Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

«Полоцкий государственный университет»

Д.Ф. Пастухов
Ю.Ф. Пастухов

# МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ.

# ЛЕКЦИИ. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ.

Учебно-методическое пособие к лекционным и практическим занятиям

для студентов специальности

1-40 01 01 Программное обеспечение информационных технологий

1-98 01 01 Компьютерная безопасность

Новополоцк

ПГУ

2019

УДК 519.6
ББК 22.193

Рецензенты:
А.А. Козлов, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики и дифференциальных уравнений Полоцкого государственного университета

**Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.**
Моделирование систем. Лекции. Лабораторный практикум: учебное пособие /Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, - 2 - ое изд. дополненное – Новополоцк: ПГУ, 2019. – 179 с.

Материал учебного пособия соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта по математическому моделированию. В книге содержатся основные главы теории математического моделирования, обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Для студентов программистов (специальность-программное обеспечение информационных технологий).

Для студентов университетов, педагогических вузов, а также для студентов технических вузов, преподавателей, инженеров, программистов использующих в своей практической деятельности математическое моделирование.

УДК 519.6
ББК 22.193

Одобрено и рекомендовано к изданию
методической комиссией факультета информационных технологий
В качестве учебного пособия

Кафедра технологий программирования

Содержание

## Предисловие

Данное учебное пособие по моделированию систем представляет собой краткий конспект лекций, прочитанных студентам по специальности информационные технологии в Полоцком государственном университете. Пособие также содержит лабораторный практикум по моделированию систем.

Часть практических работ №№ 1,2,3,4,5,6 связана с решением и анализом систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Практические работы №№ 7,8,9 относятся к уравнениям в частных производных по одной на каждый тип классификации параболического, гиперболического и эллиптического типа. Большинство программ к работам написаны на языке С++. Три последние работы вынесены в приложение, так как одна из программ написана на языке FORTRAN с использованием математической и компактной библиотеки Imsl , две другие задачи из математической физики, выполнены в инженерном приложении ANSYS Workbench.

Во – первых, стоит отдавать отчёт себе в том, что в модельных уравнениях, например, во Fluent скрыты безразмерные параметры подобия (критерии подобия), которые, прежде всего, важны для оценки применимости той или иной модели для данной задачи. Так известно, что переход жидкости из ламинарного состояния в турбулентное состояние определяется числом Рейнольдса. Но в зависимости от геометрии модели, шероховатости поверхности переход в турбулентное состояние по числу Рейнольдса может различаться в десятки раз. Во – вторых, ни в одной из решаемых задач ANSYS Workbench не располагает точным аналитическим решением. Более того, в задачах гидродинамики (в уравнениях Навье – Стокса с турбулентной вязкостью) на сегодня неизвестно ни одно аналитическое решение гидродинамической задачи, поэтому точным решением не обладает и пакет ANSYS Workbench.. Инженер использует ANSYS Workbench для создания модели. Но это всего лишь первый этап. Далее необходимо построить полученную модель и проверить её на выполнение всех предполагаемых характеристик. Если реальная модель после серии испытаний выдерживает проверку, он может сказать, что использовал ANSYS на этапе моделирования.

## Классификация моделей

Все модели в математическом моделировании можно классифицировать по сложности применяемого для их исследования математического аппарата:

1) Алгебраические модели, в которых используются только системы алгебраических уравнений, но не используются дифференциальные уравнения.
2) Математические модели с применением систем обыкновенных дифференциальных уравнений.
3) Математические модели с применением систем уравнений в частных производных.
4) Смешанные модели, в которых применяются уравнения не менее чем из трёх указанных ранее пунктов.
5) При установленной классификации модели в пунктах 1),2),3) могут быть нелинейными либо линейными (например, линеаризованными в окрестности некоторой рассматриваемой точки). Методы исследования линейных и нелинейных моделей существенно различаются.

Математические модели можно классифицировать по областям естествознания, в которых они возникли. Дополнительно в одной и той же области естествознания можно классифицировать близкие модели как имеющие родственные методы решения задач:

1) Социальные модели.
2) Химические и биологические модели.
3) Механические модели.
4) Физические модели.
5) Прикладные математические модели (с использованием численных методов).

## Алгебраические модели

### 1.Метод аналогий

Рассмотрим задачу: построить формулу для суммы 4 степеней натуральных чисел с 1 до n включительно

$$I_{\sum} = \sum_{i=1}^{n} i^4 \qquad (1)$$

Легко формулу (1) продолжить на область натуральных чисел с 0 до n включительно

$I_{\sum} = \sum_{i=1}^{n} i^4 = \sum_{i=0}^{n} i^4$ . Если заменить натуральное число $i$ действительной переменной $x$, а сумму на интеграл, то получим аналогичную задачу $I_{\int} = \int_0^n x^4 dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^n = \frac{n^5}{5}$ - имеем многочлен пятой степени относительно верхнего индекса n. Т.е. в общем случае $I_{\sum}$, представляя в виде многочлена пятой степени с произвольными целыми коэффициентами, получим искомую формулу (учитывая приближённое равенство $I_{\sum} \approx I_{\int}$ ).

$$I_{\sum} = a_0 n^5 + a_1 n^4 + a_2 n^3 + a_3 n^2 + a_4 n + a_5$$

Если $n = 0 \Rightarrow I_{\int} = \frac{0^5}{5} = 0 = I_{\sum} \Leftrightarrow a_5 = 0$

$$I_{\sum} = a_0 n^5 + a_1 n^4 + a_2 n^3 + a_3 n^2 + a_4 n$$

В последнем многочлене неизвестные коэффициенты $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$ найдём из системы уравнений (благодаря аналогии 2 задач $a_0 = \frac{1}{5}$ ):

$$\begin{cases} n=1: \frac{1}{5} + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0^4 + 1^4 = 1 \\ n=2: \frac{32}{5} + 16a_1 + 8a_2 + 4a_3 + 2a_4 = 0^4 + 1^4 + 2^4 = 17 \\ n=3: \frac{243}{5} + 81a_1 + 27a_2 + 9a_3 + 3a_4 = 0^4 + 1^4 + 2^4 + 3^4 = 98 \\ n=4: \frac{1024}{5} + 256a_1 + 64a_2 + 16a_3 + 4a_4 = 0^4 + 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 = 354 \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{4}{5} \\ 16a_1 + 8a_2 + 4a_3 + 2a_4 = \frac{53}{5} \\ 81a_1 + 27a_2 + 9a_3 + 3a_4 = \frac{247}{5} \\ 256a_1 + 64a_2 + 16a_3 + 4a_4 = \frac{746}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 = \frac{1}{3} \\ a_3 = 0 \\ a_4 = -\frac{1}{30} \end{cases} \qquad (3)$$

Решение системы уравнений (2) в символьном виде (в рациональных дробях) записано в системе (3).

Окончательный искомый многочлен (1) будет иметь вид:

$$I_{\sum} = \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \qquad (4)$$

С помощью формулы(4) для значения $n = 5$ получим значение суммы

$$I_{\sum} = \sum_{i=1}^{n} i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 = 979 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} = 5^4 + \frac{5^4}{2} + \frac{125}{3} - \frac{1}{6} = 625 +$$

$$+ \frac{1875 + 250 - 1}{6} = 625 + \frac{2124}{6} = 625 + 354 = 979$$

## 2. Редукция простой модели

Редукция простой модели заключается в том, что сложную модель можно проанализировать, используя решение простой модели.

Рассмотрим следующую задачу:

Найти количество ступеней космической ракеты для оптимального расхода топлива. Можно принять следующие технические характеристики: скорость истечения газа относительно сопла каждой ступени $u = 10.5 \frac{км}{c}$, $\lambda = 0.1$- доля технической массы ступени без топлива.

1) Рассмотрим запуск в космос одноступенчатой ракеты. Обозначим $m(t)$ - текущее значение массы ракеты с топливом в момент времени $t$, $u$ - скорость истечения газов относительно сопла ракеты, $v(t)$- мгновенная скорость ракеты. Силы инерции считаем основными в задаче во много раз превышающими силу тяжести (даже во время старта ракеты). Из закона сохранения импульса получим:

$$m(t)v(t) = (m - dm)(v + dv) + dm(v + u) \qquad (5)$$

В уравнении (5) $dm$, $dv$ дифференциал массы газа, испущенный за время $dt$ и дифференциал изменения скорости ракеты. Упрощая (1) и сохраняя слагаемые первого порядка малости, получим:

$$mdv + dmu = 0 \Leftrightarrow \frac{dm}{m} = -\frac{1}{u}dv = -d\left(\frac{v}{u}\right), u = const \qquad (6)$$

Из уравнения (6) видно, что приращение скорости ракеты $dv$ и скорость истечения газов $u$ направлены противоположно. Интегрируем дифференциальное уравнение (6)

$d \ln m = -d\left(\frac{v}{u}\right) \Leftrightarrow \ln m + C = -\frac{v}{u}$. Произвольную константу интегрирования $C$ определим из начального условия: $m(0) = m_0, v(0) = 0 \Leftrightarrow C = -\ln m_0,\ \ln\left(\frac{m}{m_0}\right) = -\frac{v}{u}$.

Потенцируя последнее выражение, получаем формулу К.Э.Циолковского:

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{v}{u}}, \ \Leftrightarrow v(t) = -u \ln\left(\frac{m}{m_0}\right) \Leftrightarrow v(t) = u \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) \qquad (7)$$

2) Обозначим массу ступеней ракеты вместе с топливом $m_1, m_2, m_3$ соответственно, тогда $\lambda m_1, \lambda m_2, \lambda m_3$ структурные массы ступеней, $m_p$ - полезная масса, например, масса спутника, доставляемая на орбиту: $m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3$

К моменту сгорания первой ступени по формуле Циолковского(7) получим

$$v_1 = u\ln\left(\frac{m_0}{m_p+\lambda m_1+m_2+m_3}\right) \tag{8}$$

Затем в момент включения второй ступени оставшаяся масса ракеты есть $m_p+m_2+m_3$, так как структурная масса первой ступени освобождается $\lambda m_1$ без затраты топлива. К концу работы второй ступени по формуле (7) получим:

$$v_2 - v_1 = u\ln\left(\frac{m_p+m_2+m_3}{m_p+\lambda m_2+m_3}\right) \tag{9}$$

Аналогично, структурная масса второй ступени $\lambda m_2$ освобождается. Наконец, к концу работы третьей ступени получим скорость ракеты

$$v_3 - v_2 = u\ln\left(\frac{m_p+m_3}{m_p+\lambda m_3}\right) \tag{10}$$

Собирая воедино формулы (8),(9),(10) получим

$$v_3 = u\ln\left(\frac{m_p+m_3}{m_p+\lambda m_3}\right) + u\ln\left(\frac{m_p+m_2+m_3}{m_p+\lambda m_2+m_3}\right) + u\ln\left(\frac{m_0}{m_p+\lambda m_1+m_2+m_3}\right) =$$

$$= u\ln\left(\frac{m_p+m_3}{m_p+\lambda m_3}\right)\left(\frac{m_p+m_2+m_3}{m_p+\lambda m_2+m_3}\right)\left(\frac{m_0}{m_p+\lambda m_1+m_2+m_3}\right) \tag{11}$$

