eta, \zeta$  выполняется методом численного интегрирования с помощью палетки Еремеева.

#### *Рабочие формулы*

1. Составляющие уклонения отвеса в меридиане  $\xi_0$  и в первом вертикале  $\eta_0$  и высота квазигеоида  $\zeta_{0-5}$  за влияние аномальных масс центральной зоны (0 – 5 км):

$$\begin{Bmatrix} \xi_{0-5}'' \\ \eta_{0-5}'' \end{Bmatrix} = -0,02628 \sum_{k=2n}^{16} \Delta g_k \begin{Bmatrix} \cos \alpha_k \\ \sin \alpha_k \end{Bmatrix},\tag{7.6.2}$$

$$\zeta = 0,00255 \Delta g_0 + 0,00032 \sum_{k=2n}^{16} \Delta g_k,\tag{7.6.3}$$

где  $k$  – номер сектора палетки Еремеева;  $n = 1, 2 \dots 8$ ;

$\alpha$  – азимут направления в секторе;

$\Delta g_0$  – значение аномалии силы тяжести на определяемом пункте;

$\Delta g_k$  – среднее значение аномалии  $\Delta g$  в четных секторах нулевой зоны палетки Еремеева.

2. Составляющие уклонения отвеса  $\xi_{5-100}, \eta_{5-100}$  и высота квазигеоида  $\zeta_{5-100}$  в определяемом пункте за влияние аномальных масс ближних зон (5 – 100 км):

$$\begin{Bmatrix} \xi_{5-100}'' \\ \eta_{5-100}'' \end{Bmatrix} = -0,005 \sum_{\kappa=1}^{16} \sum_{i=1}^{VIII} \Delta g_{ki} \begin{Bmatrix} \cos \alpha_{\kappa} \\ \sin \alpha_{\kappa} \end{Bmatrix}; \quad (7.6.4)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{5-100} = & (15 \sum_{\kappa=1}^{16} \Delta g_{I\kappa} + 22 \sum_{\kappa=1}^{16} \Delta g_{II\kappa} + 32 \sum_{\kappa=1}^{16} \Delta g_{III\kappa} + 47 \sum_{\kappa=1}^{16} \Delta g_{IV\kappa} + 69 \sum_{\kappa=1}^{16} \Delta g_{V\kappa} + \\ & + 101 \sum_{\kappa=1}^{16} \Delta g_{VI\kappa} + 149 \sum_{\kappa=1}^{16} \Delta g_{VII\kappa} + 219 \sum_{\kappa=1}^{16} \Delta g_{VIII\kappa}) 10^{-5}, \end{aligned} \quad (7.6.5)$$

где  $\Delta g_{ki}$  – среднее значение аномалий на трапеции  $ki$  палетки Еремеева;  
 $i$  – номер зоны;  $\kappa$  – номер сектора;

$\sum_{\kappa=1}^{16} \Delta g_{I\kappa}, \sum_{\kappa=1}^{16} \Delta g_{II\kappa}, \dots$  – сумма аномалий в каждой зоне  $I, II, \dots, VIII$ .

3. Составляющие уклонения отвеса  $\xi_{0-100}, \eta_{0-100}$  и высоты квазигеоида  $\zeta_{0-100}$  за влияния аномальных масс центральной и ближней зон получаем путем суммирования:

$$\begin{aligned} \xi_{0-100}'' &= \xi_{0-5}'' + \xi_{5-100}'', \\ \eta_{0-100}'' &= \eta_{0-5}'' + \eta_{5-100}'', \\ \zeta_{0-100} &= \zeta_{0-5} + \zeta_{5-100}. \end{aligned} \quad (7.6.6)$$

Аномалия высоты  $\zeta$  получается в метрах.

4. Полное уклонение отвеса  $u$  и уклонение отвеса в направлении, азимут которого равен  $A$ , ( $u_A$ ) определяется формулами

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \\ u_A &= \xi \cos A + \eta \sin A, \end{aligned} \quad (7.6.7)$$

где  $\xi, \eta$  – составляющие гравиметрического уклонения отвеса, найденные по формулам (7.6.6).

5. Поправка  $\delta_{\alpha}$  за уклонение отвеса в горизонтальное направление стороны триангуляции вычисляется по формуле

$$\delta_{\alpha_{in}}'' = \left( -\xi_i^{a-z} \sin A_{in} + \eta_i^{a-z} \cos A_{in} \right) \text{ctg} Z_{in}, \quad (7.6.8)$$

где  $in$  – название направления;

$\xi_i^{a-2}, \eta_i^{a-2}$  – составляющие астрономо-геодезического уклонения отвеса в точке  $i$ ;

$A_{in}, Z_{in}$  – азимут и зенитное расстояние направления  $in$ .

6. Поправка  $\delta_{Z_{in}}$  за уклонения отвеса в измеренное зенитное расстояние направления  $in$  определяется по формуле

$$\delta_{Z_{in}} = \xi_i^{a-2} \cos A_{in} + \eta_i^{a-2} \sin A_{in}. \quad (7.6.9)$$

7.  $\xi^{a-2}, \eta^{a-2}$  в (7.6.8) – (7.6.9) вычисляются по формулам

$$\xi^{a-2} = \xi + 0,171'' H_{\text{км}}^\gamma \sin(2B),$$

$$\eta^{a-2} = \eta.$$

### Содержание работы

Работа заключается в практических вычислениях составляющих  $\xi$ ,  $\eta$  гравиметрического уклонения отвеса по формулам Венинг-Мейнеса и высоты  $\zeta$  квазигеоида над эллипсоидом (аномалии высоты) по формуле Стокса методом численного интегрирования с использованием палетки Еремеева радиусом 100 км. Вычисления производятся для пункта геодезической сети, нанесенного на гравиметрическую карту, составленную в аномалиях Буге. По найденным значениям составляющих гравиметрического уклонения отвеса  $\xi_i, \eta_i$  переходят к  $\xi_i^{a-2}, \eta_i^{a-2}$  (составляющим астрономо-геодезического уклонения отвеса), и определяются поправки за уклонения отвесных линий в измеренное горизонтальное направление и зенитное расстояние государственной сети триангуляции.

### Исходные данные

1. Гравиметрическая карта, построенная при выполнении работы № 5.
2. Координаты пункта геодезической сети, азимут и зенитное расстояние измеренного горизонтального направления (задается преподавателем).
3. Радиусы круговой палетки Еремеева для ближних зон (0 – 100) км:

№ зоны	Радиусы зон, км	№ зоны	Радиусы зон, км
0	5	V	33,3
I	7,3	VI	48,5
II	10,7	VII	70,6
III	15,7	VIII	102,6
IV	22,8		

### Порядок выполнения работы

1. По известным радиусам зон строят палетку Еремеева в масштабе карты, на прозрачной основе по образцу (прил. 3).

2. Центр палетки совмещают с геодезическим пунктом, нанесенным на карту. Прямую NS палетки направляют на север.

3. Вычисления проводят по схеме (табл. в прил. 4).

а) в четных секторах нулевой зоны снимают (интерполируют) средние значения аномалий и записывают их в нулевую строку схемы в столбцах, соответствующих этим секторам;

б) значения аномалий на определяемом пункте (в центре палетки) записывают в столбец  $\Delta g$  на строку выше;

в) находят осредненные по трапециям палетки значения аномалий  $\Delta g_{ki}$  и записывают на пересечении  $k$ -того столбца и  $i$ -той строки;

г) вычисляют  $\xi_{0-5}, \eta_{0-5}$  по формулам (7.6.2). Для этого в нулевой строке находят сумму аномалий с учетом верхних знаков в секторах 2, 6, 10, 14 и записывают ее в столбец  $\sum \sum \xi$ , такую же сумму с учетом нижних знаков записывают в столбец  $\sum \sum \eta$ . Аналогичные суммы находят и для секторов 16, 8, 4, 12. Далее найденные суммы умножают на соответствующие коэффициенты, приведенные строкой выше в схеме. Суммируют произведения, полученные в столбцах  $\sum \sum \xi$  и  $\sum \sum \eta$  и получают значения  $\xi_{0-5}$  и  $\eta_{0-5}$  с точностью до 0,001";

д) вычисляют  $\xi_{5-100}$  и  $\eta_{5-100}$  по формулам (7.6.4). Для этого суммируют аномалии по всем секторам. Далее находят сумму сумм по секторам 1, 7, 9, 15 с учетом верхних и нижних знаков и записывают соответственно в столбцах  $\sum \sum \xi$  и  $\sum \sum \eta$ . Аналогичные вычисления выполняют для остальных трех групп секторов. Найденные суммы умножают на соответствующие коэффициенты и вычисляют суммы произведений по столбцам  $\xi_{5-100}$ ,  $\eta_{5-100}$ . По формулам (7.6.6) получают значения  $\xi_{0-100}$  и  $\eta_{0-100}$  с точностью до 0,001". Окончательные значения составляющих  $\xi$  и  $\eta$  записывают с точностью до 0,01";

е) по формулам (7.6.7) – (7.6.9) вычисляют  $u''$ ,  $u''_A$ ,  $\delta''_\alpha$ ,  $\delta''_Z$ ;

ж) высоту квазигеоида за влияние центральной (нулевой) зоны вычисляют по формуле (7.6.3). Учет зон от 5 до 100 км производят по формуле (7.6.5). Для получения значений  $\zeta_{0-5}$  и  $\zeta_{5-100}$  нужно просуммировать

аномалии по строке (записать в столбец  $\sum \Delta g_0$ ), полученные суммы умножить на соответствующие коэффициенты (в столбце  $\zeta \cdot 10^{-5}$ ), а затем сложить произведения в соответствии с формулами (7.6.3), (7.6.5). Значения  $\xi_{0-5}$  и  $\zeta_{0-5}$  вычисляют с точностью до 0,1 м.

*Материалы, представляемые к сдаче*

1. Рабочие формулы с пояснениями.
2. Результаты вычислений  $\xi, \eta, \zeta, u, u_A, \delta_\alpha, \delta_Z$ .

### **7.7. Лабораторная работа № 7 (6 часов)**

#### **Вычисление поправок в результаты высокоточного нивелирования, вызванных колебаниями уровенных поверхностей вследствие заполнения водохранилища**

Как известно, результаты геодезических измерений зависят от состояния гравитационного поля Земли в момент этих измерений. Так как под влиянием различных факторов гравитационное поле Земли изменяется с течением времени, то на практике эти изменения, называемые вариациями гравитационного поля (ВГП), часто требуется учитывать в результатах высокоточных геодезических измерений в виде специальных поправок за ВГП. Этот вопрос стоит особенно остро при выполнении повторных геодезических измерений с целью наблюдения за деформациями различных объектов (земной поверхности, инженерно-технических сооружений и т.д.), когда о величине деформации судят по разностям результатов геодезических измерений, проведенных через некоторый промежуток времени в одном и том же геодезическом построении. Ясно, что эта разность должна быть свободна от влияния ВГП.

Существует два пути вычисления требуемых поправок за ВГП. Первый путь заключается в сопровождении каждого цикла геодезических работ, проводимых на исследуемом участке, гравиметрической съемкой и в учете неоднородностей текущего гравитационного поля в результатах каждого цикла этих работ по известным формулам вычисления поправок за уклонение отвесных линий и непараллельность уровенных поверхностей в результаты геодезических измерений. Второй путь основан на достаточно точном знании источника изменения гравитационного поля и не требует выполнения гравиметрических работ. Последний путь широко применяется в системе Российского комитета по геодезии и картографии при анализе высокоточного повторного нивелирования на геодинамических полигонах (ГДП) ГЭС.

ГДП ГЭС создаются для наблюдения за деформациями земной поверхности с целью изучения вопроса вызванных или приводохранилищных землетрясений, а значит, в конечном итоге, с целью слежения за безопасностью эксплуатации ГЭС. Основным видом геодезических измерений на таких полигонах является высокоточное повторное нивелирование. Линии нивелирования, как правило, прокладываются по периметру водохранилища и перпендикулярно к нему (рис. 7.7.1). Расстояние между реперами равно 2 – 3 км.

Первые два цикла нивелирования выполняют до заполнения водохранилища, затем ежегодно во время его заполнения и еще несколько циклов – в период эксплуатации ГЭС. В дальнейшем по разностям одноименных превышений между циклами судят о величинах вертикальных деформаций земной поверхности в районе водохранилища ГЭС. Суждение о величинах деформаций может оказаться верным только в том случае, если из разности будут максимально устранены все искажающие влияния, в частности, влияние гравитационного эффекта масс воды водохранилища.

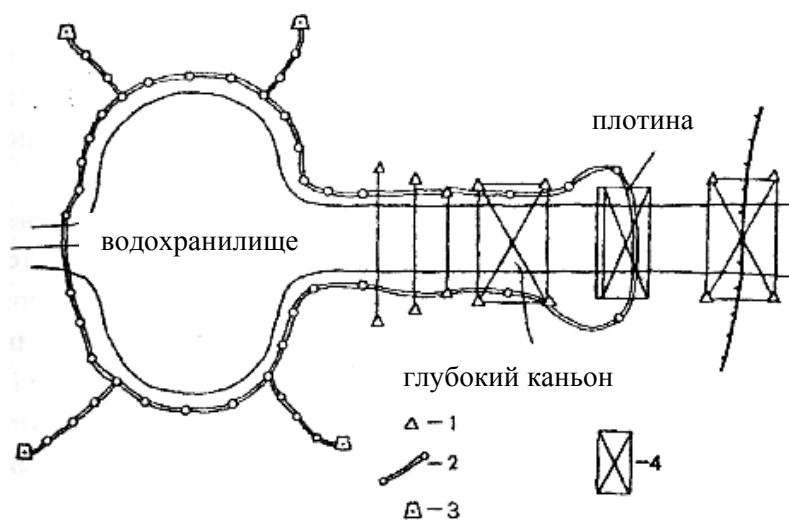


Рис. 7.7.1. Схема геодезических построений на ГДП ГЭС:

- 1 – пункты плановой сети; 2 – линии повторного нивелирования; 3 – фундаментальные нивелирные знаки, расположенные вне зоны влияния водохранилища; 4 – геодезический четырехугольник, приуроченный к расположению тектонических разломов

Исходным теоретическим положением данной работы является тот факт, что в результате изменения окружающих масс, вызванных заполнением водохранилища, состояние локального гравитационного поля вблизи водохранилища меняется. Это изменение проявляется, в частности, в изменении положений направлений отвесных линий и соответственно уровневых поверхностей, проходящих через нивелирные репера ГДП ГЭС (рис. 7.7.2).