Чтобы упростить формулу (11) введём дополнительные параметры $\alpha_1 = \frac{m_p+m_1+m_2+m_3}{m_p+m_2+m_3}, \alpha_2 = \frac{m_p+m_2+m_3}{m_p+m_3}, \alpha_3 = \frac{m_p+m_3}{m_p}$

Тогда $\frac{m_p+m_3}{m_p+\lambda m_3} = \frac{\alpha_3 m_p}{m_p+\lambda(\alpha_3-1)m_p} = \frac{\alpha_3}{1+\lambda(\alpha_3-1)}$

$$\frac{m_p+m_2+m_3}{m_p+\lambda m_2+m_3} = \frac{\alpha_2(m_p+m_3)}{m_p+m_3+\lambda(\alpha_2-1)(m_p+m_3)} = \frac{\alpha_2}{1+\lambda(\alpha_2-1)}$$

$$\frac{m_0}{m_p+\lambda m_1+m_2+m_3} = \frac{\alpha_1(m_p+m_2+m_3)}{m_p+m_2+m_3+\lambda m_1} = \frac{\alpha_1(m_p+m_2+m_3)}{m_p+m_2+m_3+\lambda(\alpha_1-1)(m_p+m_2+m_3)} = \frac{\alpha_1}{1+\lambda(\alpha_1-1)}$$

Формула (11) перейдёт в формулу

$$v_3 = u\ln\left(\frac{\alpha_1}{1+\lambda(\alpha_1-1)}\right)\left(\frac{\alpha_2}{1+\lambda(\alpha_2-1)}\right)\left(\frac{\alpha_3}{1+\lambda(\alpha_3-1)}\right) \tag{12}$$

Чтобы найти экстремальное значение конечной скорости $v_3$ в формуле (12) необходимо взять частные производные по переменным $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, приравнять их к нулю и найти экстремальные значения переменных $\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2},\overline{\alpha_3}$, которые снова затем подставить в формулу (1). Учтём симметрию формулы(12) относительно перестановки любой пары либо тройки переменных $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. Та же симметрия будет и у уравнений вида $\partial v_3/\partial\alpha_i, i=1,2,3$. Это значит, что экстремальный набор параметров $\overline{\alpha_1}=\overline{\alpha_2}=\overline{\alpha_3}=\alpha$ имеет равные значения (важно лишь, чтобы область изменения каждого параметра $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ была одинаковой для каждого параметра). Упростим формулу (12).

$$v_3 = u\ln\left(\frac{\alpha}{1+\lambda(\alpha-1)}\right)^3 = 3u\ln\left(\frac{\alpha}{1+\lambda(\alpha-1)}\right)$$

В случае $n$ ступеней, проводя аналогичные выкладки, получим более общую формулу:

$$v_n = nu\ln\left(\frac{\alpha}{1+\lambda(\alpha-1)}\right) \Leftrightarrow \exp\left(\frac{v_n}{nu}\right) = A = \frac{\alpha}{1+\lambda(\alpha-1)} \Leftrightarrow A(1+\lambda(\alpha-1)) = \alpha \Leftrightarrow$$

$$A(1-\lambda) = \alpha(1-\lambda A) \Leftrightarrow \alpha_n = \frac{(1-\lambda)A}{(1-\lambda A)} = \frac{(1-\lambda)\exp\left(\frac{v_n}{nu}\right)}{\left(1-\lambda\exp\left(\frac{v_n}{nu}\right)\right)} = \frac{(1-\lambda)}{\left(\exp\left(-\frac{v_n}{nu}\right)-\lambda\right)} \tag{13}$$

С другой стороны, $\alpha_n{}^n = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \left(\frac{m_p+m_1+m_2+m_3}{m_p+m_2+m_3}\right)\left(\frac{m_p+m_2+m_3}{m_p+m_3}\right)\left(\frac{m_p+m_3}{m_p}\right) = \frac{m_0}{m_p}$

$$\alpha_n{}^n = \frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{(1-\lambda)}{\exp\left(-\frac{v_n}{nu}\right)-\lambda}\right)^n \tag{14}$$

Применим формулу (14) для различного количества ступеней, начиная с одной:
1) $n=1,\ u=3km/s, v=10{,}5km/s,\ \lambda=0{,}1$:

$$\frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{(1-\lambda)}{\exp\left(-\frac{v_n}{nu}\right)-\lambda}\right)^n = \frac{(1-0.1)}{\left(\exp\left(-\frac{10.5}{3}\right)-0.1\right)} = \frac{0.9}{-0.0698} \approx -13$$

получаем противоречие, так как отношение положительных масс положительная величина, следовательно, одноступенчатая ракета не достигает заданной конечной скорости ни при каких дополнительных условиях.
2) $n=2,\ u=3km/s, v=10{,}5km/s,\ \lambda=0{,}1$:

$$\frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{(1-\lambda)}{\left(xp\left(-\frac{v_n}{2u}\right)-\lambda\right)}\right)^2 = \left(\frac{(1-0.1)}{\left(\exp\left(-\frac{10.5}{2*3}\right)-0.1\right)}\right)^2 = \left(\frac{0.9}{0.07377}\right)^2 \approx 148.8$$

Двух ступенчатая ракета достигает заданной конечной скорости.
2) $n=3,\ u=3km/s, v=10{,}5km/s,\ \lambda=0{,}1$:

$$\frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{(1-\lambda)}{\left(xp\left(-\frac{v_n}{3u}\right)-\lambda\right)}\right)^3 = \left(\frac{(1-0.1)}{\left(\exp\left(-\frac{10.5}{3*3}\right)-0.1\right)}\right)^3 = \left(\frac{0.9}{0.2114}\right)^3 \approx 77.16$$

Трёх ступенчатая ракета достигает заданной конечной скорости. Однако по сравнению с двух ступенчатой ракетой полезная масса по сравнению с полной массой ракеты выросла в $148.8/77.16 \approx 1.93$ раз

2) $n=4,\ u=3km/s, v=10{,}5km/s,\ \lambda=0{,}1$:

$$\frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{(1-\lambda)}{\left(xp\left(-\frac{v_n}{4u}\right)-\lambda\right)}\right)^4 = \left(\frac{(1-0.1)}{\left(\exp\left(-\frac{10.5}{4*3}\right)-0.1\right)}\right)^4 = \left(\frac{0.9}{0.31686}\right)^4 \approx 65.09$$

Четырёх ступенчатая ракета достигает заданной конечной скорости. Однако по сравнению с трёх ступенчатой ракетой полезная масса относительно полной массы ракеты выросла в $77.16/65.09 \approx 1.185$ раз. Т.е. добавление 4 ступени по сравнению с 3 ступенью даёт выигрыш в полезной массе всего 18.5%(добавление 3 ступени по сравнению с 2 ступенью даёт выигрыш в полезной массе 93%). Таким образом, добавление ступеней ракеты к 3 заметного выигрыша в полезной массе не даёт, зато нужно применять дополнительные дорогостоящие ракетные двигатели.

Именно данный факт объясняет широкое распространение 3 ступенчатых ракет.

## 3.Универсальность уравнений в математических моделях.

Каждую математическую модель нужно идеализировать, выделить её основное свойство или несколько свойств, которые определяют динамику развития математической модели. Корме того, многие физические и механические системы, управляемые различными физическими законами, имеют одинаковые математические уравнения движения, т.е. проявляют универсальность математических уравнений. В качестве примера сравнением две модели - рассмотрим удар слабо накаченного футбольного мяча о стенку и колебания колец Сатурна.

Первая задача: Накачанный воздухом футбольный мяч радиуса $R$ с давлением внутри камеры $p_1$ ударяется о стенку. Найти время его слабого соударения со стенкой, если $m$ - масса мяча с камерой и воздухом внутри, $u$ - начальная скорость мяча. В задаче можно пренебречь упругими свойствами футбольной камеры, но необходимо учитывать упругие свойства воздуха внутри камеры. Камера ограничивает воздух, может деформироваться, но не растягивается (радиус постоянный $R$ ).

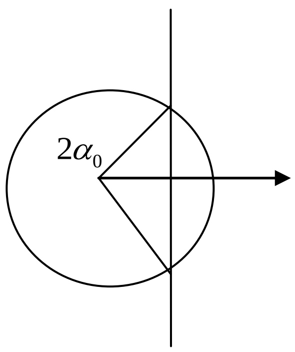



Рис.1

Из приведенного рисунка 1 нужно найти объём шарового сегмента, отсечённого от футбольного сферического мяча плоскостью стенки и опирающегося на конус с раствором углом $2\alpha_0$. Условие слабого соударения приводит к требованию малой деформации мяча $\alpha_0 \to 0$ (малый угол раствора конуса).

Высота шарового сегмента

$$x = R(1-\cos\alpha_0) = 2R\sin^2\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) \approx R\frac{\alpha_0^{\,2}}{2}, \left(\sin\alpha_0 \approx \alpha_0 - \frac{\alpha_0^{\,3}}{6}, \cos\alpha_0 \approx 1 - \frac{\alpha_0^{\,2}}{2} + \frac{\alpha_0^{\,4}}{24} + O\left(\alpha_0^{\,6}\right)\right) \quad (15)$$

Радиус основания сегмента $r = R\sin\alpha$. Элемент высоты сегмента $dx = R\sin\alpha d\alpha$. Объём шарового сегмента получим интегрированием

$$v=\int_{\alpha_0}^{0} r^2(\alpha)dx=\int_{\alpha_0}^{0} R^2\sin^2\alpha R\sin\alpha d\alpha=R^3\int_{\alpha_0}^{0}\sin^3\alpha d\alpha=-R^3\int_{\alpha_0}^{0}\left(1-\cos^2\alpha\right)d(\cos\alpha)=-R^3\left(\cos\alpha-\frac{\cos^3\alpha}{3}\right)\Bigg|_{\alpha_0}^{0}=$$

$$=-R^3\left(\cos\alpha-\frac{\cos^3\alpha}{3}\right)\Bigg|_{\alpha_0}^{0}=-R^3\left(\frac{2}{3}-\cos\alpha_0+\frac{\cos^3\alpha_0}{3}\right)\approx-R^3\left(\frac{2}{3}-\cos\alpha_0\left(1-\frac{\cos^2\alpha_0}{3}\right)\right)\approx$$

$$-R^3\left(\frac{2}{3}-\left(1-\frac{\left(1-\frac{\alpha_0^{\,2}}{2}\right)^2}{3}\right)\right)\approx-R^3\left(-\frac{1}{3}+\frac{\left(1-\alpha_0^{\,2}+\frac{\alpha_0^{\,4}}{4}\right)}{3}\right)\approx R^3\frac{\alpha_0^{\,2}}{3}\approx\frac{R^3}{3}\frac{2x}{R}=\frac{2xR^2}{3},\frac{x}{R}<<1$$

Будем считать, что при слабом и медленном ударе газ в камере сжимается изотермически, тогда используем газовый закон $(p_1-p_0)V_1=(p_2-p_0)(V_1-v)$, где $p_1, p_2, p_0$ давления в камере до деформации, в процессе деформации и атмосферное давление, $V_1=\frac{4}{3}\pi R^3$

$\Delta p_1=p_1-p_0, \Delta p_2=p_2-p_0, \Delta p_1=\Delta p_2\left(1-\frac{v_1}{V}\right)=\Delta p_2\left(1-\frac{x}{2\pi R}\right)\approx\Delta p_2=const$ т.е. сжатие воздуха внутри камеры можно считать при постоянном давлении. Сила, действующая со стороны стенки на мяч равна $F=-\Delta p_2\pi r^2(\alpha)\approx-(p_1-p_0)\pi R^2\sin^2\alpha\approx-(p_1-p_0)\pi R^2\alpha^2$, кроме того, из формулы (15) $\alpha^2=\frac{2x}{R}$, $F=-(p_1-p_0)\pi R^2\frac{2x}{R}=-2\pi xR(p_1-p_0)$

Запишем второй закон Ньютона для движения мяча

$$m\ddot{x}=F=-2\pi xR(p_1-p_0)\Leftrightarrow m\ddot{x}+2\pi xR(p_1-p_0)=0, \ddot{x}+\omega^2x=0, \omega^2=\frac{2\pi R(p_1-p_0)}{m} \qquad (16)$$

Уравнение (16) представляет собой уравнение гармонических колебаний $x(t)=A\sin(\omega t)$ с амплитудой А и с угловой частотой $\omega=\sqrt{\frac{2\pi R(p_1-p_0)}{m}}$.

Амплитуду деформации можно найти из закона сохранения энергии, пренебрегая тепловыми процессами $\frac{mu^2}{2}=\int_0^{x_0}F(x)dx=v\Delta p_1=\Delta p_1\frac{2xR^2}{3}=\Delta p_1\frac{2AR^2}{3}\Leftrightarrow A=\frac{3}{4}\frac{mu^2}{R^2\Delta p_1}$

Время удара мяча со стенкой есть половина периода колебаний

$$\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{2\omega}=\sqrt{\frac{\pi m}{2R(p_1-p_0)}} \qquad (17)$$

Для данных (И.Ш.Слободецкий, В.А.Орлов. Всесоюзные олимпиады по физике)
$m=0.5кг,\ p=2\,10^5$ Па, $R=12.5$ см, $p_0=10^5$ Па получим

$$\frac{T}{2}=\sqrt{\frac{\pi 0.5}{2*0.125\left(2 10^5-10^5\right)}}\approx 8\,10^{-3}c=8\text{ мс},\ A=\frac{3}{4}\frac{mu^2}{R^2\Delta p_1}=\frac{3}{4}\frac{0.5\ 1^2}{0.125^2\,10^5}\approx 2\,10^{-4}\text{ м(0.2мм)}$$

Причём время соударений определяется формулой (17) и не зависит от амплитуды деформации мяча А.

Рассмотрим задачу 2 - колебаний кольца Сатурна массы $m$ и планеты массой $M, M>>m$.

Малый элемент кольца с дифференциалом массы $dm = \frac{d\alpha}{2\pi} m$ ,опирающийся на дугу с углом $d\alpha$, будет притягиваться к центру планеты с вертикальной проекцией силы, как видно из рисунка 2(указана векторной стрелкой), по формуле гравитационного притяжения $dF = -\gamma \frac{dmM}{\left(R^2 + x^2\right)} \sin\alpha = -\gamma x \frac{dmM}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$ , где $x$ расстояние от центра кольца до планеты, $R$ - радиус Сатурна, $x << R$.

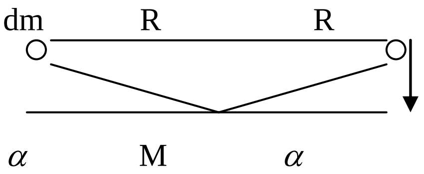


Рис.2

Суммируя все элементы силы от каждого элемента кольца, получим вертикальную результирующую силу, направленную вдоль оси симметрии кольца к центру планеты:

$$F = \sum dF \approx -x\gamma \frac{M \sum dm}{R^3} = -x\gamma \frac{Mm}{R^3} \tag{18}$$

С другой стороны, единственной внешней силой действующей на кольцо Сатурна является сила гравитационного притяжения, которая в силу симметрии направлена вдоль оси симметрии кольца к центру Сатурна, поэтому второй закон Ньютона, записанный для кольца:

$$m\ddot{x} = F = -x\gamma \frac{Mm}{R^3} \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0,\ \omega^2 = \gamma \frac{M}{R^3} \tag{19}$$

Уравнение (19) является уравнением гармонических колебаний, как и формула(16). Оценим период колебаний колец Сатурна

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{R^{3/2}}{\sqrt{\gamma M}} = 2\pi \frac{58232000^{3/2}}{\sqrt{6.67\ 10^{-11} 5.6866\ 10^{26}}} = 14336.17\ \text{с(4 часа)}$$

Другими словами, универсальность математических моделей для удара футбольного мяча о стенку и колебания колец Сатурна заключается в том, что движение этих тел описывается одним гармоническим уравнением колебаний (16) и (19).

## 4. Вариационный принцип в физике и механике

Во многих разделах физики и механики справедлив вариационный принцип, согласно которому эволюция произвольной механической (физической) системы описывается такой функцией среди бесконечного множества функций из выделенного класса, чтобы доставить экстремум некоторому функционалу (обычно минимум). Так, например, световой луч, проходящий в неоднородной оптической среде и соединяющий 2 точки A, B выбирает такую траекторию, вдоль которой достигается минимум функционала $\int_A^B n\left(\bar{r}\right) dl \to \min$.

В механике справедлив принцип наименьшего действия: механическая идеальная система без трения движется вдоль фазовой интегральной траектории $x(t)$, вдоль которой достигается минимум функционала действия $S(x(\cdot)) = \int\limits_a^b L\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right)dt \to \min$

$L\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right)$ - функция Лагранжа (20)

Функция Лагранжа трёх аргументов времени $t$, обобщённых координат $x(t)$, обобщённых скоростей $\dot{x}(t)$ и имеет размерность энергии, выражается через кинетическую и потенциальную энергию системы формулой:

$L\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) = T\left(\dot{x}(t)\right) - U(x), T\left(\dot{x}(t)\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2}$ - кинетическая энергия системы $U(x) = U(x_1, x_2, ..., x_n)$ - потенциальная энергия системы.

Обобщёнными координаты называются в том смысле, что разные координаты могут иметь разную размерность, например размерность длины и угла.

Из теории экстремальных задач известно, что необходимым условием экстремальной траектории, доставляющей минимум функционалу действия, является дифференциальное уравнение Эйлера – Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right)\right) - \frac{\partial}{\partial x} L\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) = 0 \qquad (21)$$

Функция Лагранжа, записанная на языке энергий, является более простой, чем векторная запись уравнений Ньютона, а уравнение Эйлера – Лагранжа является записью 2 закона Ньютона для каждой частицы механической системы.

**Пример 1**.

***Свободные колебания математического маятника.*** Обозначим точечную массу $m$ маятника, подвешенного на жёстком невесомом стержне длины $l$**.** Угол отклонения стержня от линии отвеса обозначим $\alpha$. Нуль потенциальной энергии присвоим положению равновесия точечной массы в нижней точке. Тогда:

$$U(\alpha) = mgl(1 - \cos\alpha),\ T\left(\dot{\alpha}\right) = \frac{mv^2}{2} = \frac{ml^2\omega^2}{2} = \frac{ml^2 \dot{\alpha}^2}{2}, L\left(t, \alpha, \dot{\alpha}\right) = T\left(\dot{\alpha}\right) - U(\alpha) = -mgl(1 - \cos\alpha) + \frac{ml^2 \dot{\alpha}^2}{2}$$

Применим уравнение (21) Эйлера – Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right)\right) - \frac{\partial}{\partial x} L\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(ml^2 \dot{\alpha}\right) + mgl\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0 \qquad (22)$$

Уравнение (22) при малых отклонениях угла $\alpha$ переходит в гармоническое уравнение $\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0, \omega^2 = \frac{g}{l}$

**Пример 2**.

***Сферический оптический волновод.***

Предположим, что оптически прозрачная сфера имеет переменный оптический показатель преломления. Пусть показатель преломления зависит от радиуса – вектора по формуле $n = n(r) = n_1 + (n_2 - n_1)\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^2$, $n_2 > n_1, n(r_0) = n_1, n(0) = n(2r_0) = n_2$. Определить условия, при которых сфера радиуса $r_0$ может стать волноводом для распространения лучей.

Используем принцип Ферма: луч распространяется из точки. А в точку В за наименьшее время. Учитывая, что скорость света в оптической среде с показателем преломления $n(r)$ равна $\frac{c}{n(r)}$, получим время движения светового пучка $\Delta t\big|_A^B = \frac{1}{c}\int_A^B n(r)dr \to \min \Leftrightarrow l_{A,B} = \int_A^B n(r)dr \to \min$. Последний интеграл носит название оптического пути вдоль заданной кривой, соединяющей точки А и В (радиус вектор $r$ последовательно проходит все элементы кривой).