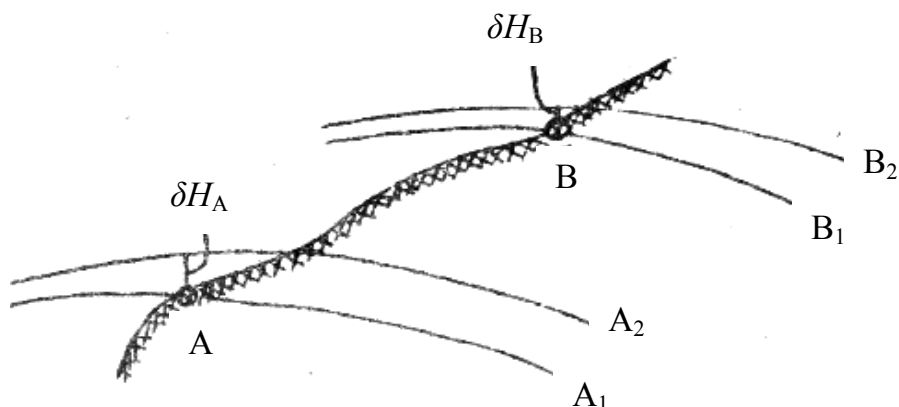


Рис. 7.7.2. Иллюстрация к факту изменения положения уровенных поверхностей, проходящих через нивелирные репера, вследствие заполнения водохранилища

Пусть на рис. 7.7.2 А и В – нивелирные репера. При состоянии гравитационного поля до заполнения водохранилища уровенные поверхности, проходящие через эти репера, занимали положения  $A_1, B_1$ . Заполнение водохранилища изменило состояние гравитационного поля, что привело к радиальному смещению уровенных поверхностей (поверхностей одинакового потенциала), проходящих через каждый из этих реперов, и они заняли положения  $A_2, B_2$ . Величины радиальных смещений уровенных поверхностей на реперах А и В будут характеризоваться отрезками  $\delta H_A$  и  $\delta H_B$ . Они будут равны поправкам в отметки реперов А и В за изменение гравитационного поля вследствие заполнения водохранилища для эпохи нивелирования, выполненного после заполнения.

Необходимость учета этих поправок при контроле за состоянием равновесия в земной коре с помощью высокоточного повторного нивелирования на ГДП ГЭС обусловлена тем фактом, что *индикатором сохранения состояния этого равновесия являются вертикальные деформации земной коры, проявляющиеся в вертикальных перемещениях центров наблюдаемых нивелирных реперов*. Величины этих вертикальных перемещений можно выделить из разностей отметок данных реперов между сравниваемыми эпохами нивелирования (в нашем случае между эпохой, выполненной до заполнения водохранилища, и эпохой, выполненной после его заполнения), так как разности отметок можно представить в виде следующей суммы:

$$H_j^{T_2} - H_j^{T_1} = \Delta H_j + \delta H_j, \quad (7.7.1)$$

где  $H_j^{T_1}, H_j^{T_2}$  отметки  $j$ -того репера, полученные, соответственно, из нивелирования до заполнения водохранилища и после заполнения водохранилища;

$\Delta H_j$  – вклад в разность отметок  $j$ -того репера, вызванный вертикальными деформациями земной коры;

$\delta H_j$  – влияние на значения разностей отметок изменения гравитационного поля, вызванного заполнением водохранилища.

Интересующая нас величина  $\Delta H_j$  будет получена из формулы (7.7.1).

$$\Delta H_j = (H_j^{T_2} - H_j^{T_1}) - \delta H_j. \quad (7.7.2)$$

Поправка  $\delta H_j$  за изменение гравитационного поля вследствие заполнения водохранилища может быть вычислена без особых затруднений, исходя из следующих рассуждений. Из теории потенциала известно, что изменение потенциала тяготения в точке земной поверхности на величину  $\Delta V$  приводит к радиальному смещению  $\delta H$  проходящей через нее уровенной поверхности, вычисляемому по формуле

$$\delta H = \frac{\Delta V}{\gamma}, \quad (7.7.3)$$

где  $\gamma$  – нормальное значение силы тяжести в данной точке, то есть известная величина. При заполнении водохранилища изменение потенциала  $\Delta V$  создается массой воды, объем и плотность которой известны, так как за уровнем водохранилища ведутся непрерывные наблюдения. Поэтому величина  $\Delta V$  может быть вычислена по формуле определения потенциала притяжения объемных масс (см. раздел 2.1.1):

$$\Delta V = f\rho \iiint_{\tau} \frac{d\tau}{r}, \quad (7.7.4)$$

где  $f$  – гравитационная постоянная ( $f = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{сек}^{-2}$ );

$\rho$  – плотность воды ( $\rho \text{ воды} = 1 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ );

$\tau$  – объем воды в водохранилище;

$d\tau$  – элементарный объем воды;  $r$  – расстояние от репера, в котором вычисляется величина  $\Delta V$ , и элементом объема воды  $d\tau$ .

Интегрирование по формуле (7.7.4) выполняется численно. Для этого используется известная круговая палетка Еремеева, которая строится в масштабе создаваемой карты, обычно в 1:200000. Вид требуемой палетки и радиусы ее зон даны в прил. 5.

При использовании круговой палетки ее центр совмещается с центром нивелирного репера, нанесенного на топографическую карту с водохранилищем. Затем в пределах площади водохранилища вычисляются все элементарные изменения потенциала притяжения, вызванные каждым отдельным вкладом вертикальных столбов воды, горизонтальные сечения

которых задаются отсеками применяемой палетки, а высоты – средней глубиной водохранилища в соответствующем отсеке палетки (рис. 7.7.3).

Обозначим номер зоны палетки через  $i$ , а номер сектора через  $k$ . Тогда изменение потенциала притяжения, вызванное столбом воды, высекаемым каждым отсеком палетки (элементарным объемом), можно вычислить по формуле

$$\Delta V_{ik} = f \rho \frac{S_{ik} \cdot h_{ik}}{r_{ik}}, \quad (7.5)$$

где  $\Delta V_{ik}$  – изменение потенциала притяжения вызванное элементарным объемом (столбом воды, высекаемым отсеком палетки  $ik$ ;  $S_{ik}$  – площадь отсека  $ik$  палетки в масштабе карты;  $h_{ik}$  – средняя глубина водохранилища

в отсеке  $ik$  палетки;  $r_{ik}$  – расстояние от репера до середины зоны палетки ( $r_{ik} = (r_i + r_{i+1})/2$ );  $f$  – гравитационная постоянная;  $\rho$  – плотность воды.

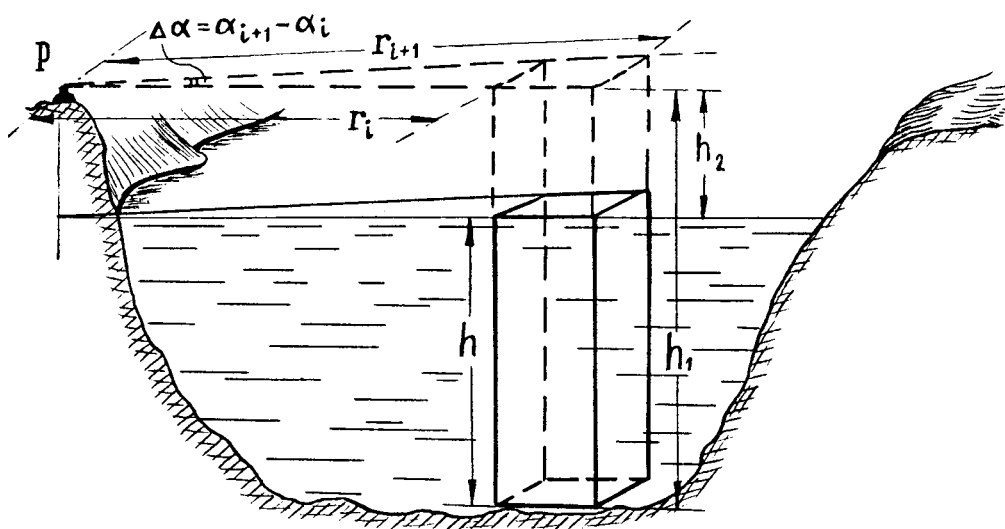


Рис. 7.7.3. Иллюстрация к операции численного интегрирования при определении объема воды в водохранилище для оценки изменения потенциала притяжения, вызванного этим объемом, с использованием палетки Еремеева: P – нивелирный репер, для которого вычисляется поправка;  $r_i, r_{i+1}$  – радиусы соседних зон палетки;

$h$  – глубина водохранилища в отсеке палетки

$S_{ik}$  вычисляется по формуле

$$S_{ik} = \frac{\pi(r_{i+1}^2 - r_i^2)}{16}. \quad (7.7.6)$$

Под операцией интегрирования здесь понимается суммирование всех  $\Delta V_{ik}$ , вычисленных для каждого попавшего на площадь водохранилища отсека палетки, то есть

$$\Delta V = \sum_{i=F}^{IV} \sum_{\kappa=1}^{16} \Delta V_{i\kappa}, \quad (7.7.6)$$

где  $\Delta V$  – изменение потенциала тяготения, вызванное заполнением водохранилища.

И окончательная поправка в отметку репера вычисляется по формуле

$$\delta H = \frac{\Delta V}{\gamma} = \frac{\sum_{j=F}^{IV} \sum_{\kappa=1}^{16} \Delta V_{i\kappa}}{\gamma}, \quad (7.7.7)$$

где  $\delta H$  – поправка в отметку репера за ВГП вследствие заполнения водохранилища;  $\gamma = \gamma_0 - 0,3086 \cdot H$ ;  $\gamma_0$  вычисляется по формуле Гельмерта. Необходимые для вычисления  $\gamma$  и  $\gamma_0$  широта и высота снимаются с карты для каждого репера.

#### *Порядок выполнения работы*

1. По заданному положению плотины и проектному уровню водохранилища обозначить на карте границы водохранилища.
2. Запроектировать на карте линию нивелирования I класса согласно схеме, показанной на рис. 7.7.1.
3. Для группы реперов, обозначенных преподавателем, вычислить поправки в отметки за ВГП вследствие заполнения водохранилища по схеме, указанной в прил. 6.
4. Выполнить анализ полученных результатов и дать практические рекомендации о введении рассматриваемой поправки при обработке нивелирования на ГДП ГЭС.

#### *Требуемые для выполнения работы материалы*

1. Топографическая карта масштаба 1:200000.
2. Проектный уровень воды водохранилища и положение плотины.
3. Палетка Еремеева.
4. Карандаш, линейка.
5. Калькулятор или компьютер (если вычисления производятся по программе Excel).

#### *Материалы, представляемые для сдачи*

1. Топографическая карта с запроектированными границами водохранилища и линией нивелирования.
2. Таблицы вычисления поправок.
3. Анализ полученных результатов и практические рекомендации.

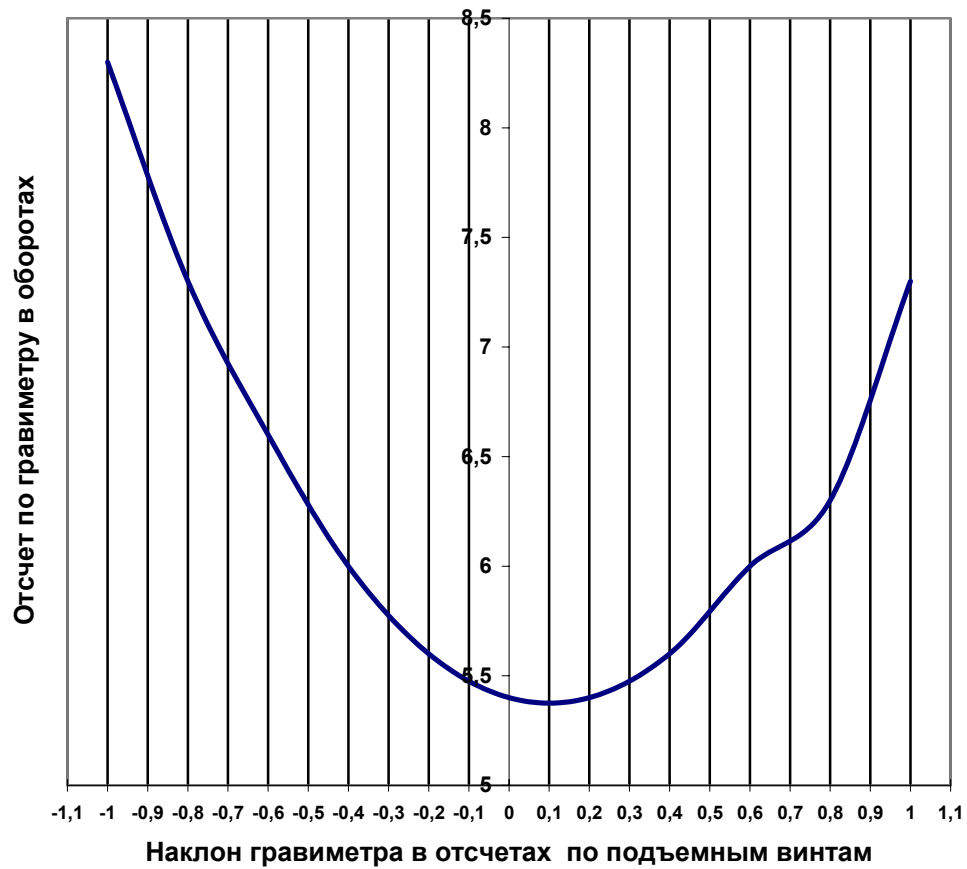
## 7.8. Приложения к лабораторным работам

Приложение 1

### Исследование поперечного уровня (Гравиметр ГНУК-С № 245)

Отсчет по подъемным винтам $n$	Отсчеты по гравиметру в оборотах		
	Прямой ход $S_{пр}$	Обратный ход $S_{обр}$	$S_{ср} = (S_{пр} + S_{обр})/2$
1,0	7,342	7,344	7,343
0,8	6,558	6,566	6,562
0,6	5,984	5,978	5,981
0,4	5,592	5,594	5,593
0,2	5,404	5,398	5,401
0,0	5,395	5,399	5,397
-0,2	5,610	5,586	5,598
-0,4	5,569	5,975	5,972
-0,6	6,572	6,566	6,569
-0,8	7,321	7,335	7,328
-1,0	8,289	8,298	8,294

График исследования поперечного уровня



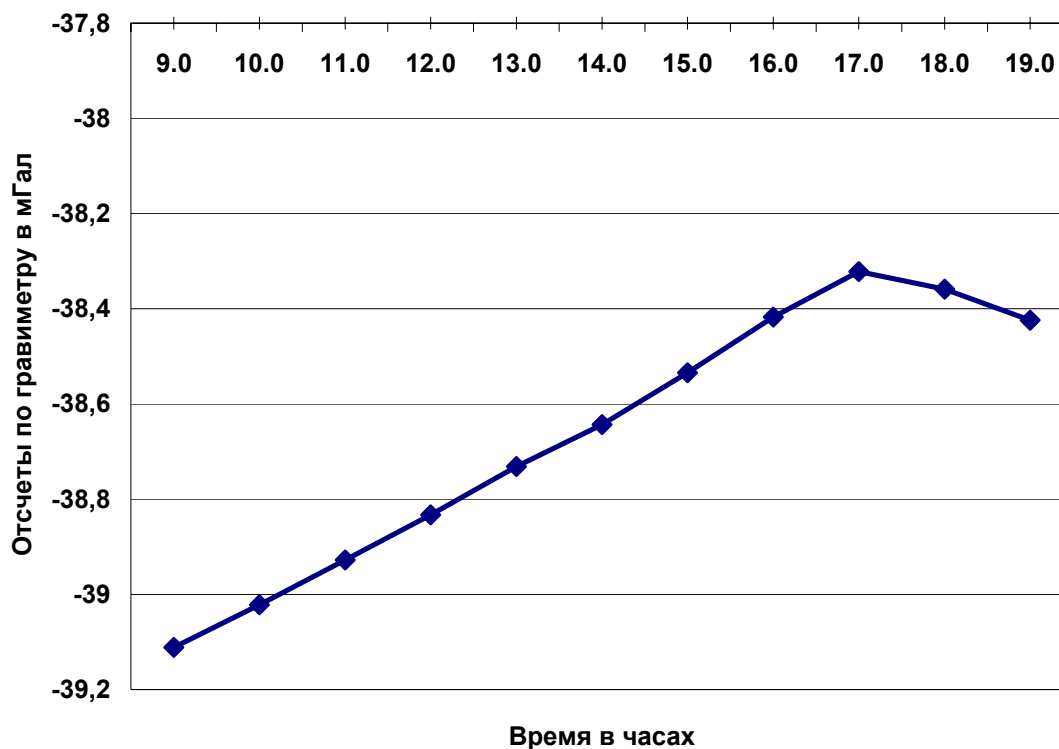
$\Delta n = 0,1$  (вершина параболы)

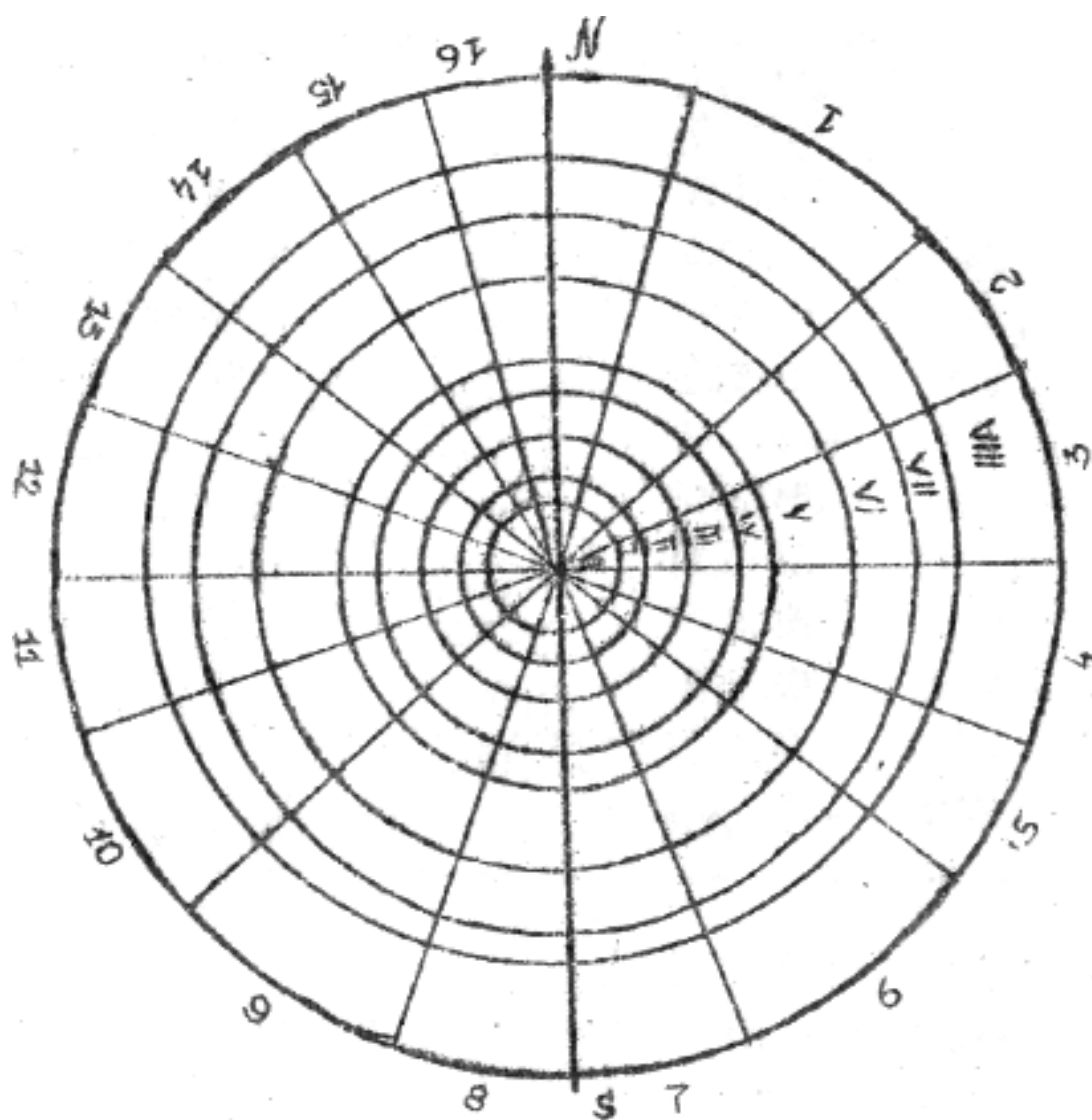
**Исследование гравиметра на смещение нуля-пункта**

Дата: 15 апреля 2003 г. Гравиметр ГНУК-В № 168 С = -7,305 мГал/об

№ п/п	Время		Отсчет по микрометру		k, мГал/час	Примечание
	n	m	в обор.	в мГал		
1	9	00	5,354	-39,111	+0,089	В течение 8 часов смещение нуля-пункта гравиметра можно считать линейным во времени $k_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^8 k_i}{8} = +0,098 \frac{\text{мГал}}{\text{час}}$
2	10	00	5,342	-39,022	+0,094	
3	11	00	5,329	-38,928	+0,095	
4	12	00	5,316	-38,833	+0,102	
5	13	00	5,302	-38,731	+0,088	
6	14	00	5,290	-38,643	+0,109	
7	15	00	5,275	-38,534	+0,117	
8	16	00	5,259	-38,417	+0,095	
9	17	00	5,246	-38,322	-0,037	
10	18	00	5,251	-38,359	-0,065	
11	19	00	5,260	-38,424		

**График смещения нуля-пункта гравиметра**





Образец палетки Еремеева:  
1,2,3.....16 – номер сектора; I,II,.....VIII – номер зоны; NS – линия север – юг

Таблица вычисления  $\xi, \eta, \zeta$

$i \backslash k$	1	7	9	15	$\sum \xi$	$\sum \eta$	2	6	10	14	$\sum \xi$	$\sum \eta$	3	5	11	13	$\sum \xi$	$\sum \eta$	16	8	4	12	$\sum \xi$	$\sum \eta$	$\sum \Delta g_0$	$\zeta \cdot 10^{-5}$	$\zeta$ , в см
$\xi$	-	+	+	-			-	+	+	-			-	+	+	-			-	+	0	0					
$\eta$	-	-	+	+			-	-	+	+	,0186	,0186	-	-	+	+			0	0	-	+	,0263	,0263	18	255	4,6
0							15	20	20	16	9	1							15	23	17	18	8	1	144	32	4,6
I	11	32	21	18			12	28	27	20	0,167	0,019	13	23	21	19			15	33	17	18	0,210	0,026	328	15	4,9
II	8	40	43	19			7	32	33	25			11	24	22	26			13	44	17	19			373	22	8,2
III	3	63	78	12			1	46	57	25			9	28	26	35			5	80	19	26			513	32	16,4
IV	-10	82	115	-2			-3	69	90	11			8	34	30	38			-5	101	22	37			617	47	29,0
V	-22	106	137	-4			-10	83	119	7			8	43	31	30			-13	123	27	58			723	69	49,9
VI	-35	124	104	3			-17	105	82	16			15	70	32	38			-17	96	34	68			718	101	72,5
VII	-40	57	35	4			-12	165	60	23			27	120	4	41			-14	34	38	53			595	149	38,7
VIII	-37	-10	-31	-1			-14	61	23	4			-5	95	-10	37			-33	-34	40	30			115	219	25,2
					,0046	,0019					,0035	,0035					,0019	,0046					,0050	,0050			
$\Sigma$	-122	494	502	49	1069	179	-36	589	491	131	985	69	86	435	150	261	241	-101	-49	477	214	309	526	95			
					4,917	0,340					3,448	0,248											2,63	0,475			

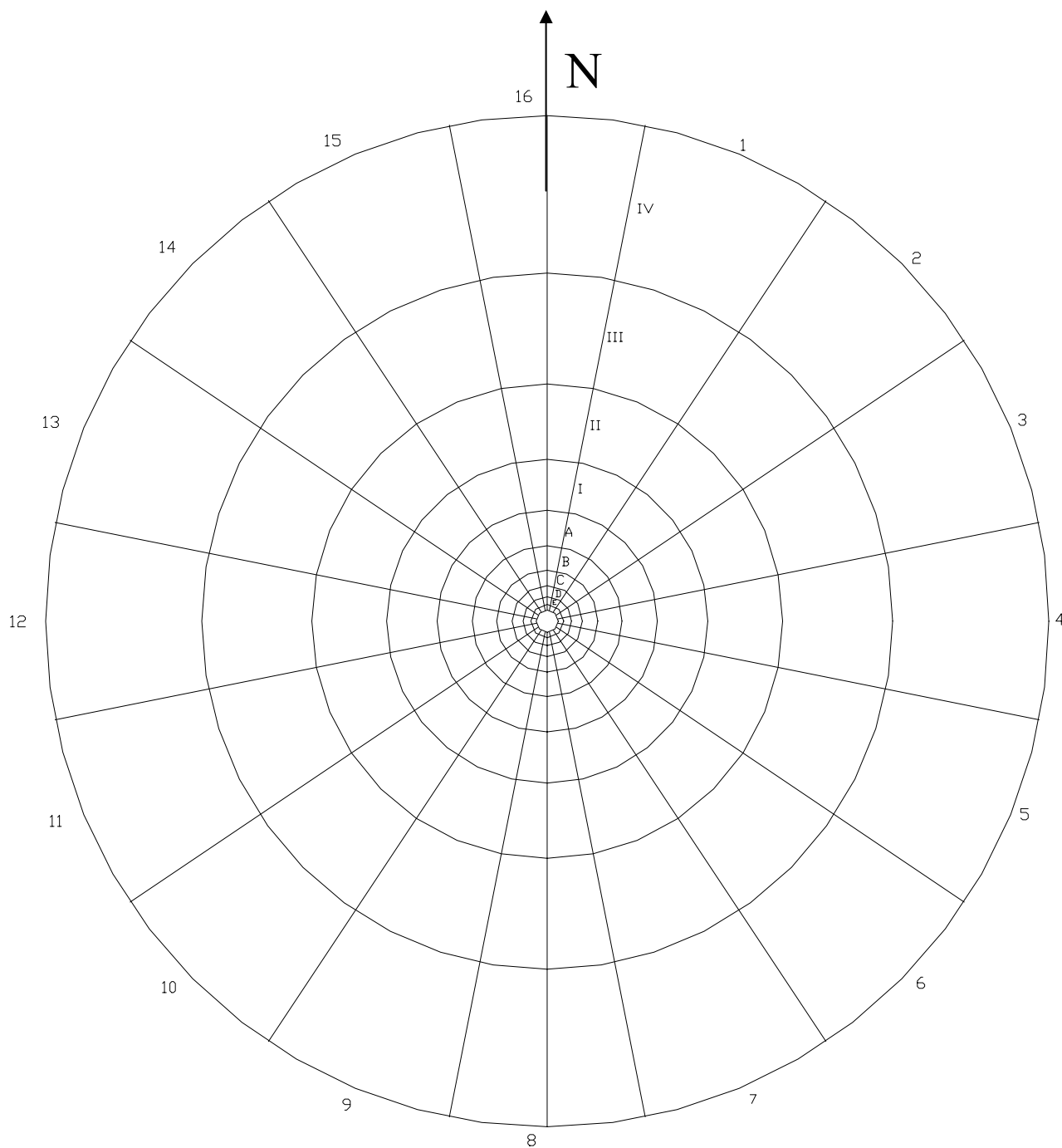
160

$r$ , км	0-5	5-100	0-100
$\xi''$	0,377	11527	11,90
$\eta''$	0,045	0,563	0,061
$\zeta$ , м	0,092	2,448	2,54

Палетку снимал: Иванов В.В.  
 Вычислял: Петров И.И.  
 Дата: 15.04.2005



Вид палетки Еремеева для работы с водохранилищами



Радиусы зон палетки  $r_i$  в км

F	E	D	C	B	A	I	II	III	IV	
0,5	0,7	1,1	1,6	2,3	3,4	5,0	7,3	10,7	15,7	22,8

Таблица вычисления поправок в отметку нивелирного репера за ВГП, вызванные заполнением водохранилища

Номер сектора Номер зоны	Средняя глубина водохранилища в отсеке палетки $h_{jk}$ , м																$\sum_{k=1}^{16} h_{jk}$	Коэффициенты зоны $P_j = \frac{f \rho S_{jk}}{r_{jk}}$ м·с <sup>-2</sup>	$\sum_{k=1}^{16} \Delta V_{jk}$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16			
Ф																		$6,46 \cdot 10^{-6}$	
Е																		$9,43 \cdot 10^{-6}$	
Д																		$1,28 \cdot 10^{-5}$	
С																		$1,85 \cdot 10^{-5}$	
В																		$2,88 \cdot 10^{-5}$	
А																		$4,19 \cdot 10^{-5}$	
І																		$6,02 \cdot 10^{-5}$	
ІІ																		$8,91 \cdot 10^{-5}$	
ІІІ																		$1,31 \cdot 10^{-4}$	
ІV																		$1,86 \cdot 10^{-4}$	

## **8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ ГРАВИМЕТРИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ С РЕКОМЕНДАЦИЯМИ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ**

### **8.1. Общие указания**

В соответствии с учебным планом специальности «Геодезия» гравиметрию на заочном факультете изучают на V курсе. В конце лабораторно-экзаменационной сессии IV курса студент должен получить учебно-методический комплекс по гравиметрии с методическими указаниями к выполнению контрольной работы и прослушать установочную лекцию. Самостоятельное изучение курса завершается выполнением контрольной работы, которую необходимо выслать на проверку не позже, чем за месяц до начала лабораторно-экзаменационной сессии V курса.