Можно также определить волновод как слой сферы, в котором может концентрироваться пучок лучей. Предположим, луч проходит большую окружность сферы волновода с минимальной оптической кривой среди близких больших окружностей, так как решение в силу радиальной симметрии задачи может зависеть только от радиальной координаты. Если именно эта сфера обладает минимальной оптической длиной, то первый дифференциал (производная) в данной точке равен нулю, а второй дифференциал (вторая производная) в данной точке положительны:

$$\frac{d}{dr}\left(2\pi r n(r)\right) = 0 \Leftrightarrow n(r) + r\frac{dn(r)}{dr} = 0 \Leftrightarrow n_1 + (n_2 - n_1)\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^2 - \frac{2r}{r_0}(n_2 - n_1)\left(1 - \frac{r}{r_0}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{r}{r_0}, n_1 + (n_2 - n_1)(1-z)^2 - 2z(n_2 - n_1)(1-z) = 0 \Leftrightarrow n_1 + (n_2 - n_1)\left(1 - 2z + z^2\right) -$$

$$-2(n_2 - n_1)\left(z - z^2\right) = 0 = n_2 - 4z(n_2 - n_1) + 3z^2(n_2 - n_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_{1,2} = \frac{4(n_2 - n_1) \pm \sqrt{16(n_2 - n_1)^2 - 12n_2(n_2 - n_1)}}{6(n_2 - n_1)} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{3}\frac{n_2}{n_2 - n_1}} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}\left(\frac{n_2}{n_2 - n_1}\right)}\right)$$

Оптический показатель преломления имеет действительное значение (комплексный показатель преломления используют для описания поглощения энергии световой волны в веществе), что равносильно условию $1 - \frac{3}{4}\left(\frac{n_2}{n_2 - n_1}\right) \geq 0 \Leftrightarrow n_2 \geq 4n_1, n_1 \leq \frac{n_2}{4}$

Найдем вторую производную от безразмерного оптического пути $A \equiv \frac{l}{2\pi r_0}$:

$$A \equiv \frac{l}{2\pi r_0} = \frac{r}{r_0}n(z) = zn(z) = z\left(n_1 + (n_2 - n_1)(1-z)^2\right) = zn_2 - 2z^2(n_2 - n_1) + z^3(n_2 - n_1)$$

$$\frac{d^2A}{dz^2} \equiv \frac{d^2}{dz^2}\left(zn_2 - 2z^2(n_2 - n_1) + z^3(n_2 - n_1)\right) = -4(n_2 - n_1) + 6z(n_2 - n_1) = 4(n_2 - n_1)\left(\frac{3}{2}z - 1\right)$$

Условие минимума оптического пути запишем в виде $\frac{d^2A}{dz^2} > 0 \Leftrightarrow n_2 > n_1, \frac{3}{2}z - 1 > 0 \Leftrightarrow z > \frac{2}{3} \Leftrightarrow z_2 = \frac{2}{3}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{3}{4}\left(\frac{n_2}{n_2 - n_1}\right)}\right)$, например, если

$$n_1=\frac{n_2}{4}-\varepsilon,\varepsilon\to 0,n_2-4n_1=4\varepsilon,z_2=\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{1-\frac{3}{4}\left(\frac{n_2}{n_2-n_1}\right)}\right)=\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{1-\frac{3}{4}\left(\frac{4n_1+4\varepsilon}{3n_1+4\varepsilon}\right)}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{1+\frac{\varepsilon}{n_1}}{1+\frac{4}{3n_1}\varepsilon}\right)}\right)\approx\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{1-\left(1+\frac{\varepsilon}{n_1}\right)\left(1-\frac{4}{3n_1}\varepsilon\right)}\right)\approx\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{\frac{\varepsilon}{3n_1}}\right)$$

Если, например,

$$n_1=\frac{n_2}{8},n_2=8n_1,z_2=\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{1-\frac{3}{4}\left(\frac{n_2}{n_2-n_1}\right)}\right)=\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{1-\frac{3}{4}\left(\frac{8n_1}{7n_1}\right)}\right)=\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{1-\frac{6}{7}}\right)=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\Rightarrow$$

$\Rightarrow r=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)r_0$, в общем случае сфера радиусом $r=\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{1-\frac{3}{4}\left(\frac{n_2}{n_2-n_1}\right)}\right)$, $n_2\geq 4n_1$ фокусирует световые лучи как оптический волновод.

## 5. Использование метода подобия и теории размерностей. $\pi$ теорема.

В физических и механических моделях используются размерные величины, например, $\alpha\left[\frac{m^2}{s}\right]$ - коэффициент температуропроводности, $P\left[\frac{kgm^2}{s^3}\right]$- мощность и т.д. Каждая задача характеризуется минимальным множеством величин, от которой зависит решение задачи. Основным результатом в задачах, использующие размерные величины, является теорема подобия, называемая $\pi$ теоремой.

$\pi$- **Теорема.** Пусть некоторая размерная величина $x$ в задаче зависит от $n$ размерных величин $\{x_1,x_2,...x_n\}$, $k$ из которых составляют независимый базис величин в классе однотипных задач $\{x_1,x_2,...x_k\}$.

$$x=F(x_1,x_2,...x_n) \tag{24}$$

Тогда уравнение(24) эквивалентно функциональному уравнению

$\Pi=F(1,1,...,1,\Pi_{k+1},...\Pi_n)$, где $\Pi_{k+1},...\Pi_n$ безразмерные величины

**Доказательство:** Все размерные величины в задаче выражаются через базисные переменные степенными функциями

$x=\Pi a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}...a_k^{\alpha_k}$ где $\Pi$- численное значение величины $x$, $a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}...a_k^{\alpha_k}$- единица размерности величины $x$, $a_1a_2...a_k$- набор независимых базисных размерностей. Выберем набор базисных размерностей $a_1a_2...a_k$ совпадающих с единицами измерения независимого базиса величин, определяющих задачу $x_1x_2...x_k$. Тогда получим зависимость

$$x_1=\Pi_1a_1,x_2=\Pi_2a_2,...,x_k=\Pi_ka_k,x_{k+1}=\Pi_{k+1}a_1^{\alpha_1^{k+1}}a_2^{\alpha_2^{k+1}}...a_k^{\alpha_k^{k+1}},...x_n=\Pi_na_1^{\alpha_1^n}a_2^{\alpha_2^n}...a_k^{\alpha_k^n} \tag{25}$$

Выразим из первых k уравнений (25) базисные размерности и подставим их значения в остальные уравнения (25), получим

$$a_1=\frac{x_1}{\Pi_1},a_2=\frac{x_2}{\Pi_2},...,a_k=\frac{x_k}{\Pi_k}x,x_{k+1}=\Pi_{k+1}\left(\frac{x_1}{\Pi_1}\right)^{\alpha_1^{k+1}}\left(\frac{x_2}{\Pi_2}\right)^{\alpha_2^{k+1}}..\left(\frac{x_k}{\Pi_k}\right)^{\alpha_k^{k+1}},...x_n=\Pi_n\left(\frac{x_1}{\Pi_1}\right)^{\alpha_1^n}\left(\frac{x_2}{\Pi_2}\right)^{\alpha_2^n}...\left(\frac{x_k}{\Pi_k}\right)^n \tag{26}$$

Подставим формулу (26) в уравнение связи(24)

$$x = \Pi a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} ... a_k^{\alpha_k} = \Pi \left( \frac{x_1}{\Pi_1} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{x_2}{\Pi_2} \right)^{\alpha_2} ... \left( \frac{x_k}{\Pi_k} \right)^{\alpha_k} = F(x_1, x_2, ... x_n)$$

$$F(x_1, x_2, ... x_n) = F\left( x_1, x_2, ... x_k, \Pi_{k+1} \left( \frac{x_1}{\Pi_1} \right)^{\alpha_1^{k+1}} \left( \frac{x_2}{\Pi_2} \right)^{\alpha_2^{k+1}} ... \left( \frac{x_k}{\Pi_k} \right)^{\alpha_k^{k+1}}, ..., \Pi_n \left( \frac{x_1}{\Pi_1} \right)^{\alpha_1^n} \left( \frac{x_2}{\Pi_2} \right)^{\alpha_2^n} ... \left( \frac{x_k}{\Pi_k} \right)^n \right) (27)$$

Но в силу независимости базисных размерностей $a_1 a_2 ... a_k$ их можно выбрать такими, изменяя масштаб размерностей, чтобы численные значения первых k величин были единичными (выбор масштабов)

$\Pi_1 = 1, \Leftrightarrow \Pi_2 = 1, ... \Leftrightarrow \Pi_k = 1$

Но уравнение (27) должно оставаться справедливым, если мы заменим размерные величины их числовыми значениями, т.е.

$$F(x_1, x_2, ... x_n) = \Pi \left( \frac{\Pi_1}{\Pi_1} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{\Pi_2}{\Pi_2} \right)^{\alpha_2} ... \left( \frac{\Pi_k}{\Pi_k} \right)^{\alpha_k} F\left( \Pi_1, \Pi_2, ... \Pi_k, \Pi_{k+1} \left( \frac{\Pi_1}{\Pi_1} \right)^{\alpha_1^{k+1}} \left( \frac{\Pi_2}{\Pi_2} \right)^{\alpha_2^{k+1}} ... \left( \frac{\Pi_k}{\Pi_k} \right)^{\alpha_k^{k+1}}, ..., \Pi_n \left( \frac{\Pi_1}{\Pi_1} \right)^{\alpha_1^n} \left( \frac{\Pi_2}{\Pi_2} \right)^{\alpha_2^n} ... \left( \frac{\Pi_k}{\Pi_k} \right)^n \right)$$

$$\Pi = F(1, 1, ... 1, \Pi_{k+1}, ..., \Pi_n) \Leftrightarrow \Pi = F(\Pi_{k+1}, ..., \Pi_n)$$

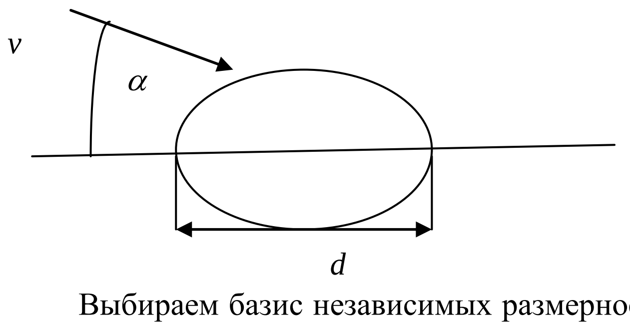
Теорема доказана.

Замечание. В силу $\pi$ теоремы из множества всех размерных переменных $\{x_1, x_2, ... x_n\}$ необходимо составить $n-k$ безразмерных величин $\Pi_{k+1}, ..., \Pi_n$, подставить их в уравнение $\Pi = F(1, 1, ... 1, \Pi_{k+1}, ..., \Pi_n) = F(\Pi_{k+1}, ..., \Pi_n)$, в котором численные безразмерные значения $\Pi, \Pi_{k+1}, ..., \Pi_n$ удовлетворяют размерным формулам $x = \Pi a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} ... a_k^{\alpha_k}$ и

$$x_1 = \Pi_1 a_1, x_2 = \Pi_2 a_2, ..., x_k = \Pi_k a_k, x_{k+1} = \Pi_{k+1} a_1^{\alpha_1^{k+1}} a_2^{\alpha_2^{k+1}} ... a_k^{\alpha_k^{k+1}}, ... x_n = \Pi_n a_1^{\alpha_1^n} a_2^{\alpha_2^n} ... a_k^{\alpha_k^n}$$

Рассмотрим пример движения тела в жидкой среде.

Движение твёрдого тела в жидкости определяется параметрами $d, v, \alpha;$ $\rho, \mu$. Первые три параметра характеризуют движение тела – максимальный диаметр тела, скорость тела относительно набегающей из бесконечности жидкости, угол $\alpha$ характеризует ориентацию оси тела и вектора скорости. Последние параметры - плотность жидкости и молекулярная вязкость. Используя теорию размерности определить силу сопротивления тела жидкому потоку.