Во время лабораторно-экзаменационной сессии V курса студенты прослушивают обзорный цикл лекций и выполняют 4 лабораторные работы. Студенты, успешно выполнившие лабораторные и контрольную работы, сдают зачет и экзамен по курсу.

При самостоятельном изучении курса и выполнении контрольной работы следует использовать учебник: Л.В. Огородова, Б.П. Шимбирев, А.П. Юзефович. Гравиметрия. – М.: Недра, 1978 и учебно-методический комплекс по гравиметрии. Соответствующие параграфы учебника и УМК даны в методических указаниях по каждому разделу программы.

### **8.2. Программа курса**

#### ***8.2.1. Введение***

Основные положения дисциплины. История гравиметрии. Тенденции и перспективы развития. Связь гравиметрии с геодезией. Роль курса в подготовке специалистов по геодезии

#### ***8.2.2. Гравитационное поле Земли***

8.2.2.1. Сила тяготения и ее потенциал. Основные виды потенциала силы тяготения и его свойства. Сила тяжести, центробежная сила. Их по-

тенциалы. Вторые производные потенциала силы тяжести. Изменения силы тяжести во времени.

8.2.2.2. Нормальное гравитационное поле. Способы выбора нормального потенциала силы тяжести. Теорема Клеро. Формулы определения нормальной силы тяжести. Вторые производные нормального потенциала силы тяжести.

8.2.2.3. Аномальное гравитационное поле. Аномалии силы тяжести и их природа. Косвенная интерполяция аномалий силы тяжести. Характеристики аномального гравитационного поля.

### ***8.2.3. Определение поверхности и гравитационного поля Земли по измерениям силы тяжести***

8.2.3.1. Исходные данные для определения поверхности и гравитационного поля Земли. Связь возмущающего потенциала с аномалиями силы тяжести, уклонением отвеса и аномалией высоты.

8.2.3.2. Задача Стокса и задача Молоденского. Формулы Стокса и Венинг-Мейнеса. Современная методика вычисления аномалий высот и уклонений отвеса.

### ***8.2.4. Измерения силы тяжести и вторых производных ее потенциала***

8.2.4.1. Методы измерения силы тяжести. Результаты современных абсолютных измерений силы тяжести. Относительные маятниковые измерения и их результаты.

8.2.4.2. Статистический метод определения силы тяжести. Основы теории статических гравиметров и их классификация. Смещение нуля-пункта. Влияние внешней среды на показания гравиметров.

8.2.4.3. Кварцевые астазированные гравиметры. Исследования.

8.2.4.4. Вариометрические измерения.

### ***8.2.5. Гравиметрическая съемка***

8.2.5.1. Мировая опорная гравиметрическая сеть. Государственные опорные сети. Полевые опорные и рядовые гравиметрические сети.

8.2.5.2. Виды гравиметрических съемок. Требования к проектированию гравиметрической съемки. Топографо-геодезическое обеспечение гравиметрической съемки.

8.2.5.3. Методика и математическая обработка результатов измерений. Уравнивание опорной сети.

8.2.5.4. Методика составления и точность построения гравиметрических карт.

8.2.5.5. Гравиметрическая изученность Земли.

### ***8.2.6. Применение гравиметрии в решении геодезических задач***

8.2.6.1. Определение сжатия Земли по результатам гравиметрических измерений.

8.2.6.2. Учет неоднородности гравитационного поля в результатах геодезических измерений.

8.2.6.3. Учет неоднородности гравитационного поля в инженерной геодезии.

8.2.6.4. Дифференциальный метод определения аномалий высот и уклонов отвеса по измерениям силы тяжести и вторых производных потенциала силы тяжести.

8.2.6.5. Влияние вариаций гравитационного поля на результаты повторных геодезических измерений.

8.2.6.6. Принципы расчета гравиметрической съемки при решении инженерно-геодезических задач.

### ***8.2.7. Примерный перечень лабораторных занятий***

Лабораторные работы по курсу способствуют закреплению теоретических знаний по гравиметрии и углублению понимания связи гравиметрии с решением геодезических задач. Они позволяют приобрести практические навыки работы с гравиметрами при производстве гравиметрической съемки, а также показывают необходимость учета влияния вариаций гравитационного поля Земли в результатах повторных геодезических измерений. Их примерный перечень следующий:

- Знакомство со статическими гравиметрами.

- Исследование уровней гравиметра. Установка гравиметра на минимум чувствительности к наклону.
- Исследование гравиметра на смещение нуля-пункта.
- Проложение и обработка гравиметрического рейса.
- Расчет точности определения координат гравиметрических пунктов.
- Определение аномалий силы тяжести с редуциями в свободном воздухе и Буге. Построение гравиметрической карты.
- Определение уклонений отвеса и высот квазигеоида в нулевом приближении (согласно решению Стокса). Вычисления поправок за уклонения отвеса в результаты геодезических измерений.
- Определение коэффициентов формулы распределения нормальной силы тяжести и сжатия уровенной поверхности по гравиметрическим данным.
- Вычисление поправок в результаты высокоточного нивелирования, вызванных колебаниями уровенных поверхностей вследствие заполнения водохранилища.

### **8.3. Рекомендуемая литература**

#### **Основная литература**

1. Огородова Л. В. Гравиметрия / Л. В. Огородова, В. И. Шимбирев, А. П. Юзефович. – М. : Недра, 1978. – 324 с.
2. Юзефович А. П. Гравиметрия / А. П. Юзефович, Л. В. Огородова. – М. : Недра, 1982. – 318 с.

#### **Дополнительная литература**

3. Грушинский Н. П. Введение в гравиметрию и гравиметрическую разведку. – М. : МГУ, 1961. – 206 с.
4. Грушинский Н. П. Теория фигуры Земли. – М. : Недра, 1976. – 512 с.
5. Закатов П. С. Курс высшей геодезии. – М. : Недра, 1976. – 510 с.
6. Веселов К. Е. Гравиметрическая съемка. – М. : Недра, 1986. – 312 с.
7. Бровар В. В. Гравитационное поле в задачах инженерной геодезии. – М. : Недра, 1983. – 112 с.
8. Вольфганг Торге. Гравиметрия. – М. : Мир, 1999. – 428 с.
9. Инструкция по развитию государственной гравиметрической сети СССР (фундаментальной и 1 класса), ГКИНП-04-122-88. – М., 1988.

10. Инструкция по гравиметрической разведке. – М. : Недра, 1975.
11. Шароглазова Г.А. Применение геодезических методов в геодинатике : учебное пособие для вузов. – Новополюцк : ПГУ, 2002 . – 162 с.

### **Научно-методические материалы**

12. Шароглазова Г.А. Методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу «Гравиметрия». – Новополюцк : НПИ, 1993. – 40 с.
13. Шаповалова. В.Г. Методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу «Гравиметрия». – Новополюцк : НПИ, 1988. – 16 с.
14. Методические указания, программа и контрольная работа № 1 по курсу «Гравиметрия» (для студентов V курса специальности «Прикладная геодезия»). – М. : МИИГАиК, 1983. – 40 с.
15. Гравиметры ГАГ-2, ГНУКВ, ГНУКС. Технические паспорта к гравиметрам.

## **8.4. Методические указания к изучению разделов программы**

### **8.4.1. Введение**

Гравиметрия – наука об измерении величин, характеризующих поле силы тяжести, об использовании их для изучения гравитационного поля, геологического строения, физических свойств Земли. Теоретической основой гравиметрии является закон всемирного тяготения.

Для геодезистов наиболее важен раздел гравиметрии, связанный с решением основной задачи геодезии: определением поверхности и гравитационного поля Земли и их изменений во времени. В решении этой задачи большую роль играют характеристики аномального гравитационного поля (особенно отклонения отвеса, аномалия высоты), позволяющие привести все геодезические измерения в единую систему геодезических координат. Эти характеристики находят по аномалиям силы тяжести, которые, в свою очередь, вычисляют по измерениям силы тяжести.

Литература: [2] , с. 4 – 6; раздел 1 настоящего УМК.

### **8.4.2. Гравитационное поле Земли**

Цель изучения раздела – знакомство с особенностями гравитационного поля Земли и с величинами, которые непосредственно измеряют. Ос-

новное внимание уделите свойствам потенциалов тяготения (притяжения) трех видов: точечной массы, простого слоя, объемных масс (они понадобятся для геодезического приложения) и особенно свойствам потенциала силы тяжести. Потенциал силы тяжести – это сумма потенциала тяготения всех масс Земли и потенциала центробежной силы, вызванного суточным вращением Земли. Если известен потенциал, то можно найти любой другой элемент гравитационного поля. Например, дифференцирование потенциала силы тяжести позволяет найти проекцию силы тяжести на любое направление, вторые производные этого потенциала – градиенты силы тяжести и градиенты кривизны уровенной поверхности. Изучите связь вторых производных потенциала с кривизной силовой линии и с кривизной уровенной поверхности.

При изучении гравитационного поля Земли принято выделять из потенциала силы тяжести большую по величине и более правильную часть, которую называют нормальным потенциалом. Разность действительного и нормального потенциалов, называемая возмущающим потенциалом, представляет аномальную часть гравитационного поля. Нужно знать два способа выбора нормального потенциала (с помощью разложения реального потенциала силы тяжести в ряд с удержанием первых членов разложения и решения проблемы Стокса для эллипсоида вращения) и преимущества второго способа.

При изучении аномалий силы тяжести можно ограничиться аномалиями в свободном воздухе, аномалиями Буге, Фая и топографическими.

Литература: [1], § 1 – 7, 9, 47, 49, 50, 54, 56;

[2], § 1 – 3; разделы 2.1 – 2.3 настоящего УМК.

### ***8.4.3. Определение поверхности и гравитационного поля Земли по измерениям силы тяжести***

Этот раздел является одним из самых сложных разделов программы, поэтому ему уделяется значительное время на лекциях во время лабораторно-экзаменационной сессии. При самостоятельном изучении раздела надо понять основы метода определения поверхности и гравитационного поля Земли и то, что исходными данными являются только величины, измеренные на поверхности Земли. Основным элементом аномального поля является возмущающий потенциал. Поэтому в первую очередь его необходимо связать с искомыми величинами (составляющими отклонения отвеса и



аномалией высоты). Далее находят возмущающий потенциал как функцию, обладающую всеми свойствами потенциала тяготения. Чтобы решение было однозначным, составляют краевое (граничное) условие, которому возмущающий потенциал должен удовлетворять на поверхности Земли. Это условие связывает искомый возмущающий потенциал в любой точке поверхности с величинами, определяемыми из наблюдений, – со смешанными аномалиями силы тяжести.

Изучите составление краевого условия для физической поверхности Земли и для сферической отсчетной поверхности. Затем ознакомьтесь с выводом формулы Стокса для возмущающего потенциала для сферической и для плоской отсчетных поверхностей. Формула Стокса является решением задачи об определении возмущающего потенциала. Усвойте переход от формулы Стокса к формуле для вычисления аномалии высоты и к формулам Венинг-Мейнеса для вычисления составляющих уклонения отвеса по аномалиям силы тяжести.

Определение возмущающего потенциала означает определение и гравитационного поля, и поверхности Земли, то есть геодезических координат опорных точек.

Литература: [1] , § 46, 51 – 53, 57 – 60; раздел 3 настоящего УМК.

#### ***8.4.4. Измерения силы тяжести и вторых производных ее потенциала***

Необходимо изучить методы измерения силы тяжести: динамические (баллистический, маятниковый, струнный) и статический; современную роль каждого метода. При изучении абсолютных измерений силы тяжести достаточно усвоить принципиальную сложность маятниковых абсолютных измерений, вариант баллистического метода, схему баллистического прибора, источники ошибок, преимущества баллистического метода. Надо четко представлять себе роль современных абсолютных измерений в мировой гравиметрической съемке: они задают и контролируют масштаб гравиметрической сети, а регулярные измерения на специальных станциях позволяют получать независимые данные об изменениях силы тяжести во времени.

Маятниковый относительный метод в настоящее время применяют, главным образом, для создания опорных сетей 1 и 2 классов и эталонных гравиметрических полигонов. Достаточно изучить основы этого метода, принцип измерения периода и амплитуды колебаний маятника, поправки в

период колебаний и источники ошибок, устройство маятникового прибора Агат ЦНИИГАиК, результаты современных маятниковых измерений.

Основное внимание уделите статическому методу: теории и устройству кварцевых астазированных гравиметров, получивших наибольшее распространение, их исследованиям, а также основным источникам ошибок (смещению нуля-пункта, влиянию внешних условий, ошибкам постоянных гравиметра).

При измерениях на море главными источниками ошибок являются: неравномерное движение основания из-за волнения моря (возмущающие ускорения с периодом 4 – 10 с и амплитудой до 100 – 200 Гал), наклоны и дополнительное ускорение (эффект Этвеша), зависящее от скорости и азимута движения судна. Влияние вертикальных возмущающих ускорений в морских гравиметрах устраняют частотной фильтрацией, а влияние горизонтальных ускорений и наклонов – установкой прибора на гиростабилизированном основании. Для учета эффекта Этвеша требуется весьма точное для морских условий определение координат судна, при детальной съемке шельфа широко применяют донные гравиметры, точность которых сопоставима с точностью измерений на суше.

В этом разделе главным является: условия измерений на море, амплитудно-частотный состав помех, принцип сильнодемпфированного гравиметра, поправки в его показания, автоматизация измерений, навигационное обеспечение морской съемки.

В разделе об измерении вторых производных потенциала силы тяжести основное внимание уделите связи положения крутильных весов с величинами вторых производных, составу измерений для вычисления горизонтальных градиентов силы тяжести и градиентов кривизны уровенной поверхности, влиянию рельефа.

Литература: [1], § 10 – 38, 40 – 45;

[2], § 4 – 20, 22 – 23, 26 – 33, 35, 37, 39 – 44, 46, 50 – 52;  
раздел 4 настоящего УМК.

#### ***8.4.5. Гравиметрическая съемка***

Гравиметрическую съемку разделяют на опорную сеть и на рядовую съемку. Мировая опорная гравиметрическая сеть (МГГС-71) образована и уравнена на основании абсолютных измерений в 8 пунктах и многочислен-

ных (25000) маятниковых и гравиметровых связей. Наряду с системой МГГС-71 применяется и Потсдамская система, в основе которой лежит абсолютное маятниковое определение в Потсдаме (1898 – 1904). Окончательное значение поправки в Потсдамскую систему получено из анализа относительных и новейших абсолютных измерений на пунктах Мировой сети.

В СССР и в других государствах созданы опорные сети разных классов ([2], § 70) и местные сети.

При изучении раздела «ошибки аномалий силы тяжести» следует отличать ошибки, связанные с дискретностью гравиметрической съемки, от ошибок измерения силы тяжести и ошибок координат.

Литература: [1], § 62 – 70;

[2], § 68 – 77; раздел 5 настоящего УМК.

#### ***8.4.6. Применение гравиметрии в геодезии***

Геодезические приборы на полевых пунктах ориентируют по отвесам и уровням, и потому их вертикальные оси совпадают с направлением отвесной линии. Обработку наблюдений обычно выполняют, полагая, что вертикальные оси приборов на разных пунктах района работ строго параллельны. Если же изменения уклонов отвеса велики, то их необходимо учитывать, особенно в инженерно-геодезических сетях, для которых характерны очень высокие требования к точности и значительные наклоны сторон. Влияние уклонов отвеса на измеряемые величины (редукционная задача) рассматривается в курсе высшей геодезии. Поэтому при изучении настоящего раздела главное внимание уделите методам вычисления уклонов отвеса по гравиметрическим и топографическим данным, расчету гравиметрической съемки, предназначенной для вычисления местных уклонов отвеса.

Литература: [1], с. 295 – 296, § 72 – 75:

[2], § 11; раздел 6 настоящего УМК.

### **8.5. Контрольная работа № 1.**

#### **Методические указания к выполнению контрольной работы**

Контрольная работа состоит из трех заданий, которые составлены по темам первых четырех разделов программы. Поэтому выполнение контрольной работы следует начинать только после тщательной проработки этих разделов.

## ЗАДАНИЕ 1

Вычислить аномалии в свободном воздухе и аномалии Буге для точек, расположенных: 1) на поверхности Земли в равнинном районе; 2) на поверхности Земли в горном районе; 3) на поверхности моря; 4) на дне моря; 5) над Землей; 6) в скважине.

*Цель задания:* ознакомиться с методами вычисления аномалий силы тяжести по наблюдениям в различных условиях и получить представление о величине аномалий на Земле.

### *Указания к выполнению задания*

Выполнение задания начинайте с изучения § 54 учебника [1] и раздела 2.3.1 УМК.

#### *1. Вычисление аномалий в свободном воздухе*

При вычислении аномалий нужно учитывать местоположение пункта наблюдения. В точках 1 и 2, расположенных на поверхности Земли, аномалию в свободном воздухе вычисляют по формуле

$$(g - \gamma)_{св.в} = g - (\gamma_0 + \Delta\gamma). \quad (8.1)$$

Здесь  $g$  – измеренное значение силы тяжести,  $\gamma_0$  – нормальная сила тяжести на поверхности нормального эллипсоида,  $\Delta\gamma$  – редукция в свободном воздухе. Значение  $\gamma_0$  можно вычислить по формуле Гельмерта (формула (2.41) УМК):

$$\gamma_0 = 978030(1 + 0,005302 \sin^2 B - 0,000007 \sin^2 2B) \quad (8.2)$$

или выбрать из табл. 1 прил. 8.2. Величину  $\Delta\gamma$ , которая называется поправкой за высоту в нормальное значение силы тяжести или редукцией в свободном воздухе, можно вычислить по формуле (VI.66) учебника [1]:

$$\Delta\gamma = -0,30855(1 + 0,00071 \cos 2B)H + 0,0723H^2 \cdot 10^{-6}. \quad (8.3)$$

Поправка получится в миллигалах, если значение  $H$  – в метрах. Поправку  $\Delta\gamma$  можно также выбирать из табл. 2 прил. 8.2.

Для точки 3, расположенной на поверхности моря, поправка  $\Delta\gamma$  равна нулю, так как в этом случае нормальная высота точки наблюдения равна нулю. Аномалия в свободном воздухе в точке 3 равна

$$(g - \gamma)_{св.в} = g - \gamma_0. \quad (8.4)$$

Точка 4 расположена ниже уровня моря, высота ее отрицательная. Поправка  $\Delta\gamma$  в этом случае будет положительная, под высотой  $H$  в формуле (8.3) следует понимать глубину моря. Чтобы получить аномалию на поверхности моря, нужно учесть притяжение  $\Delta_1g$  слоя морской воды, находящегося выше точки наблюдения:

$$\Delta_1g = 0,08387\delta_{\text{м.в.}}h = 0,0864h \text{ (мГал)}. \quad (8.5)$$

Глубину  $h$  следует брать в метрах;  $\delta_{\text{м.в.}} = 1,03 \text{ г/см}^3$  – плотность морской воды.

Аномалия в точке 4 вычисляется по формуле

$$(g - \gamma)_{\text{св.в.}} = g - (\gamma_0 + \Delta\gamma) + \Delta_1g. \quad (8.6)$$

Для точки 5 высота складывается из нормальной высоты  $H^\gamma$  и высоты самолета над физической поверхностью Земли. При вычислении поправки  $\Delta\gamma$  в формуле (8.3) в качестве  $H$  нужно использовать значение  $H^\gamma + h$ .

Аномалия в свободном воздухе в точке 5 вычисляется по формуле (8.1).

Точка 6 расположена в скважине, высота ее над отсчетной поверхностью равна  $H^\gamma - h$ , где  $h$  – глубина скважины. Это значение и следует использовать при вычислении поправки  $\Delta\gamma$ . Чтобы получить аномалию не в точке наблюдения, а на физической поверхности Земли, нужно учесть притяжение  $\Delta_1g$  слоя толщиной  $h$ , расположенного выше точки наблюдения:

$$\Delta_1g = 0,08387\delta \cdot h,$$

где  $\delta$  – плотность горных пород. Аномалию в точке 6 вычисляют по формуле (8.6).

Таблица 8.1

Пример вычисления аномалий в свободном воздухе

	$B$	$H^\gamma, \text{м}$	$h, \text{м}$	$H^\gamma + h, \text{м}$	$g, \text{мГал}$	$\gamma_0, \text{мГал}$	$\Delta\gamma, \text{мГал}$	$\gamma, \text{мГал}$	$\Delta_1g, \text{мГал}$	$(g - \gamma)_{\text{св.в.}}, \text{мГал}$
1	52°13'	5	0	5	981274,8	981262,6	-1,5	981261,1		+13,7
2	36 48	384	0	384	979851,0	979884,4	-118,5	979765,9		+85,1
3	4 22	0	-3820*	0	978072,8	978059,9	0			+12,9
4	25 45	0	-125	-125	979069,3	979004,6	+38,6	979043,2	+10,7	+36,8
5	67 17	143	500	643	982192,7	982438,8	-198,2	982240,6		-47,9
6	48 50	125	-40	85	980924,7	980961,9	-26,2	980935,7	+9,0**	-2,0

\* – 3820 м – глубина моря;

\*\* – поправка  $\Delta_1g$  вычислена для плотности  $2,67 \text{ г/см}^3$ .

## 2. Вычисление аномалий Буге

При вычислении аномалий Буге следует различать два случая:

а) точка наблюдения расположена на суше; б) точка наблюдения расположена на море. В первом случае для точек 1, 2 и 5, 6 аномалию Буге вычисляют по формуле

$$(g - \gamma)_B = (g - \gamma)_{св.в.} + \Delta_2 g. \quad (8.7)$$

Поправка  $\Delta_2 g$  учитывает притяжение топографических масс, расположенных между уровнем моря и физической поверхностью Земли, принимаемой за плоскость, и называется поправкой за промежуточный слой. Эта поправка равна

$$\Delta_2 g = -0,0419 \delta H.$$

Поправку  $\Delta_2 g$  можно вычислить по этой формуле или выбрать из табл. 3 прил. 8.2.

Если точка расположена на поверхности моря, то при вычислении аномалии Буге учитывается эффект масс, обусловленный тем, что плотность морской воды меньше средней плотности земной коры. Притяжение  $\Delta_2 g$  масс, дополняющих плотность морской воды до средней плотности пород, равно

$$\Delta_2 g = 0,0419(2,67 - 1,03)h = 0,0687h. \quad (8.8)$$

Эта поправка всегда положительна;  $h$  – глубина моря. Поправку  $\Delta_2 g$  можно вычислить по формуле (8.8) или выбрать из таблицы 3а прил. 8.2. Аномалия Буге для точек 3, 4 также вычисляется по формуле (8.7).

Таблица 8.2

### Пример вычислений аномалий Буге

	$H'(h), \text{ м}$	$\delta, \text{ г/см}^3$	$(g - \gamma)_{св.в.}, \text{ мГал}$	$\Delta_2 g, \text{ мГал}$	$(g - \gamma)_B, \text{ мГал}$
1	5	2,67	+13,7	-5,6	+8,1
2	384		+85,1	-43,0	+42,1
3	-3820		+12,9	+262,4	+275,3
4	-125		+36,8	+8,6	+45,4
5	143		-47,9	-16,0	-63,9
6	125		-2,0	-14,0	-16,0

## ЗАДАНИЕ 2

Определить коэффициенты формулы распределения нормальной силы тяжести и сжатие уровенной поверхности.

*Цель задания:* практическое знакомство с методом определения сжатия уровенной поверхности по измерениям силы тяжести.

Литература: [1], § 47; раздел 6.1 УМК.

### *Указания к выполнению задания*

Изменение силы тяжести  $\gamma_0$  на поверхности уровенного эллипсоида описывается выражением

$$\gamma_0 = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B). \quad (8.9)$$

Коэффициенты этой формулы  $\gamma_e, \beta, \beta_1$  относятся к так называемым фундаментальным геодезическим постоянным:  $\gamma_e$  – значение нормальной силы тяжести на экваторе,  $\beta$  – коэффициент порядка сжатия. Коэффициент  $\beta_1$  относится к постоянным высших порядков, которые уверенно определяются при задании параметров нулевого порядка и порядка сжатия. В формуле (8.9) коэффициент  $\beta_1$  будем считать равным 0,000 007. Таким образом, в формулу (8.9) входят два неизвестных коэффициента:  $\gamma_e$  и  $\beta$ . Для их определения нужно иметь значения  $\gamma_0$  в двух точках. Но так как нормальную силу тяжести нельзя получить по результатам измерений, то для нахождения неизвестных  $\gamma_e$  и  $\beta$  используют измерения действительной силы тяжести в точках поверхности Земли. На основании формулы (8.6) можно выразить  $\gamma_0$  через результаты измерений:

$$\gamma_0 = g - \Delta\gamma + \Delta_1 g - (g - \gamma)_{св.в.}$$

Подставляя это выражение в (8.9), можно написать

$$\gamma_e + \gamma_e \beta \sin^2 B - (g - \Delta\gamma + \Delta_1 g + \gamma_e \beta_1 \sin^2 2B) = -(g - \gamma)_{св.в.} \quad (8.10)$$

Введем обозначения:

$$x = \gamma_e - 978\,000, \quad y = \gamma_e \beta, \quad b = \sin^2 B, \quad v = -(g - \gamma)_{св.в.}, \\ l = -(g - \Delta\gamma + \Delta_1 g + \gamma_e \beta_1 \sin^2 2B) + 978\,000.$$

Тогда уравнение (8.10) примет вид

$$x + b \cdot y + l = v. \quad (8.11)$$

Уравнения (8.11) рассматривают как уравнения погрешностей; их число равно числу точек с измеренными значениями силы тяжести. Неиз-

вестные  $x$  и  $y$  определяют под условием  $[v] = \min$  из решения системы нормальных уравнений

$$\begin{aligned} nx + [b]y + [l] &= 0, \\ [b]x + [bb]y + [bl] &= 0, \end{aligned} \quad (8.12)$$

где  $n$  – число измерений.

После решения системы (8.12) находим определяемые коэффициенты  $\gamma_e = x + 978\,000$  мГал,  $\beta = y/\gamma_e$ . Для определения сжатия можно воспользоваться теоремой Клеро:

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2}q, \text{ откуда } \alpha = \frac{5}{2}q - \beta.$$

Параметр  $q$ , равен отношению центробежной силы  $\omega^2 a$  на экваторе к силе тяжести  $\gamma_e$  на экваторе; для  $a = 6\,378,2$  км,  $\omega^2 = 53,175 \cdot 10^{-10}$  (рад/с)<sup>2</sup>,  $\gamma_e = 978,0$  гал, параметр  $q$  равен 0,003468.

Таблица 8.3

#### Пример вычислений

	$B$	$g - 978000$ , мГал	$-\Delta\gamma - \Delta_1 g$ , мГал	$\gamma_e \beta_1 \sin^2 2B$ , мГал	$l$ , мГал	$\gamma_e \beta$ , мГал	$v$ , мГал	$b$
1	52°13'	3 275	+2	+6*	-3283	3189	-13	0,62463
2	36 48	1 851	+118	+6	-1975	1832	-62	0,35883
3	4 22	73	0	0	-73	30	+38	0,00580
4	25 45	1 069	-28	+4	-1045	964	0	0,18874
5	67 17	4 193	+193	+4	-4395	4344	+30	0,85087
6	48 50	2 925	+35	+7	-2967	2894	+8	0,56670
				$[l]$	-13738	$[v]$	+1	

\* – Поправку  $\gamma_e \beta_1 \sin^2 2B$  можно выбрать из табл. 4 прил. 8.2.