Выбираем базис независимых размерностей $a_1[m], a_2 = [kg], ... a_3[s]$ достаточный для описания любой механической задачи. В данной задаче $n = 5, k = 3, n-k = 2$ две независимых безразмерных величин. Запишем размерности всех величин, в том числе и размерность силы $F$:

$$d[m], v\left[\frac{m}{s}\right], \alpha[1]; \quad \rho\left[\frac{kg}{m^3}\right], \mu\left[\frac{kg}{ms}\right], F\left[\frac{kgm}{s^2}\right]$$

Поскольку один безразмерный параметр уже найден – угол $\alpha$, достаточно найти второй безразмерный параметр.

$$d^x v^y \rho^z \mu^t = 1 \Leftrightarrow m^x \left(\frac{m}{s}\right)^y \left(\frac{kg}{m^3}\right)^z \left(\frac{kg}{ms}\right)^t = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m : x + y - 3z - t = 0 \\ kg : z + t = 0 \\ s : -y - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = -t, y = -t, x = t + 3z - y = -t$$

Для удобства выберем $t = 1 \Rightarrow x = y = z = -1$. В результате получаем безразмерную комбинацию, $\frac{\mu}{dv\rho} = \frac{\nu}{dv} = \frac{1}{R}, R = \frac{dv}{\nu}$ где обозначено: $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ кинематическая вязкость жидкости, $\mu$ динамическая вязкость, $\rho$ - плотность жидкости. Величина $R = \frac{dv}{\nu}$ носит название числа Рейнольдса и является безразмерной, как является безразмерной и обратная величина $\frac{1}{R}$. Диаметр тела и скорость жидкого потока на бесконечности обозначены соответственно $d, v$.

Предполагая, что из величин $d, v, \alpha, \rho, \mu$ для определения силы сопротивления жидкому потоку возможны частные случаи групп определяющих переменные задачи - $d, \mu, \alpha, v$ или $d, v, \alpha, \rho$ с помощью теории размерности найдём степени зависимостей $x, y, z, t$

1) $$F\left[\frac{kgm}{s^2}\right] = \Pi d^x v^y \mu^z = \Pi (m)^x \left(\frac{m}{s}\right)^y \left(\frac{kg}{ms}\right)^z \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} kg : 1 = z \\ m : 1 = x + y - z \\ s : -2 = -y - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow F = \Pi dv\mu = dv\mu\, f_1(\alpha, R) \qquad (28)$$

2) $$F\left[\frac{kgm}{s^2}\right] = \Pi d^x v^y \rho^z = \Pi (m)^x \left(\frac{m}{s}\right)^y \left(\frac{kg}{m^3}\right)^z \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} kg : 1 = z \\ m : 1 = x + y - 3z \\ s : -2 = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x = 1 + 3z - y = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow F = \Pi d^2 v^2 \rho = d^2 \rho v^2\, f_2(\alpha, R) \qquad (29)$$

Явный вид функций $f_1(\alpha, R)$, $f_2(\alpha, R)$ можно определить только после подстановки силы сопротивления(28),(29) в физическое дифференциальное либо алгебраическое уравнение и решить его.

## Социальные и экономические модели

Рассмотрим несколько экономических и социальных моделей.

### 1)Модель рынка труда и заработной платы

Произвольное предприятие, у которого за длительный период средняя заработная плата на 1 человека составляет $\overline{n_C}$, среднее число работников на предприятии

$\overline{N}$. Динамику изменения мгновенного числа работников и мгновенной средней заработной платы можно описать системой простых дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dn_C}{dt} = -a\left(N - \overline{N}\right) \\ \frac{dN}{dt} = b\left(n_C - \overline{n_C}\right) \end{cases} \qquad (1)$$

В системе уравнений (1) среднюю заработную плату сокращают, когда численность работников выше среднего значения (знак минус в первом уравнении). Приток работников на предприятии начинает расти, как только зарплата на предприятии выше среднего (знак плюс во втором уравнении).

Введём переменные $N = x + \overline{N}, n_C = y + \overline{n_C} \Rightarrow \frac{dn_C}{dt} = \frac{dy}{dt}, \frac{dN}{dt} = \frac{dx}{dt}$, получим

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -ax \\ \frac{dx}{dt} = by \end{cases} \qquad (2)$$

Находим стационарные точки системы(2), приравнивая правые части нулю $x = y = 0 \Leftrightarrow N = \overline{N}, n_C = \overline{n_C}$.

Дифференцируем первое уравнение по времени и подставим его во второе уравнение системы

$$\ddot{y} + aby = 0 \Leftrightarrow \ddot{y} + \omega^2 y = 0, \omega^2 = ab, y(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0), x(t) = -\frac{1}{a}\frac{dy}{dt} = \frac{A}{a}\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad (3)$$

Решением задачи являются гармонические функции и поскольку $\sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\omega t + \varphi_0)$, то $y(t)$ опережает функцию $x(t)$ на $\frac{\pi}{2}$, т.е. прирост средней стоимости зарплаты опережает прирост численности работников на предприятии на четверть периода. Другими словами в период, когда $N = \overline{N}$ и число работников растёт на предприятии максимальная заработная плата. В период с максимальной численностью работающих зарплата средняя и продолжает убывать и т.д.

## 2)Социальная модель прироста численности населения на планете (логистическая модель).

Разумно предположить, что существует некоторая равновесная численность населения на планете $\overline{N}$. Тогда скорость прироста населения должна содержать множитель $\frac{dN}{dt} \sim \left(1 - \frac{N}{\overline{N}}\right)$. Этот множитель является ограничивающим. Действительно, при $N > \overline{N}$ скорость роста становится отрицательной, при $N < \overline{N}$ население растёт с положительной скоростью, при $N = \overline{N}$ скорость равна нулю, т.е. численность не изменяется. Кроме того, скорость роста прямо пропорциональна числу жителей на планете. В результате получаем простое дифференциальное уравнение:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{\overline{N}}\right) \qquad (4)$$

Правая часть уравнения (4) относительно неизвестной функции $N(t)$ является квадратичной, т.е. нелинейной.

Находим стационарные точки(4) $\left(1-\frac{N(t)}{\overline{N}}\right)=0 \Leftrightarrow N(t)=\overline{N}$ уравнение(4) одно из немногих нелинейных уравнений, которое удаётся решить точно. Перепишем (4) в эквивалентном виде

$$\frac{\overline{N}dN(t)}{N(t)\left(\overline{N}-N(t)\right)}=\alpha dt \Leftrightarrow \left(\frac{1}{N(t)}+\frac{1}{\overline{N}-N(t)}\right)dN=\alpha dt \Leftrightarrow \frac{dN}{N(t)}-\frac{d\left(\overline{N}-N\right)}{\left(\overline{N}-N\right)}=\alpha dt \qquad (5)$$

Уравнение (5) написано в полных дифференциалах и допускает почленное интегрирование

$$d\ln(N)-d\ln\left(\overline{N}-N\right)=d(\alpha t) \Leftrightarrow d\ln\left(\frac{N}{\overline{N}-N}\right)=d(\alpha t)$$

Последнее уравнение перепишем в виде $\frac{N}{\overline{N}-N}=Ce^{\alpha t} \Leftrightarrow N(t)=\frac{\overline{N}Ce^{\alpha t}}{1+Ce^{\alpha t}}$ (6)

Используем начальные условия $N(0)=N_0=\frac{\overline{N}C}{1+C} \Rightarrow C=\frac{N_0}{\overline{N}-N_0}$,

Тогда перепишем (6) $N(t)=\frac{\overline{N}\left(\frac{N_0}{\overline{N}-N_0}\right)e^{\alpha t}}{1+\left(\frac{N_0}{\overline{N}-N_0}\right)e^{\alpha t}}=\frac{N_0\overline{N}}{\left(\overline{N}-N_0\right)e^{-\alpha t}+N_0}$ (7)

Функция, описываемая формулой (7), называется логистической кривой. Проверим основные свойства решения (7): $\frac{N_0\overline{N}}{\left(\overline{N}-N_0\right)e^{-\alpha t}+N_0}\underset{t\to\infty}{\to}\overline{N}$ (при любом начальном значении численности $N_0$, как при $N_0>\overline{N}$, так и при $N_0<\overline{N}$). Другими словами, согласно формуле (7), перенаселение планеты невозможно.

## Биологические модели

### Модель хищник – жертва

Предположим, что в некотором водоёме присутствуют две популяции рыб, например, щуки и караси. Популяция карасей питается исключительно растительностью водоёма (караси), поэтому они могут размножаться независимо от популяции щук, увеличивая численность своей популяции. Щуки питаются карасями, а без популяции карасей быстро вымирают. Уменьшение числа карасей пропорционально как популяции карасей, так и популяции щук, т.е. их произведению. Обозначим численность популяции карасей $N_1$, численность популяции щук $N_2$, тогда динамику взаимодействия двух популяций можно описать системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\frac{dN_1}{dt}=\alpha_1N_1-\beta_1N_1N_2\\ \frac{dN_2}{dt}=-\alpha_2N_2+\beta_2N_1N_2\end{cases} \qquad \alpha_1>0,\alpha_2>0,\beta_1>0,\beta_2>0 \qquad (8)$$

где коэффициенты в первом уравнении $\alpha_1$ показывает экспоненциальный рост популяции карасей в отсутствии щук, $-\beta_1$ численность карасей убывает при встрече со щуками и число встреч прямо пропорционально как числу щук, так и числу карасей. $-\alpha_2$ отрицательный коэффициент во втором уравнении, который определяет экспоненциальное вымирание щук (обратная отрицательная рождаемость) - в отсутствии популяции карасей, $\beta_2$ определяет увеличение популяции щук за счёт поедания карасей, поэтому скорость рождаемости прямо пропорционально произведению численностей популяций щук и карасей.

Найдём стационарные точки системы уравнений (8)

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 \overline{N_1} - \beta_1 \overline{N_1}\,\overline{N_2} = \overline{N_1}\left(\alpha_1 - \beta_1 \overline{N_2}\right) \\ 0 = -\alpha_2 \overline{N_2} + \beta_2 \overline{N_1}\,\overline{N_2} = \overline{N_2}\left(-\alpha_2 + \beta_2 \overline{N_1}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{N_2} = \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} \\ \overline{N_1} = \dfrac{\alpha_2}{\beta_2} \end{cases} \tag{9}$$

Система дифференциальных уравнений (8) является нелинейной относительно переменных $N_1, N_2$. Поэтому для упрощённого анализа необходимо линеаризовать систему(8) в окрестности стационарной точки(9) .Для этого введём новые переменные:

$$N_1 = \overline{N_1} + n_1, N_2 = \overline{N_2} + n_2, \frac{dN_1}{dt} = \frac{dn_1}{dt}, \frac{dN_2}{dt} = \frac{dn_2}{dt} \tag{10}$$

Используя подстановки (10), упростим (8) удерживая слагаемые первого порядка малости по $n_1, n_2$:

$$\begin{cases} \dfrac{dn_1}{dt} = \alpha_1 N_1 - \beta_1 N_1 N_2 = \left(n_1 + \overline{N_1}\right)\left(\alpha_1 - \beta_1\left(n_2 + \overline{N_2}\right)\right) \approx -\beta_1 n_2 \overline{N_1} \\ \dfrac{dn_2}{dt} = -\alpha_2 N_2 + \beta_2 N_1 N_2 = \left(n_2 + \overline{N_2}\right)\left(-\alpha_2 + \beta_2\left(n_1 + \overline{N_1}\right)\right) \approx \beta_2 n_1 \overline{N_2} \end{cases} \tag{11}$$