#### Решение нормальных уравнений

Составим определитель  $D$  системы (8.12):

$$D = \begin{vmatrix} n & [b] \\ [b] & [bb] \end{vmatrix} = n[bb] - [b][b].$$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 2,59557 \\ 2,59557 & 1,59967 \end{vmatrix} = 2,86105.$$

Неизвестные  $x$  и  $y$ , а также их весовые коэффициенты находят по формулам  $D_i/D$ , где  $D_i$  – определитель соответствующей величины. Имеем



$$D_x = \begin{vmatrix} -[l] & [b] \\ -[bl] & [bb] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13738 & 2,59557 \\ 8878 & 1,59967 \end{vmatrix}; \quad x = \frac{D_x}{D} = 80,6 \text{ мГал};$$

$$\gamma_e = 978081 \text{ мГал};$$

$$D_y = \begin{vmatrix} n & -[l] \\ [b] & -[b \cdot l] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 13738 \\ 2,59557 & 8378 \end{vmatrix}; \quad y = \frac{D_y}{D} = 5106 \text{ мГал};$$

$$\beta = y/\gamma_e = 0,005220;$$

$$\alpha = 0,003450; \quad 1:\alpha = 290.$$

Оценка точности

$$\mu = \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}} = 40 \text{ мГал},$$

$$D_{p_x} = \begin{vmatrix} 1 & [b] \\ 0 & [bb] \end{vmatrix} = [bb] = 1,59967; \quad \frac{1}{p_x} = \frac{D_{p_x}}{D} = 0,559;$$

$$m_{\gamma_e} = \frac{\mu}{\sqrt{p_x}} = 30 \text{ мГал};$$

$$D_{p_y} = \begin{vmatrix} n & 0 \\ [b] & 1 \end{vmatrix} = n = 6; \quad \frac{1}{p_y} = \frac{D_{p_y}}{D} = 2,097;$$

$$m_{\gamma_e \beta} = \frac{\mu}{\sqrt{p_y}} = 58 \text{ мГал}; \quad m_{\beta} = \frac{m_{\gamma_e \beta}}{\gamma_e} = 0,000059;$$

$$m_{1/\alpha} = \frac{m_{\beta}}{\alpha^2} = 5.$$

Сводка результатов вычислений:

$$\gamma_e = 978081 \pm 30 \text{ мГал};$$

$$\beta = 0,005220 \pm 0,000059;$$

$$1:\alpha = 290 \pm 5.$$

Проведите анализ полученных результатов в следующем порядке:

1. Сравните полученные значения  $\gamma_e, \beta, \alpha$  с современными значениями этих величин. Для сравнения используйте постоянные, соответствующие референц-системе 1980 г.:

$$\gamma_e = 978032,7 \text{ мГал}; \quad \beta = 0,005302; \quad 1:\alpha = 298,257.$$

Объясните, почему полученные Вами коэффициенты отличаются от приведенных. Для составления обоснованного ответа следует внимательно прочесть § 43 – 48 и § 16 (с. 86 – 87) учебника [1]; разделы 2.2, 2.3, 6.1 УМК.

2. Сравните аномалии силы тяжести, вычисленные в заданиях 1 и 2.

№ точки	Задание 1 ( $g-\gamma$ ) <sub>св.в.</sub> , мГал	Задание 2 - $\nu$ , мГал	Разность, мГал
1	+14	+13	+1
2	+85	+62	+23
3	+13	-38	+51
4	+37	0	+37
5	-48	-30	-18
6	-2	-8	+6

Почему аномалии не совпадают? Почему аномалии в задании 2 меньше? Можно ли по значениям аномалий силы тяжести, полученным в задании 1, сделать предположение об ожидаемой величине постоянной  $\gamma_e$  (будет ли она меньше или больше точного значения)? Напишите формулу для вычисления разности аномалий в заданиях 1 и 2, используя формулу (8.2) и полученные Вами значения  $\gamma_e$ ,  $\beta$ .

### ЗАДАНИЕ 3. Расчет точности определения координат гравиметрических пунктов

Внимательно прочитайте раздел 5.2.3 УМК. Для одной строки табл. 5.2 или 5.3 приведите обоснование рекомендуемых средних квадратических ошибок плановых координат и высот гравиметрических пунктов и плотности гравиметрической съемки. Исходные данные выбрать из таблиц 5.2 и 5.3 в соответствии с шифром.

Последние цифры шифра	Таблица	Масштаб	Последние цифры шифра	Таблица	Масштаб
1 - 7	5.2	1:500000	53 - 59	5.3	1:500000
8 - 15	5.2	1:200000	60 - 66	5.3	1:200000
16 - 22	5.2	1:100000	67 - 73	5.3	1:100000
23 - 28*	5.2	1:50000	74 - 80*	5.3	1:50000
29 - 37*	5.2	1:25000	81 - 86*	5.3	1:25000
38 - 44*	5.2	1:10000	87 - 93	5.3	1:10000
45 - 52*	5.2	1:5000	94 - 100	5.3	1:5000

\* – можно выбирать любую строку для этого масштаба

Исходные данные для выполнения заданий 1 и 2

Вариант		<i>B</i>	<i>H</i> , м	<i>h</i> , м	<i>g</i> , мГал	Вариант		<i>B</i>	<i>H</i> , м	<i>h</i> , м	<i>g</i> , мГал
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>1</b>	1	37°54'	19		980059,5	<b>2</b>	1	50°53'	215		981180,9
	2	44 11	873		980345,2		2	44 10	629		980397,6
	3	67 31	0	385	982428,1		3	67 32	0	3650	982356,7
	4	27 20	0	13	979261,5		4	35 32	0	216	979894,2
	5	42 38	93	100	980421,8		5	42 37	91	100	980426,0
	6	8 58	7	10	978242,1		6	12 08	131	11	978283,3
<b>3</b>	1	67 17	13		982386,8	<b>4</b>	1	70 40	16		982631,7
	2	44 06	643		980380,4		2	44 02	488		980387,3
	3	70 20	0	819	982777,7		3	67 36	0	940	982421,2
	4	35 54	0	10	979823,8		4	35 34	0	27	979823,5
	5	42 35	88	100	980381,6		5	42 34	92	100	980418,8
	6	16 31	3519	12	977467,3		6	0 13	2815	13	977913,4
<b>5</b>	1	52 06	5		981269,0	<b>6</b>	1	52 13	25		981267,6
	2	10 30	1042		978039,8		2	4 38	2592		977405,4
	3	67 37	0	4160	982469,2		3	67 38	0	4091	982483,5
	4	37 49	0	58	979992,4		4	39 17	0	72	980142,8
	5	42 34	86	100	980421,9		5	42 35	86	100	980417,3
	6	43 59	807	14	980269,1		6	43 57	808	15	980345,1
<b>7</b>	1	55 45	44		981558,2	<b>8</b>	1	38 43	76		980089,6
	2	43 56	1610		980007,3		2	1 15	1636		977540,0
	3	67 39	0	891	982548,8		3	64 37	0	5011	982267,2
	4	39 38	0	99	980225,4		4	40 01	0	245	980264,2
	5	42 38	85	100	980313,9		5	42 34	92	100	980320,5
	6	1 23	27	16	978029,1		6	43 54	823	21	980293,3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>9</b>	1	69 58	27		982621,5	<b>10</b>	1	59 55	31		981926,7
	2	43 49	829		980219,4		2	4 22	439		977924,6
	3	67 46	0	4076	982495,7		3	67 47	0	4206	982499,9
	4	41 36	0	73	980363,2		4	46 58	0	135	980878,0
	5	42 28	5	100	980409,6		5	42 30	10	100	980419,4
	6	4 22	450	18	977915,2		6	43 46	202	19	980399,3
<b>11</b>	1	48 50	66		980940,6	<b>12</b>	1	52 23	86		981274,1
	2	43 46	876		980285,3		2	43 46	1429		980170,1
	3	67 47	0	1396	982412,2		3	67 47	0	4179	982442,4
	4	50 22	0	125	981189,8		4	4 48	0	45	978094,5
	5	42 31	22	100	980420,4		5	42 33	52	100	980415,3
	6	5 37	10	20	978105,9		6	1 19	19	21	978081,8
<b>13</b>	1	64 08	8		982278,4	<b>14</b>	1	41 54	45		980364,3
	2	43 39	81		980422,9		2	43 34	1470		980105,4
	3	67 48	0	4316	982496,3		3	67 49	0	3730	982465,4
	4	7 48	0	55	978163,8		4	9 20	0	80	978179,7
	5	42 34	135	100	980319,3		5	42 34	75	100	980418,1
	6	6 49	7	22	978132,0		6	35 02	61	23	979722,2
<b>15</b>	1	59 21	45		981846,7	<b>16</b>	1	51 25	9		981195,5
	2	43 32	1213		980177,4		2	43 34	355		980359,8
	3	67 49	0	3970	982544,1		3	67 50	0	3846	982502,3
	4	12 48	0	135	978318,2		4	14 41	0	20	978400,3
	5	42 32	183	100	980271,1		5	43 33	350	150	980360,5
	6	69 58	27	24	982623,7		6	69 26	150	25	982604,5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>17</b>	1	50 04	96		981061,4	<b>18</b>	1	60 10	20		981915,3
	2	4 22	450		977926,9		2	43 28	2348		978801,6
	3	67 51	0	4476	982499,4		3	67 55	0	1800	982501,7
	4	16 46	0	33	978461,2		4	17 56	0	120	978556,5
	5	43 36	352	150	980454,8		5	43 34	351	150	980465,4
	6	43 29	253	16	980360,7		6	1 23	11	27	978036,5
<b>19</b>	1	55 55	129		981584,2	<b>20</b>	1	37 41	141		979875,6
	2	43 18	3210		979473,1		2	43 36	502		980369,9
	3	67 59	0	3712	982508,6		3	68 06	0	2629	982481,5
	4	19 09	0	250	978639,4		4	35 59	0	140	979961,8
	5	43 35	351	150	980465,5		5	43 18	76	110	980353,3
	6	6 56	7	28	978098,5		6	8 58	7	30	978241,1
<b>21</b>	1	43 23	7		980509,2	<b>22</b>	1	47 47	35		979978,0
	2	43 17	1577		980067,0		2	43 16	1848		979882,5
	3	68 09	0	4540	982535,1		3	68 09	0	1900	982510,8
	4	27 36	0	100	979161,6		4	22 25	0	18	978861,2
	5	35 15	34	200	979729,2		5	35 13	198	200	979712,5
	6	9 58	3	31	978169,7		6	1 19	19	32	978081,3
<b>23</b>	1	33 53	30		979686,4	<b>24</b>	1	14 24	5		978385,5
	2	43 16	1741		979951,7		2	43 07	911		980165,3
	3	68 12	0	1930	982530,4		3	68 16	0	1710	982513,8
	4	35 13	0	50	979586,1		4	42 06	0	30	980392,7
	5	35 13	258	200	979586,1		5	35 13	378	200	979551,1
	6	69 14	15	33	982577,7		6	6 56	7	34	978140,5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>25</b>	1	12 20	23		978314,2	<b>26</b>	1	61 15	48		981940,0
	2	43 16	346		980315,5		2	43 03	1419		980021,7
	3	67 01	0	1840	982523,4		3	68 17	0	3920	982492,3
	4	20 21	0	55	978689,8		4	5 44	0	45	978094,1
	5	43 35	251	250	980470,3		5	35 14	673	200	979609,9
	6	8 30	4	29	978122,2		6	25 55	22	37	979051,3
<b>27</b>	1	1 23	11		978037,6	<b>28</b>	1	34 34	8		979705,3
	2	43 03	633		980232,1		2	43 03	679		980233,5
	3	68 20	0	2430	982519,8		3	68 22	0	1590	982551,5
	4	34 36	0	55	979711,4		4	6 52	0	56	978107,4
	5	35 13	802	200	979408,3		5	35 13	844	200	979467,3
	6	67 42	215	38	982422,5		6	67 40	48	39	982468,1
<b>29</b>	1	38 54	1		980119,4	<b>30</b>	1	22 20	1		978803,9
	2	35 13	1058		979565,7		2	35 12	955		979590,8
	3	68 23	0	1650	982531,5		3	68 33	0	1985	982531,4
	4	8 07	0	20	978174,7		4	9 18	0	49	978242,2
	5	3 18	153	250	980300,4		5	43 00	157	400	980215,7
	6	67 35	175	40	982432,5		6	66 58	150	41	982459,7
<b>31</b>	1	40 38	5		980227,4	<b>32</b>	1	45 24	83		980622,5
	2	43 00	1722		979960,1		2	35 12	918		979600,2
	3	68 33	0	2660	982508,7		3	68 33	0	4375	982575,7
	4	10 07	0	65	978208,3		4	11 12	0	70	978257,2
	5	35 12	726	200	979599,4		5	43 00	219	200	980302,5
	6	21 16	120	42	978660,1		6	14 24	5	43	978385,5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>33</b>	1	12 20	23		978314,5	<b>34</b>	1	8 58	7		978242,4
	2	43 03	1047		980108,3		2	43 00	1714		979932,2
	3	68 17	0	2600	982425,7		3	68 38	0	3215	982506,7
	4	4 55	0	33	978078,0		4	32 35	0	75	979570,9
	5	35 14	614	200	979621,2		5	35 11	722	200	979598,2
	6	67 36	6	36	982486,3		6	19 20	2268	44	977940,2
<b>35</b>	1	22 54	28		978805,1	<b>36</b>	1	37 46	1		979987,5
	2	42 48	1219		980059,4		2	42 47	1548		979986,3
	3	68 44	0	2740	982708,4		3	68 46	0	1855	982523,8
	4	32 53	0	80	979527,6		4	21 27	0	150	978779,6
	5	32 10	890	200	979481,7		5	35 11	986	200	979541,5
	6	4 22	430	25	977927,4		6	1 22	46	11	978022,2
<b>37</b>	1	15 20	2		978320,6	<b>38</b>	1	29 53	3		979291,4
	2	42 46	1139		980097,5		2	35 11	1043		979590,5
	3	68 51	0	1050	982643,3		3	68 52	0	2290	982517,1
	4	34 35	0	85	979668,1		4	12 21	0	89	978303,8
	5	35 11	858	200	979573,8		5	42 43	66	200	986386,0
	6	29 56	10	47	979305,8		6	33 54	10	48	979654,3
<b>39</b>	1	33 53	53		979690,9	<b>40</b>	1	22 16	3		978767,4
	2	42 43	1333		980029,3		2	42 42	2831		979553,0
	3	68 54	0	2022	982552,2		3	68 57	0	3300	982560,1
	4	13 42	0	95	978375,5		4	14 46	0	100	978388,5
	5	35 10	586	200	979633,3		5	35 10	528	200	979650,7
	6	6 57	32	10	978144,4		6	8 58	7	55	978252,5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>41</b>	1	1 19	19		978082,4	<b>42</b>	1	33 57	38		979648,3
	2	42 32	1190		980056,7		2	35 12	842		979614,5
	3	69 08	0	4036	982591,8		3	68 16	0	2662	982466,4
	4	31 37	0	130	979545,5		4	4 15	0	40	978120,8
	5	35 15	8	200	979729,1		5	43 02	64	200	980346,2
	6	28 37	214	57	979135,6		6	69 00	20	35	982544,3
<b>43</b>	1	25 55	22		979051,3	<b>44</b>	1	40 31	300		980228,0
	2	16 31	3519		977397,8		2	42 21	579		980218,3
	3	67 14	0	3270	982472,0		3	69 23	0	3080	982568,9
	4	38 38	0	70	980090,0		4	12 21	0	130	978313,5
	5	35 12	578	350	979584,3		5	35 17	500	300	979598,5
	6	5 21	200	25	978328,7		6	48 14	3	11	980819,1
<b>45</b>	1	69 58	27		982624,0	<b>46</b>	1	6 49	7		978132,5
	2	1 25	673		977832,5		2	42 00	708		980107,1
	3	65 29	0	1111	982367,3		3	65 41	0	2500	982434,4
	4	27 52	0	90	979289,1		4	28 55	0	85	979314,3
	5	35 09	560	250	979461,9		5	35 09	378	250	979649,2
	6	42 04	332	18	980169,0		6	40 25	401	50	980200,3
<b>47</b>	1	8 30	4		978122,5	<b>48</b>	1	9 58	3		978170,4
	2	42 59	578		980121,0		2	41 54	444		980172,9
	3	65 50	0	1460	982337,4		3	66 39	0	1076	982380,7
	4	28 55	0	80	979283,5		4	29 14	0	75	979275,3
	5	35 08	242	250	979682,7		5	35 08	111	250	979708,5
	6	40 26	401	45	980077,6		6	40 30	401	40	980207,5



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>49</b>	1	40 36	68		980286,3	<b>50</b>	1	61 15	48		981940,5
	2	42 24	1005		980073,5		2	0 13	2815		977278,2
	3	69 20	0	3300	982546,3		3	67 13	0	4413	982446,1
	4	11 12	0	135	978272,7		4	38 16	0	210	980113,8
	5	35 18	473	300	979599,5		5	35 12	510	350	979597,6
	6	22 54	29	29	978805,1		6	19 15	1320	11	978182,4
<b>51</b>	1	61 15	48		981940,7	<b>52</b>	1	15 20	10		978317,4
	2	19 20	2268		977941,5		2	42 06	893		980060,5
	3	8 58	0	3500	978142,2		3	65 18	0	1506	982422,2
	4	38 40	0	90	980097,3		4	26 57	0	95	979196,6
	5	35 12	647	350	979570,0		5	35 11	747	250	979576,0
	6	20 00	1540	36	978113,4		6	2 43	239	45	977976,1
<b>53</b>	1	19 16	93		978552,3	<b>54</b>	1	16 53	3		978499,9
	2	42 19	376		980223,1		2	42 21	1061		980066,4
	3	69 32	0	1945	982439,8		3	69 46	0	2900	982580,6
	4	23 36	0	125	978896,4		4	23 41	0	120	978912,5
	5	35 16	685	685	979561,4		5	35 15	767	300	979542,3
	6	48 37	20	20	980871,1		6	49 42	1754	15	980564,1
<b>55</b>	1	5 37	0		978106,0	<b>56</b>	1	14 24	5		978385,4
	2	35 15	1202		979320,3		2	42 14	1248		980027,1
	3	69 48	0	1017	982614,8		3	69 49	0	2140	982578,7
	4	24 46	0	115	979040,2		4	25 26	0	110	979094,9
	5	42 15	7	150	980275,1		5	35 16	810	300	979538,5
	6	56 21	4	20	981630,5		6	42 36	104	25	980390,2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>57</b>	1	18 55	6		978633,8	<b>58</b>	1	1 19	19		978082,3
	2	41 49	2008		979664,0		2	14 45	1684		979882,6
	3	66 57	0	1020	982444,3		3	66 44	0	1250	982363,1
	4	29 16	0	70	979456,7		4	29 26	0	65	979358,4
	5	35 06	19	250	979725,3		5	35 12	730	250	979390,2
	6	2 45	245	39	977963,5		6	40 26	401	38	980200,4
<b>59</b>	1	4 02	143		978014,2	<b>60</b>	1	4 20	74		978033,9
	2	41 46	855		980095,5		2	41 46	285		980193,7
	3	67 04	0	3875	982460,4		3	67 14	0	3270	982470,2
	4	29 50	0	60	979469,5		4	30 40	0	55	979526,0
	5	35 13	743	250	979380,1		5	35 13	736	250	979582,2
	6	77 53	12	37	982992,6		6	69 58	27	36	982624,8
<b>61</b>	1	4 26	65		978080,1	<b>62</b>	1	5 15	37		978080,2
	2	35 14	978		979481,4		2	35 14	1006		979576,9
	3	67 24	0	2780	982501,3		3	67 28	0	2750	982533,3
	4	31 17	0	55	979500,8		4	31 58	0	45	979575,4
	5	41 43	251	150	980178,5		5	41 44	347	150	980118,5
	6	70 40	16	36	982632,6		6	19 16	5	34	978624,0
<b>63</b>	1	5 12	49		978069,7	<b>64</b>	1	5 18	102		978025,7
	2	41 38	267		980142,3		2	35 15	911		979500,7
	3	67 31	0	3300	982545,5		3	67 33	0	3120	982538,0
	4	32 19	0	40	979591,2		4	32 25	0	35	979573,2
	5	35 15	683	250	979587,9		5	41 37	398	125	980151,0
	6	22 53	29	29	978804,0		6	26 12	755	32	978858,2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>65</b>	1	14 40	10		978491,6	<b>66</b>	1	1 23	11		978036,2
	2	42 11	1359		979997,9		2	35 11	1099		979556,1
	3	69 56	0	4184	982566,2		3	65 15	0	3450	982335,6
	4	25 30	0	405	979050,2		4	26 12	0	100	979109,5
	5	35 16	726	300	979566,3		5	42 07	11	150	980221,1
	6	42 46	7	30	980430,5		6	42 46	4	35	980430,3
<b>67</b>	1	5 43	78		978098,3	<b>68</b>	1	5 11	69		978063,6
	2	41 30	794		980058,2		2	41 27	2093		979771,0
	3	67 45	0	3280	982529,7		3	67 52	0	3395	982535,5
	4	34 30	0	25	979743,0		4	35 06	0	20	979775,4
	5	35 15	645	250	979604,3		5	35 15	536	250	979523,5
	6	15 20	100	30	978343,1		6	29 53	89	29	979318,0
<b>69</b>	1	5 11	75		978068,0	<b>70</b>	1	5 22	64		978061,3
	2	41 25	1717		979841,5		2	41 18	405		980116,8
	3	67 52	0	3265	982542,4		3	67 57	0	1975	982572,7
	4	36 03	0	1289	979887,0		4	36 05	0	299	979903,3
	5	35 15	471	250	979638,3		5	35 15	538	250	979474,7
	6	17 50	471	28	978456,6		6	15 36	380	27	978303,0
<b>71</b>	1	5 32	123		978076,3	<b>72</b>	1	8 58	36		978244,7
	2	35 15	1051		979573,1		2	35 15	1128		979553,1
	3	68 00	0	2360	982527,5		3	68 03	0	1690	982564,3
	4	37 34	0	210	980012,9		4	37 36	0	120	979995,8
	5	41 20	29	290	980157,4		5	41 12	0511	150	980099,0
	6	29 56	10	10	979306,6		6	24 54	25	25	978962,2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>73</b>	1	5 32	99		978090,1	<b>74</b>	1	6 51	4		978136,9
	2	41 38	1180		980034,2		2	26 12	1755		978448,7
	3	67 43	0	2025	982555,5		3	66 43	0	4710	982411,4
	4	33 03	0	30	979473,2		4	38 01	0	102	980022,5
	5	35 16	0638	250	979422,6		5	35 14	114	350	979673,3
	6	25 45	334	31	978939,3		6	33 02	48	18	979628,8
<b>75</b>	1	1 19	19		978072,3	<b>76</b>	1	40 36	69		980223,0
	2	15 25	1270		978054,2		2	25 45	1337		978629,5
	3	66 44	0	3120	982433,5		3	66 52	0	4232	982426,1
	4	38 06	0	99	980000,0		4	38 08	0	67	980046,8
	5	35 13	0180	180	979663,3		5	35 13	0219	350	979656,4
	6	41 43	401	401	980178,8		6	0 13	815	21	977748,6
<b>77</b>	1	40 39	25		980226,4	<b>78</b>	1	50 04	96		981061,5
	2	1 15	1636		977540,3		2	17 50	1472		978148,7
	3	66 57	0	3443	982416,5		3	66 57	0	2735	982424,4
	4	38 22	0	66	980051,4		4	38 25	0	60	980061,7
	5	35 18	198	350	979676,5		5	35 13	339	350	979533,3
	6	19 05	440	15	978468,1		6	8 57	15	14	978248,1
<b>79</b>	1	41 54	45		980364,9	<b>80</b>	1	4 26	55		978083,3
	2	19 10	1540		978057,6		2	16 31	3519		977467,1
	3	67 10	0	3100	982424,8		3	66 40	0	2839	982421,5
	4	38 28	0	89	980062,5		4	37 58	0	150	980030,2
	5	35 12	402	350	979619,3		5	35 14	68	350	979580,3
	6	10 30	1042	13	978040,9		6	26 22	30	9	979126,5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>81</b>	1	1 21	29		978087,5	<b>82</b>	1	4 18	76		978024,4
	2	41 11	2320		979587,4		2	41 10	755		980086,3
	3	66 28	0	4721	982389,8		3	66 31	0	2291	982395,2
	4	37 38	0	220	980020,1		4	37 43	0	175	980020,4
	5	35 15	883	250	979550,5		5	35 14	190	350	979535,7
	6	28 37	214	24	979136,2		6	30 46	313	23	979310,1
<b>83</b>	1	9 22	80		978160,3	<b>84</b>	1	5 47	12		978103,7
	2	35 12	1163		979536,5		2	35 18	829		979581,0
	3	66 31	0	3980	982415,4		3	67 28	0	3946	982515,7
	4	37 45	0	130	980012,3		4	37 47	0	80	980005,3
	5	41 01	43	250	980141,9		5	41 01	170	200	980115,1
	6	19 52	558	22	978484,6		6	26 50	436	21	978990,5
<b>85</b>	1	1 19	25		978072,1	<b>86</b>	1	1 23	16		978034,6
	2	40 59	803		980086,5		2	40 24	655		979982,4
	3	66 34	0	4445	982398,3		3	67 26	0	4009	982423,3
	4	37 49	0	85	980015,7		4	37 51	0	135	980022,8
	5	35 13	275	350	979646,2		5	35 16	157	350	979663,7
	6	18 55	6	20	978603,4		6	17 33	531	19	978335,9
<b>87</b>	1	6 51	17		978129,9	<b>88</b>	1	22 20	4		978796,5
	2	10 30	1054		977832,5		2	4 38	2592		977405,3
	3	66 40	0	2785	982432,7		3	67 12	0	3674	982415,4
	4	37 56	0	145	980029,2		4	38 33	0	95	980074,2
	5	35 16	389	350	979619,2		5	35 13	139	458	979677,7
	6	15 11	170	10	978396,1		6	19 10	220	12	978514,0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>89</b>	1	35 03	61		979422,4	<b>90</b>	1	6 49	7		978132,1
	2	42 40	2257		979758,2		2	42 40	1727		979831,7
	3	68 57	0	2385	982624,5		3	69 00	0	2663	982559,8
	4	16 52	0	105	978436,8		4	26 26	0	110	979054,3
	5	35 09	398	200	979525,0		5	35 09	286	200	979803,7
	6	0 13	815	51	977898,1		6	16 31	519	45	978319,6
<b>91</b>	1	24 54	25		978962,6	<b>92</b>	1	15 11	170		978396,7
	2	42 35	810		980153,4		2	42 35	1807		979930,2
	3	69 01	0	2000	982517,5		3	69 02	0	1510	982531,5
	4	35 59	0	120	979896,3		4	27 44	0	115	979271,5
	5	35 09	216	200	979566,4		5	35 09	137	200	979605,2
	6	8 58	7	53	978242,0		6	6 49	7	54	978131,0
<b>93</b>	1	28 37	214		979136,4	<b>94</b>	1	26 22	5		979126,3
	2	42 34	375		980231,5		2	42 34	1973		979761,0
	3	69 04	0	3710	982540,3		3	69 04	0	1530	982602,4
	4	4 01	0	120	978112,2		4	4 15	0	125	978139,5
	5	35 08	37	200	979748,1		5	35 08	5	200	979747,8
	6	22 16	10	55	978761,3		6	24 54	25	56	978962,0
<b>95</b>	1	35 38	21		979790,0	<b>96</b>	1	35 43	18		979801,2
	2	42 40	2257		979758,3		2	26 12	1715		978550,4
	3	69 10	0	1200	982579,6		3	69 10	0	2118	982547,4
	4	4 55	0	135	978100,3		4	5 44	0	140	978115,3
	5	35 18	23	200	979736,3		5	35 19	52	300	979706,1
	6	26 22	150	58	979080,1		6	42 31	572	45	980195,4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>97</b>	1	40 35	33		980290,5	<b>98</b>	1	40 37	65		980288,4
	2	42 29	2349		979832,7		2	42 28	2200		979859,4
	3	69 14	0	1600	982590,2		3	69 16	0	1100	982557,6
	4	6 52	0	145	978126,3		4	8 07	0	20	978190,8
	5	35 20	245	300	979658,8		5	35 19	356	300	979636,3
	6	29 53	18	60	979246,0		6	25 45	377	61	978929,1
<b>99</b>	1	40 33	250		980110,4	<b>100</b>	1	40 37	164		980280,5
	2	42 24	1076		980082,1		2	42 26	1469		979989,7
	3	69 18	0	3340	982572,2		3	68 19	0	3367	982567,8
	4	9 18	0	49	978243,3		4	10 07	0	140	978225,7
	5	35 20	333	300	979629,6		5	35 19	436	300	979606,0
	6	22 20	154	62	978658,1		6	19 20	268	53	978551,4

Номер варианта выбирается по двум последним цифрам шифра. Например, для шифров 25п-37, 25п-137, 25п-237 нужно взять 37-й вариант.