В линеаризованной системе уравнений (11) первое уравнение дифференцируем по времени и подставляем второе уравнение:

$$\ddot{n}_1 + \beta_1\beta_2 \overline{N_1}\,\overline{N_2} n_1 = 0, \Leftrightarrow \ddot{n}_1 + \omega^2 n_1 = 0, \omega^2 = \beta_1\beta \overline{N_1}\,\overline{N_2}, n_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) = A\cos\left(\sqrt{\beta_1\beta_2 \overline{N_1}\,\overline{N_2}}\, t + \varphi_0\right) \tag{12}$$

Из первого уравнения находим

$$n_2 = \frac{1}{-\beta_1 \overline{N_1}} \frac{dn_1}{dt} = \frac{-A\sqrt{\beta_1\beta_2 \overline{N_1}\,\overline{N_2}}}{-\beta_1 \overline{N_1}} \sin\left(\sqrt{\beta_1\beta_2}\, t + \varphi_0\right) = A\sqrt{\frac{\beta_2 \overline{N_2}}{\beta_1 \overline{N_1}}} \sin\left(\sqrt{\beta_1\beta_2}\, t + \varphi_0\right) \tag{13}$$

Сравнивая формулы (12) и (13) видим, что равновесные отклонения популяций $n_1, n_2$ изменяются со временем по гармоническому закону, а фазы колебаний обеих популяций сдвинуты друг относительно на четверть периода. Можно исследовать фазовый портрет двух популяций, т.е. зависимость $n_2 = n_2(n_1)$. Из формул (12) и (13) получаем следствие:

$$1 = \cos^2\left(\sqrt{\beta_1\beta_2}\, t + \varphi_0\right) + \sin^2\left(\sqrt{\beta_1\beta_2}\, t + \varphi_0\right) = \frac{n_1^{\,2}(t)}{A^2} + \frac{n_2^{\,2}(t)}{\dfrac{\beta_2 \overline{N_2}}{\beta_1 \overline{N_1}} A^2} = 1$$

Отношение полуосей эллипса составляет $\sqrt{\dfrac{\beta_2}{\beta_1}}$. Итак, малые равновесные отклонения популяций представляют собой гармонические колебания.

**Условия существования и единственности решения системы ОДУ.**

**Лабораторная работа №1**
**Трёхмерная разностная схема Рунге – Кутты 4 порядка для интегрирования систем ОДУ. Проверка порядка погрешности.**

Первой вопрос, возникающий при аналитическом исследовании системы дифференциальных уравнений, заключается в определении условий, при которых решение системы ОДУ существует и единственно.

При численном решении системы дифференциальных уравнений первого порядка важно указать условия, при которых численный алгоритм сходится к решению задачи, а также указать порядок погрешности разностной схемы.

Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \qquad ... \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} = f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases}$$

В окрестности произвольной начальной точки $x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}$ правые нелинейные части можно линеаризовать, используя замену переменных: $y_1 = x_1 - x_{10}, y_2 = x_2 - x_{20}, ..., y_n = x_n - x_{n0}$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + \psi_1(t, x_1, ..., x_n) \\ \qquad ... \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + \psi_n(t, x_1, ..., x_n) \end{cases} \tag{1}$$

Пусть $|\psi_i| \le |\gamma(x)||x|,\ |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$, $\lim\limits_{|x| \to 0} \gamma(x) = 0,\ a_{ij} = \dfrac{\partial f_i(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})}{\partial x_j}, i, j = \overline{1, n}$.

Главная часть системы уравнений(1) линейна относительно неизвестных переменных $x_1, x_2, ..., x_n$. Начальные условия $x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}$ с некоторыми условиями на матрицу коэффициентов системы(1) однозначно определяют аналитическое и численное её решение. Будем решать численно систему уравнений(1)методом простой итерации, пренебрегая нелинейной, но малой по норме невязкой $|\psi_i|, i = \overline{1, n}$.

В матричном виде система уравнений(1) эквивалентна векторному уравнению

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX, A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} ... a_{1n} \\ & ... \\ a_{n1} & a_{n2} ... a_{nn} \end{Vmatrix}, X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ .... \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

**Теорема 1**. Пусть в системе уравнений(2)

1) матрица коэффициентов $A$ ограничена по модулю $|a_{i,j}(t)| \le A_{i,j}$, $i, j = \overline{1, n}$ $\forall t > 0$.

Функции $a_{i,j}(t) \in C[a, b]$ непрерывны.

2) Обозначим $\tau = \min\left\{ 1/\|A\|_C, b_1 / \left( \|x\|_C \sum\limits_{j=1}^{n} A_{1j} \right), b_2 / \left( \|x\|_C \sum\limits_{j=1}^{n} A_{2j} \right), ..., b_n / \left( \|x\|_C \sum\limits_{j=1}^{n} A_{nj} \right) \right\}$

Где $\|x\|_C = \max\limits_{i=1,n,|t-t_0|\le\tau} |x_i(t)|, |x_i(t)-x_i(t_0)| \le b_i, x_{i0} \equiv x_i(t_0), i=\overline{1,n}$

Тогда в n+1 мерном прямоугольнике

$|t-t_0| \le \tau, |x_1(t)-x_{10}| \le b_1, |x_2(t)-x_{20}| \le b_2, ..., |x_n(t)-x_{n0}| \le b_n$

метод простой итерации (4) сходится к точному решению(1) и это решение единственно.

**Доказательство**. В силу постановки задачи в левой части системы(1) неизвестные функции $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ дифференцируемы по переменной $t$, следовательно, правая часть (1) – непрерывные функции, тогда в левой части системы(1) непрерывно дифференцируемые функции. Запишем систему уравнений (2) в эквивалентном интегральном виде:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{10} + \int\limits_{t_0}^{t} a_{11}(\tau)x_1(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} a_{12}(\tau)x_2(\tau)d\tau + ... + \int\limits_{t_0}^{t} a_{1n}(\tau)x_n(\tau)d\tau \\ \qquad ... \\ x_n(t) = x_{n0} + \int\limits_{t_0}^{t} a_{n1}(\tau)x_1(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} a_{n2}(\tau)x_2(\tau)dt + ... + \int\limits_{t_0}^{t} a_{nn}(\tau)x_n(\tau)d\tau \end{cases} \qquad (3)$$

Отметим, что интегралы в(3) существуют (по условию(1) теоремы). Следовательно, можно рассматривать сходимость итерационной последовательности решений в пространстве классе непрерывных функций на отрезке $x_i^k(t) \in C[a,b], i=\overline{1,n}, k=1,2,...$

с нормой Чебышева $\|y\|_C = \max\limits_{t\in[a,b]} |y(t)|$.

Точное решение системы уравнений (1) $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t) \in C^1[a,b]$ является дифференцируемым. Но множество аппроксимирующих функций $x_i^k(t)$ в системе уравнений (4), принадлежит классу непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $x_i^k(t) \in C[a,b] \supset C^1[a,b]$ включающий в себя класс дифференцируемых функций:

$$\begin{cases} x_1^{k+1}(t) = x_{10} + \int\limits_{t_0}^{t} a_{11}(\tau)x_1^k(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} a_{12}(\tau)x_2^k(\tau)d\tau + ... + \int\limits_{t_0}^{t} a_{1n}(\tau)x_n^k(\tau)d\tau \\ \qquad ... \\ x_n^{k+1}(t) = x_{n0} + \int\limits_{t_0}^{t} a_{n1}(\tau)x_1^k(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} a_{n2}(\tau)x_2^k(\tau)d\tau + ... + \int\limits_{t_0}^{t} a_{nn}(\tau)x_n^k(\tau)d\tau \end{cases} \qquad (4)$$

Запишем разность уравнений системы уравнений(4) и системы уравнений(3), вычитая уравнения в одинаковых строках:

$$\begin{cases} y_1^{k+1}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} a_{11}(\tau)y_1^k(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} a_{12}(\tau)y_2^k(\tau)d\tau + ... + \int\limits_{t_0}^{t} a_{1n}(\tau)y_n^k(\tau)d\tau \\ \qquad ... \\ y_n^{k+1}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} a_{n1}(\tau)y_1^k(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} a_{n2}(\tau)y_2^k(\tau)d\tau + ... + \int\limits_{t_0}^{t} a_{nn}(\tau)y_n^k(\tau)d\tau \end{cases} \qquad (5)$$

Где $y_i^k(t) = x_i^k(t) - x_i(t), y_i^k(t_0) = 0, i=\overline{1,n}, k=1,2,...$ разность между итерационным решением $x_i^k(t)$ с компонентой $i$ и номером итерации $k$ и соответствующей компонентой точного решения $x_i(t)$. Непрерывные не отрезке функции ограничены по модулю. Обозначим общую константу ограничения $M_k : \max\limits_{i=1,n,0\le\tau\le t} |x_i^k(\tau)| \le M_k, k=0,1,2,...$. Из итерационной системы уравнений(5) следует, что правые части системы непрерывные функции $t$ (если $y_i^k(t)$ непрерывны), то и левые части(5) также непрерывны. Другими словами, если на первой итерации в качестве начального набора функций взять непрерывные функции $y_i^0(t) \in C[a,b], i=\overline{1,n}$, например, $x_i^0(t)=x_{i0}, i=\overline{1,n}$ то все элементы итерационной последовательности $y_i^{k+1}(t) \in C[a,b], i=\overline{1,n}, k=0,1,...$

Оценим невязку каждого из уравнений системы(5), используя свойства нормы и условие(1) теоремы.

$$\left|y_i^{k+1}(t)\right| \le \int_{t_0}^{t}\left|a_{i1}(\tau)\right|\left|y_1^k(\tau)\right|d\tau + \int_{t_0}^{t}\left|a_{i2}(\tau)\right|\left|y_2^k(\tau)\right|d\tau + ... + \int_{t_0}^{t}\left|a_{in}(\tau)\right|\left|y_n^k(\tau)\right|d\tau,\ i=\overline{1,n},\ k=1,2,... \tag{6}$$

$$\left|y_i^{k+1}(t)\right| \le A_{i1}\int_{t_0}^{t}\left|y_1^k(\tau)\right|d\tau + A_{i2}\int_{t_0}^{t}\left|y_2^k(\tau)\right|d\tau + ... + A_{in}\int_{t_0}^{t}\left|y_n^k(\tau)\right|d\tau,\ i=\overline{1,n},\ k=1,2,... \tag{7}$$

Пусть $\max\limits_{i=\overline{1,n},\tau\in[t_0,t]}\left|y_i^k(\tau)\right| = \left\|y^k\right\|_C, \left|y_i^k(t)\right| \le \left\|y^k\right\|_C$ тогда из (7) получим

$$\left|y_i^{k+1}(t)\right| \le A_{i1}\int_{t_0}^{t}\left|y_1^k(\tau)\right|d\tau + A_{i2}\int_{t_0}^{t}\left|y_2^k(\tau)\right|d\tau + ... + A_{in}\int_{t_0}^{t}\left|y_n^k(\tau)\right|d\tau \le \int_{t_0}^{t}\max_{i=\overline{1,n},\tau\in[t_0,t]}\left|y_i^k(\tau)\right|d\tau\sum_{j=1}^{n}A_{ij},\ i=\overline{1,n},\ k=1,2,...$$

$$\left|y_i^{k+1}(t)\right| \le \left(\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\right)\left\|y^k\right\|_C\left|t-t_0\right| \tag{8}$$

Возьмём функцию максимума от формулы(8) по индексу $i$ и по переменной $t$.