Для плотности промежуточного слоя использовать значения:

- точки 1-2, 5-6 – плотность 2,3 г/см<sup>3</sup>;
- точки 3-4 – плотность 2,67 г/см<sup>3</sup>.

**Нормальная сила тяжести**  
Формула Гельмерта (1901 – 1909 гг.), мГал

	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'
1	2	3	4	5	6	7	8
0°	978 030,0	030,0	030,2	030,4	030,7	031,1	031,6
1	031,6	032,1	032,8	033,5	034,4	035,3	036,3
2	036,3	037,4	038,5	039,8	041,2	042,6	044,1
3	044,1	045,7	047,4	049,2	051,1	053,1	055,1
4	055,1	057,2	059,4	061,8	064,1	066,6	069,2
5	069,2	071,8	074,6	077,4	080,3	083,3	086,4
6	086,4	089,5	092,8	096,1	099,5	103,0	106,6
7	106,6	110,3	114,0	117,9	121,8	125,8	129,9
8	129,9	134,1	138,4	142,7	147,1	151,6	156,2
9	156,2	160,9	165,7	170,5	175,1	180,5	185,6
10	185,6	190,7	196,0	201,3	206,7	212,2	217,8
11	217,8	223,5	229,2	235,1	241,0	247,0	253,0
12	253,0	259,2	265,4	271,7	278,1	284,5	291,1
13	291,1	297,7	304,4	311,2	318,0	325,0	332,0
14	332,0	339,1	346,2	353,5	360,8	368,2	375,7
15	375,7	383,2	390,8	398,5	406,3	414,1	422,1
16	422,1	430,0	438,1	446,3	454,5	462,8	471,1
17	471,1	479,6	488,1	496,6	505,3	514,0	522,8
18	522,8	531,7	540,6	549,6	558,7	567,8	577,0
19	577,0	586,3	595,7	605,1	614,6	624,1	633,8
20	633,8	643,5	653,2	663,0	672,9	682,9	692,9
21	692,9	703,0	713,1	723,3	733,6	744,0	755,4
22	755,4	764,8	775,4	786,0	796,6	807,4	818,1
23	818,1	829,0	839,9	850,8	861,9	872,9	884,1
24	884,1	895,3	906,5	917,9	929,2	940,7	952,1
25	952,1	963,7	975,3	986,9	998,7	010,4*	022,2*
26	979 022,2	034,1	046,0	058,0	070,1	082,2	094,3
27	094,3	106,5	118,7	131,0	143,4	155,8	168,2
28	168,2	180,7	193,2	205,8	218,5	231,1	243,9
29	243,9	256,7	269,5	282,4	295,3	308,2	321,2
30	321,2	334,3	347,4	360,5	373,7	386,9	400,2
31	400,2	413,5	426,8	440,2	453,7	467,1	480,6
32	480,6	494,2	507,8	521,4	535,0	548,7	562,5
33	562,5	576,2	590,0	603,9	617,8	631,7	645,6
34	645,6	659,6	673,6	687,6	701,7	715,8	729,9
35	729,9	744,1	758,3	772,5	786,8	801,0	815,4
36	815,4	829,7	844,1	858,4	872,9	887,3	901,8
37	901,8	916,3	930,8	945,3	959,9	974,5	989,1
38	989,1	003,7*	018,3*	033,0*	047,7*	062,4*	077,1*
39	980077,1	091,9	106,7	121,4	136,2	151,1	165,9



Окончание табл. 1

1	2	3	4	5	6	7	8
40	165,9	180,7	195,6	210,5	225,4	240,3	255,2
41	255,2	270,1	285,1	300,0	315,0	330,0	345,0
42	345,0	360,0	375,0	390,0	405,0	420,0	435,1
43	435,1	450,1	465,2	480,2	495,3	510,4	525,4
44	525,4	540,5	555,6	570,7	585,7	600,8	615,9
45	615,9	631,0	646,6	661,1	676,2	691,3	706,4
46	706,4	721,5	736,6	751,6	766,7	781,8	796,8
47	796,8	811,9	826,9	841,9	857,0	872,0	887,0
48	887,0	902,0	917,0	932,0	947,0	961,9	976,9
49	976,9	991,8	006,8*	021,7*	036,6*	051,5*	066,3*
50	981 066,3	081,2	096,1	110,9	125,7	140,5	155,3
51	155,3	170,0	184,8	199,5	214,2	228,9	243,6
52	243,6	258,2	272,8	287,4	302,0	316,6	331,2
53	331,2	345,6	360,1	374,5	389,0	403,4	417,8
54	417,8	432,1	446,5	460,8	475,0	489,3	503,5
55	503,5	517,7	531,8	546,0	560,0	574,1	588,1
56	588,1	602,1	616,1	630,0	643,9	657,8	671,6
57	671,6	685,4	699,2	712,9	726,6	740,2	753,8
58	753,8	767,4	780,9	794,4	807,9	821,3	834,7
59	834,7	848,1	861,4	874,6	887,8	900,9	914,0
60	914,0	927,1	940,1	953,1	966,0	978,9	991,8
61	991,8	004,6*	017,3*	030,1*	042,7*	055,3*	067,9*
62	982 067,9	080,4	092,9	105,3	117,7	130,0	142,2
63	142,2	154,5	166,6	178,8	190,8	202,8	214,8
64	214,8	226,7	239,5	250,3	262,0	273,7	285,3
65	285,3	296,9	308,4	319,9	331,3	342,6	353,9
66	353,9	365,1	376,2	387,4	398,4	409,4	420,3
67	420,3	431,2	442,0	452,7	463,4	474,0	484,5
68	484,5	495,0	505,4	515,8	526,1	536,3	546,5
69	546,5	556,6	566,6	576,6	586,5	596,3	606,1
70	606,1	615,8	625,4	635,0	644,5	653,9	663,3
71	663,3	672,6	681,8	690,9	700,0	709,0	718,0
72	718,0	726,9	735,6	744,4	753,0	761,6	770,1
73	770,1	778,5	786,9	795,2	803,4	811,6	819,6
74	819,6	827,6	835,5	843,4	851,1	858,8	866,4
75	866,4	874,0	881,4	888,8	896,1	903,4	910,5
76	910,5	917,6	924,6	931,5	938,4	945,1	951,8
77	951,8	958,4	964,9	971,4	977,7	984,0	990,2
78	990,2	996,4	002,4*	008,4*	014,2*	020,0*	025,8*
79	983 025,8	031,4	037,0	042,4	047,8	053,1	058,4
80	058,4	063,5	068,6	073,5	078,4	083,2	088,0
81	088,0	092,6	097,2	101,6	106,0	110,3	114,6
82	114,6	118,7	122,7	126,7	130,6	134,4	138,1
83	138,1	141,7	145,3	148,7	152,1	155,4	158,6
84	158,6	161,7	164,7	167,6	170,5	173,2	175,9
85	175,9	178,5	181,0	183,4	185,8	188,0	190,1
86	190,1	192,2	194,2	196,1	197,9	199,6	201,2
87	201,2	202,8	204,2	205,6	206,9	208,1	209,2
88	209,2	210,2	211,1	211,9	212,7	213,4	213,9
89	213,9	214,4	214,8	215,1	215,3	215,5	215,5

Таблица 2

### Поправка за приведение силы тяжести по высоте

а) главная часть поправки, вычисленная для широты  $45^\circ$

$$-\Delta\gamma_{45} = (0,30855H - 0,0723H^2 \cdot 10^{-6}), \text{мГал}$$

$H, \text{ м}$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0	0,0	3,1	6,2	9,3	12,3	15,4	18,5	21,6	24,7	27,8
100	30,9	33,9	37,0	40,1	43,2	46,3	49,4	52,5	55,5	58,5
200	61,7	64,8	67,9	71,0	74,0	77,1	80,2	83,3	86,4	89,5
300	92,6	95,6	98,7	101,8	104,9	108,0	111,1	114,2	117,2	120,3
400	123,4	126,5	129,6	132,7	135,7	138,8	141,9	145,0	148,1	151,2
500	154,3	157,3	160,4	163,5	166,6	169,7	172,8	175,9	178,9	182,0
600	185,1	188,2	191,3	194,4	197,4	200,5	203,6	206,7	209,8	212,9
700	215,9	219,0	222,1	225,5	228,3	231,4	234,5	237,5	240,6	243,7
800	246,8	249,9	253,0	256,0	259,1	262,2	263,3	268,4	271,5	274,6
900	277,6	280,7	283,8	286,9	290,0	293,1	296,1	299,2	302,3	305,4
1000	308,5									
2000	616,8									
3000	925,0									

б) поправка за широту, вычисленная по формуле

$$-(\Delta\gamma - \Delta\gamma_{45}) = 0,0002192(1 - 2\sin^2 B)H, \text{мГал}.$$

Для широт  $0 - 45^\circ$  поправка положительна, для  $45^\circ - 90^\circ$  – отрицательна

$H, \text{ м}$	Широта $B$									
	$0^\circ$ $90^\circ$	$5^\circ$ $85^\circ$	$10^\circ$ $80^\circ$	$15^\circ$ $75^\circ$	$20^\circ$ $70^\circ$	$25^\circ$ $65^\circ$	$30^\circ$ $60^\circ$	$35^\circ$ $55^\circ$	$40^\circ$ $50^\circ$	$45^\circ$
0										
500	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,0	0,0	0,0	0
1000	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,0	0
1500	0,3	0,3	0,3	0,3	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1	0
2000	0,4	0,4	0,4	0,4	0,3	0,3	0,2	0,2	0,1	0
2500	0,5	0,5	0,5	0,5	0,4	0,4	0,3	0,2	0,1	0
3000	0,7	0,6	0,6	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
3500	0,8	0,8	0,7	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,1	0

Пример:  $B = 67^\circ 17'$ ,  $H = 643 \text{ м}$ .

По табл. 2, а находим на 640 м 197,4 мГал

на 3 м 0,9 мГал

по табл. 2, б -0,1 мГал

Поправка за высоту 198,2 мГал

Таблица 3

### Поправка за промежуточный слой

а) плотность  $1,64 \text{ г/см}^3$

$H, \text{ м}$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0,0	0,7	1,4	2,1	2,7	3,4	4,1	4,8	5,5	6,2
100	6,9	7,6	8,2	8,9	9,6	10,3	11,0	11,7	12,4	13,1
200	13,7	14,4	15,1	15,8	16,5	17,2	17,9	18,6	19,2	19,9

Окончание табл. 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
300	20,6	21,3	22,0	22,7	23,4	24,0	24,7	25,4	26,1	26,8
400	27,5	28,2	28,9	29,5	30,2	30,9	31,6	32,3	33,0	33,7
500	34,4	35,0	35,7	36,4	37,1	37,8	38,5	39,2	39,8	40,5
600	41,2	41,9	42,6	43,3	44,0	44,7	45,4	46,0	46,7	47,4
700	48,1	48,8	49,5	50,2	50,8	51,5	52,2	52,9	53,6	54,3
800	55,0	55,7	56,3	57,0	57,7	58,4	59,1	59,8	60,5	61,2
900	61,8	62,5	63,2	63,9	64,6	65,3	66,0	66,6	67,3	68,0
1000	68,7									
2000	137,4									
3000	206,1									
4000	274,9									
5000	343,6									

б) плотность 2,3 г/см<sup>3</sup>

H, м	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0	0,0	1,0	1,9	2,9	3,8	4,8	5,8	6,7	7,7	8,7
100	9,6	10,6	11,6	12,5	13,5	14,4	15,4	16,4	17,3	18,3
200	19,3	20,2	21,2	22,2	23,1	24,1	25,1	26,0	27,0	27,9
300	28,9	29,9	30,8	31,8	32,8	33,7	34,7	35,7	36,6	37,6
400	38,5	39,5	40,5	41,4	42,4	43,4	44,3	45,3	46,2	41,4
500	48,2	49,1	50,1	51,1	52,0	53,0	54,0	54,9	55,9	56,9
600	57,8	58,8	59,7	60,7	61,7	62,6	63,6	64,6	65,5	66,5
700	67,4	68,4	69,4	70,4	71,3	72,3	72,3	74,2	75,2	76,1
800	77,1	78,1	79,0	80,0	81,0	81,9	82,9	83,8	84,8	85,8
900	86,7	87,7	88,7	89,6	90,6	91,6	92,5	93,5	94,4	95,4
1000	96,4									
2000	192,7									
3000	289,1									
4000	385,5									

При вычислении аномалии Буге в точках 1-2, 5-6 использовать табл. 3, б; при вычислении аномалии Буге в точках 3-4 использовать табл. 3, а.

Таблица 4

Поправка  $\gamma_e \beta_1 \sin^2 2B$ , мГал

B	$\gamma_e \beta_1 \sin^2 2B$ , мГал	B
0°	0	90°
7°50,4'	1	82°09,6'
13 57,3	2	76 02,7
18 35,3	3	71 24,7
22 49,3	4	67 10,7
27 05,0	5	62 55,0
31 50,3	6	58 09,7
38 30,1	7	51 29,9
45°		45°

*Учебное издание*

**ГРАВИМЕТРИЯ**

**Учебно-методический комплекс  
для студентов специальности  
1-56 02 01 «Геодезия»**

**Составитель**

**Шароглазова Галина Александровна**

**2-е издание**

**Редактор *А. Э. Цибульская***

**Дизайн обложки *И. С. Васильевой***

---

Подписано в печать 13.12.10. Формат 60x84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Ризография.  
Усл. печ. л. 11,37. Уч.-изд. л. 10,95. Тираж 10 экз. Заказ 2133.

---

**Издатель и полиграфическое исполнение:  
учреждение образования «Полоцкий государственный университет».**

**ЛИ № 02330/0548568 от 26.06.2009**

**ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009**

**Ул. Блохина, 29, 211440, г. Новополоцк.**