$\max\limits_{i=\overline{1,n},\tau\in[t_0,t]}\left|y_i^{k+1}(\tau)\right| = \left\|y^{k+1}\right\|_C \le \max\limits_{i=\overline{1,n}}\left(\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\right)\left\|y^k\right\|_C\left|t-t_0\right|$, поскольку (8) справедливо для любого значения индекса $i$.

В численных методах вводится норма матрицы $\left\|A\right\|_C = \max\limits_{i=\overline{1,n}}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}\right)$ - аналог нормы Чебышева[1]: $\left\|y^{k+1}\right\|_C \le \left\|A\right\|_C\left\|y^k\right\|_C\left|t-t_0\right|$.

Используя теорему о сжимающем отображении в метрических пространствах [3],получим $\left\|y^{k+1}\right\|_C \le q\left\|y^k\right\|, k=1,2,....; 0<q<1 \Leftrightarrow q=\left\|A\right\|_C\left|t-t_0\right|<1, \left|t-t_0\right|<1/\left\|A\right\|_C$. (9)

Формула (9) означает, что при небольших временах во временной полосе $\left|t-t_0\right|<1/\left\|A\right\|_C$ итерационная последовательность непрерывных функций $x_i^k(t)\in C[a,b], i=\overline{1,n}, x_i^k(0)=x_{i0}, k=1,2,...$ сходится к решению системы уравнений (1)(дифференцируемой функции) $x_i(t)\in C^1[a,b],\ x_i(0)=x_{i0}, i=\overline{1,n}, k=1,2,...$

По теореме о сжимающих отображениях, решение задачи (1) единственно. Обычно задаются размеры параллелепипеда, где нужно выделить единственное решение системы уравнений (1) $\left|t-t_0\right|\le\tau, \left|x_1(t)-x_{10}\right|\le b_1, \left|x_2(t)-x_{20}\right|\le b_2,..., \left|x_n(t)-x_{n0}\right|\le b_n$.

Из формулы (9) $\left|t-t_0\right|\le\tau\le 1/\left\|A\right\|_C$, из формулы (3) получим

$$\left|x_i(\tau)-x_{i0}\right| = \left|\int_{t_0}^{t_0+\tau}a_{i1}(t)x_1(t)dt + \int_{t_0}^{t_0+\tau}a_{i2}(t)x_2(t)dt + ... + \int_{t_0}^{t_0+\tau}a_{in}(t)x_n(t)dt\right| \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t_0+\tau}\left|a_{i1}(t)\right|\left|x_1(t)\right|dt + \int_{t_0}^{t_0+\tau}\left|a_{i2}(t)\right|\left|x_2(t)\right|dt + ... + \int_{t_0}^{t_0+\tau}\left|a_{in}(t)\right|\left|x_n(t)\right|dt \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n}A_{ij}\int_{t_0}^{t_0+\tau}\max_{i=1,n,t\in[t_0,t_0+\tau]}\left|x_i(t)\right|dt = \tau\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\left\|x\right\|_C \le b_i \Leftrightarrow$$

$$\tau \le b_i \Big/ \left(\left\|x\right\|_C\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\right),\ i=1,n$$

В итоге для временного масштаба по переменной $t$ нужно взять минимум из следующих $n+1$ величин:

$$\tau = \min\left\{1/\|A\|_C, b_1/\left(\|x\|_C \sum_{j=1}^{n} A_{1j}\right), b_2/\left(\|x\|_C \sum_{j=1}^{n} A_{2j}\right), \ldots, b_n/\left(\|x\|_C \sum_{j=1}^{n} A_{nj}\right)\right\} \le 1/\|A\|_C \qquad (10)$$

Тогда в прямоугольнике $|t-t_0| \le \tau, |x_1(t)-x_{10}| \le b_1, |x_2(t)-x_{20}| \le b_2, \ldots, |x_n(t)-x_{n0}| \le b_n$ существует единственная интегральная кривая - решение системы уравнений (1) проходящая через начальную точку. Теорема существования и единственности для задачи (1) доказана.

При составлении программы нам понадобится одна из векторных норм, например, можно выбрать $\|x\| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ [3]. Проверим 3 аксиомы для выбранной нами нормы:

1) $0 \le \|x\|, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x_i = 0, x = "0" \in R^n$ ,т.е. нулевой элемент линейного пространства $R^n$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \forall \lambda \in R, \forall x \in X \Leftrightarrow \|x\lambda\| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i\lambda| = |\lambda|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i| = |\lambda|\|x\|$

3) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X \Leftrightarrow \|x+y\| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i + y_i| \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(|x_i| + |y_i|) =$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i| + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|y_i| = \|x\| + \|y\|.$

В программе в качестве теста решена система ОДУ (пример 808 из задачника А.Ф. Филиппова[2]):

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = x - y + z = f_1(x, y, z) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = x + y - z = f_2(x, y, z) \\ \dfrac{dz(t)}{dt} = 2x - y = f_3(x, y, z) \end{cases}$$

В данной задаче векторное пространство имеет размерность $n = 3$.Для оценки погрешности используется указанная выше норма, в силу её простоты программирования.

Для интегрирования системы дифференциальных уравнений составлен векторный аналог численной схемы Рунге – Кутты 4 порядка для решения дифференциального уравнения с 1 неизвестной функцией.

$$k_{11} = f_1(t, x, y, z), k_{21} = f_2(t, x, y, z), k_{31} = f_3(t, x, y, z)$$

$$k_{12} = f_1(t + h/2, x + (h/2)k_{11}, y + (h/2)k_{21}, z + (h/2)k_{31}), k_{22} = f_2(t + h/2, x + (h/2)k_{11}, y + (h/2)k_{21}, z + (h/2)k_{31})$$

$$k_{32} = f_3(t + h/2, x + (h/2)k_{11}, y + (h/2)k_{21}, z + (h/2)k_{31}), k_{13} = f_1(t + h/2, x + (h/2)k_{12}, y + (h/2)k_{22}, z + (h/2)k_{32})$$

$$k_{23} = f_2(t + h/2, x + (h/2)k_{12}, y + (h/2)k_{22}, z + (h/2)k_{32}), k_{33} = f_3(t + h/2, x + (h/2)k_{12}, y + (h/2)k_{22}, z + (h/2)k_{32})$$

$$k_{14} = f_1(t + h, x + hk_{13}, y + hk_{23}, z + hk_{33}), k_{24} = f_2(t + h, x + hk_{13}, y + hk_{23}, z + hk_{33}), k_{34} = f_2(t + h, x + hk_{13}, y + hk_{23}, z + hk_{33})$$

$$x^{k+1} = x^k + \frac{h}{6}(k_{11} + 2(k_{12} + k_{13}) + k_{14}), y^{k+1} = y^k + \frac{h}{6}(k_{21} + 2(k_{22} + k_{23}) + k_{24})$$

$$z^{k+1} = z^k + \frac{h}{6}(k_{31} + 2(k_{32} + k_{33}) + k_{34}) \qquad (11)$$

Шаг интегрирования $h = (b-a)/n, a = 0, b = 1.0$.Точное решение соответствующее начальным условиям $x(0) = 3, y(0) = -2, z(0) = -3$ есть

$x(t) = \exp(t) + \exp(2t) + \exp(-t), y(t) = \exp(t) - 3\exp(-t), z(t) = \exp(t) + \exp(2t) - 5\exp(-t)$

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
```

```
int const n=50,n1=40,m=n/n1;
double f1(double t,double x,double y,double z);
double f2(double t,double x,double y,double z);
double f3(double t,double x,double y,double z);
int main()
{
int i,k,ll;
double k11,k12,k13,k21,k22,k23,k31,k32,k33,k14,k24,k34;
double x,y,z,max;
double res[11][n1+1],h,a,b,t,pi,xn,yn,zn;
max=1000.0;
x=3.0;
y=-2.0;
z=-3.0;
a=0.0;
b=1.0;
h=(b-a)/double(n);
k=0;
t=a;
 res[0][0]=t;
res[1][0]=x;
 res[2][0]=y;
 res[3][0]=z;
for(i=1;i<=n;i++)
{
k11=f1(t,x,y,z);
k21= f2(t,x,y,z);
k31= f3(t,x,y,z);
k12= f1(t+h/2.0,x+h*k11/2.0,y+h*k21/2.0,z+h*k31/2.0);
k22= f2(t+h/2.0,x+h*k11/2.0,y+h*k21/2.0,z+h*k31/2.0);
k32= f3(t+h/2.0,x+h*k11/2.0,y+h*k21/2.0,z+h*k31/2.0);
k13= f1(t+h/2.0,x+h*k12/2.0,y+h*k22/2.0,z+h*k32/2.0);
k23= f2(t+h/2.0,x+h*k12/2.0,y+h*k22/2.0,z+h*k32/2.0);
 k33= f3(t+h/2.0,x+h*k12/2.0,y+h*k22/2.0,z+h*k32/2.0);
 k14= f1(t+h, x+h*k13,y+h*k23,z+h*k33);
 k24= f2(t+h, x+h*k13,y+h*k23,z+h*k33);
k34= f3(t+h, x+h*k13,y+h*k23,z+h*k33);
x=x+h*(k11+2.0*(k12+k13) +k14)/6.0;
y=y+h*(k21+2.0*(k22+k23) +k24)/6.0;
z=z+h*(k31+2.0*(k32+k33) +k34)/6.0;
 t=t+h;
if(i%m==0)
{
k=k+1;
 res[0][k]=t;
 res[1][k]=x;
 res[2][k]=y;
 res[3][k]=z;
 res[4][k]=exp(t)+exp(2.0*t)+exp(-t);
 res[5][k] =exp(t)-3.0*exp(-t);
 res[6][k] =exp(t)+exp(2.0*t)-5.0*exp(-t);
 res[7][k]=res[4][k]-res[1][k];
```

```
 res[8][k] =res[5][k]-res[2][k];
res[9][k] =res[6][k]-res[3][k];
}
if(res[7][k]<0.0)
 {
res[7][k]=-res[7][k];
 }
else if(res[8][k]<0.0)
 {
res[8][k]=-res[8][k];
}
 else if(res[9][k]<0.0)
{
res[9][k]=-res[9][k];
}
res[10][k]=res[7][k]+res[8][k]+res[9][k];
}
ll=k;
printf("k=%d\n",ll);
for(i=0;i<=ll;i++)
{
if(res[10][i]<max)
max=res[10][i];
}
for(i=0;i<=n1;i++)
{
 printf("t=%.16lf\n", res[0][i])
printf("x=%.16lf x(exact)=%.16lf delta=%.16lf\n",res[1][k], res[4][k], res[1][k]-res[4][k]);
printf("y=%.16lf y(exact)=%.16lf delta=%.16lf \n",res[2][k], res[5][k], res[2][k]-res[5][k]);
printf("z=%.16lf z(exact)=%.16lf delta=%.16lf \n",res[3][k], res[6][k], res[3][k]-res[6][k]);
}
 printf("result:\n");
 printf("t=%.16lf\n", res[0][n1]);
printf("x=%.16lf x(exact)=%.16lf delta=%.16lf\n",res[1][n1], res[4][n1], res[1][n1]-res[4][n1]);
printf("y=%.16lf y(exact)=%.16lf delta=%.16lf \n",res[2][n1], res[5][n1], res[2][n1]-res[5][n1]);
printf("z=%.16lf z(exact)=%.16lf delta=%.16lf \n",res[3][n1], res[6][n1], res[3][n1]-res[6][n1]);
printf("max norma|x|1=%.16lf \n",max/3.0);
}
double f1(double t, double x, double y, double z)
{
return x+z-y ;
}
double f2(double t, double x, double y, double z)
{
return x+y-z;
}
double f3(double t, double x, double y, double z)
{
return 2.0*x-y;
}
```

При n=50 программа возвращает норму погрешности

max norma|x|1=0.0000000090470456

Press any key to continue
При n=100 программа возвращает норму погрешности
 max norma|x|1=0.0000000005739554
Press any key to continue
Найдём порядок погрешности
$\frac{\|x(n=50)\|_1}{\|x(n=100)\|_1} = \frac{0.0000000090470456}{0.0000000005739554} = 15.76 \approx 2^4 = 16$, т.е. порядок погрешности равен 4.

Отметим, что в одномерном случае численная схема даёт 4 порядок погрешности также приближённо. Поэтому векторный вариант схемы Рунге – Кутты 4 порядка полностью эквивалентен одномерной схеме Рунге – Кутты 4 порядка.

Литература:


1) Н.Н. Калиткин. Численные методы. – М.: Наука, 1978 г. 512 с.
2) А.Ф.Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.- М. , Наука, 1992(издание седьмое). – 128 с.
3) А.Н. Колмогоров, С.В.Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. 508 с.


## Лабораторная работа №2. Исследование нелинейных моделей. Бифуркация Андронова – Хопфа.

Для систем нелинейных уравнений нет общих методов для поиска их решений. В отличие от систем линейных уравнений зачастую невозможно ответить даже на самые общие вопросы, касающихся решений нелинейных систем уравнений: существование решения, единственность решения, устойчивость решения. И, конечно, аналитические решения систем нелинейных уравнений можно получить в отдельных единичных случаях. Одним из примеров, когда можно качественно проанализировать решение нелинейной системы уравнений является модель Андронова – Хопфа.

Рассмотрим динамику нелинейной однопараметрической (где $\alpha$ - параметр) системы уравнений, описывающей бифуркацию Андронова – Хопфа.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 - x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right) \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 - x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right) \end{cases} \tag{1}$$

Перейдём в полярную систему координат

$x_1 = r\cos(\varphi), x_2 = r\sin(\varphi)$, тогда для дифференциалов $dx_1, dx_2$ получим:

$dx_1 = dr\cos(\varphi) - r\sin(\varphi)d\varphi, x_2 = dr\sin(\varphi) + r\cos(\varphi)d\varphi$, а для производных координат точки по времени получим формулы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{r}\cos(\varphi) - r\sin(\varphi)\dot{\varphi} = \alpha x_1 - x_2 - x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right) \\ \dot{x}_2 = \dot{r}\sin(\varphi) + r\cos(\varphi)\dot{\varphi} = x_1 + \alpha x_2 - x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r}\cos(\varphi) - r\sin(\varphi)\dot{\varphi} = \alpha r\cos(\varphi) - r\sin(\varphi) - r^3\cos(\varphi) \\ \dot{r}\sin(\varphi) + r\cos(\varphi)\dot{\varphi} = r\cos(\varphi) + \alpha r\sin(\varphi) - r^3\sin(\varphi) \end{cases} \tag{2}$$

В системе уравнений (2) первое уравнение умножим на $\cos(\varphi)$, второе уравнение на $\sin(\varphi)$ и сложим полученные строки:

$\dot{r} = \alpha r - r^3$

Из второго уравнения системы уравнений (2), умноженного на функцию $\cos(\varphi)$, вычтем первое уравнение, умноженное на функцию $\sin(\varphi)$:

$r\dot{\varphi} = r \Leftrightarrow \dot{\varphi} = 1 \Leftrightarrow \varphi(t) = t + \varphi_0$, т.е. имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r - r^3 = r\left(\alpha - r^2\right) \\ \varphi(t) = t + \varphi_0 \end{cases} \qquad (3)$$

Анализируем систему уравнений (3) на существование предельных точек либо предельных циклов и их устойчивость. Решаем уравнение $r\left(\alpha - r^2\right) = 0$.

Если 1) $\alpha < 0 \Leftrightarrow r_1 = 0$, если 2) $\alpha > 0 \Leftrightarrow r_1 = 0, r_2 = \sqrt{\alpha}$.

В первом случае имеем устойчивую предельную точку $r_1 = 0$, так как при увеличении радиуса $r > 0$ правая часть первого уравнения системы (3) отрицательна, т.е. радиус со временем уменьшается и стремится к 0.

Во втором случае имеем устойчивый предельный цикл $r_2 = \sqrt{\alpha}$ и неустойчивую предельную точку $r_1 = 0$. Действительно, при незначительном отклонении точки от начала координат величина $r\left(\alpha - r^2\right) > 0$ и радиус ( модуль радиус - вектора точки) со временем растёт, всё больше отдаляясь от начала координат, т.е. точка $r_1 = 0$ в данном случае неустойчива. Если $r > r_2 = \sqrt{\alpha}, y = r - \sqrt{\alpha}, y > 0$, правая часть (3) $\left(y + \sqrt{\alpha}\right)\left(\alpha - \left(y + \sqrt{\alpha}\right)^2\right) = \left(y + \sqrt{\alpha}\right)\left(-2y\sqrt{\alpha} - y^2\right) < 0$, т.е. точка со временем приближается к предельному циклу $r = \sqrt{\alpha}$ со стороны больших радиусов.

Аналогично, при $y < 0, y \to 0$:

$\left(y + \sqrt{\alpha}\right)\left(-2y\sqrt{\alpha} - y^2\right) \to -2\alpha y > 0$ и динамическая точка приближается к предельному циклу $r = \sqrt{\alpha}$ со стороны меньших радиусов из внутренней части круга к окружности

Таким образом, предельный цикл $r = \sqrt{\alpha}, \alpha > 0$ является устойчивым. Но переход от предельной устойчивой точки $r = 0, \alpha \le 0$ к устойчивому предельному циклу является плавным при непрерывном изменении параметра $\alpha$ в точке $\alpha = 0$ (мягкая потеря устойчивости).

Будем решать систему уравнений (1) численно, используя векторный алгоритм Рунге – Кутты 4 порядка:

$$k_{11} = f_1(t,x,y,z), k_{21} = f_2(t,x,y,z)$$
$$k_{12} = f_1(t+h/2, x+(h/2)k_{11}, y+(h/2)k_{21}), k_{22} = f_2(t+h/2, x+(h/2)k_{11}, y+(h/2)k_{21})$$
$$k_{32} = f_3(t+h/2, x+(h/2)k_{11}, y+(h/2)k_{21}), k_{13} = f_1(t+h/2, x+(h/2)k_{12}, y+(h/2)k_{22})$$
$$k_{23} = f_2(t+h/2, x+(h/2)k_{12}, y+(h/2)k_{22}), k_{33} = f_3(t+h/2, x+(h/2)k_{12}, y+(h/2)k_{22})$$
$$k_{14} = f_1(t+h, x+hk_{13}, y+hk_{23}), k_{24} = f_2(t+h, x+hk_{13}, y+hk_{23}), k_{34} = f_2(t+h, x+hk_{13}, y+hk_{23})$$
$$x^{k+1} = x^k + \frac{h}{6}\left(k_{11} + 2\left(k_{12} + k_{13}\right) + k_{14}\right), y^{k+1} = y^k + \frac{h}{6}\left(k_{21} + 2\left(k_{22} + k_{23}\right) + k_{24}\right)$$

Шаг интегрирования $h = (b-a)/n, a = 0, b = 2.0, n = 100000$, $a, b$ - начальный и конечный моменты времени соответственно. Все переменные, за исключением целочисленных переменных цикла имеют действительный тип с двойной точностью. Параметр m равен числу точек на графике. Т.е. точки из массива решений выводятся на график с периодомn1=1000.

```
#include<stdio.h>
#include<iostream>
```

```
#include<fstream>
#include<algorithm>
#include<stdlib.h>
#include<vector>
#include<iterator>
#include<math.h>
int const n=100000,n1=1000,m=n/n1;
double f1(double t, double x, double y);
double f2(double t, double x, double y);
int main()
{
int i,k;
double k11,k12,k13,k14,k21,k22,k23,k24;
double x,y;
double res[6][n1+1],h,a,b,t,pi;
pi=2.0*asin(1.0);
a=0.0;
b=20.0;
h=(b-a)/double(n);
k=0;
x=1.0;
y=0.0;
t=a;
res[1][0]=t;
res[2][0]=x;
res[3][0]=y;
for(i=1;i<=n;i++)
{
k11=f1(t,x,y);
k21= f2(t,x,y);
k12= f1(t+h/2.0,x+h/2.0*k11,y+h/2.0*k21);
k22=f2(t+h/2.0,x+h/2.0*k11,y+h/2.0*k21);
k13= f1(t+h/2.0,x+h/2.0*k12,y+h/2.0*k22);
k23=f2(t+h/2.0,x+h/2.0*k12,y+h/2.0*k22);
k14= f1(t+h,x+h*k13,y+h*k23);
k24= f2(t+h,x+h*k13,y+h*k23);
x=x+h*(k11+2.0*(k12+k13)+k14)/6.0;
y=y+h*(k21+2.0*(k22+k23)+k24)/6.0;
t=t+h;
if(i%m==0)
{
k=k+1;
 res[2][k]=x;
 res[3][k]=y;
 res[1][k]=t;
printf("x(%.2lf)=%.8lf y(%.2lf)=%.8lf \n",t,x,t,y,t);
 }
}
remove("105.txt");
FILE*file;
file=fopen("105.txt","w");
```

```
for(i=0;i<=n1;i++)
{
fprintf(file,"%.16lf   %.16lf \n", res[2][i], res[3][i]) ;
}

fclose(file);
}
double f1(double t, double x, double y)
{
return 0.25*x-y-x*(x*x+y*y);
}

double f2(double t, double x, double y)
{
return x+0.25*y-y*(x*x+y*y);
}
```

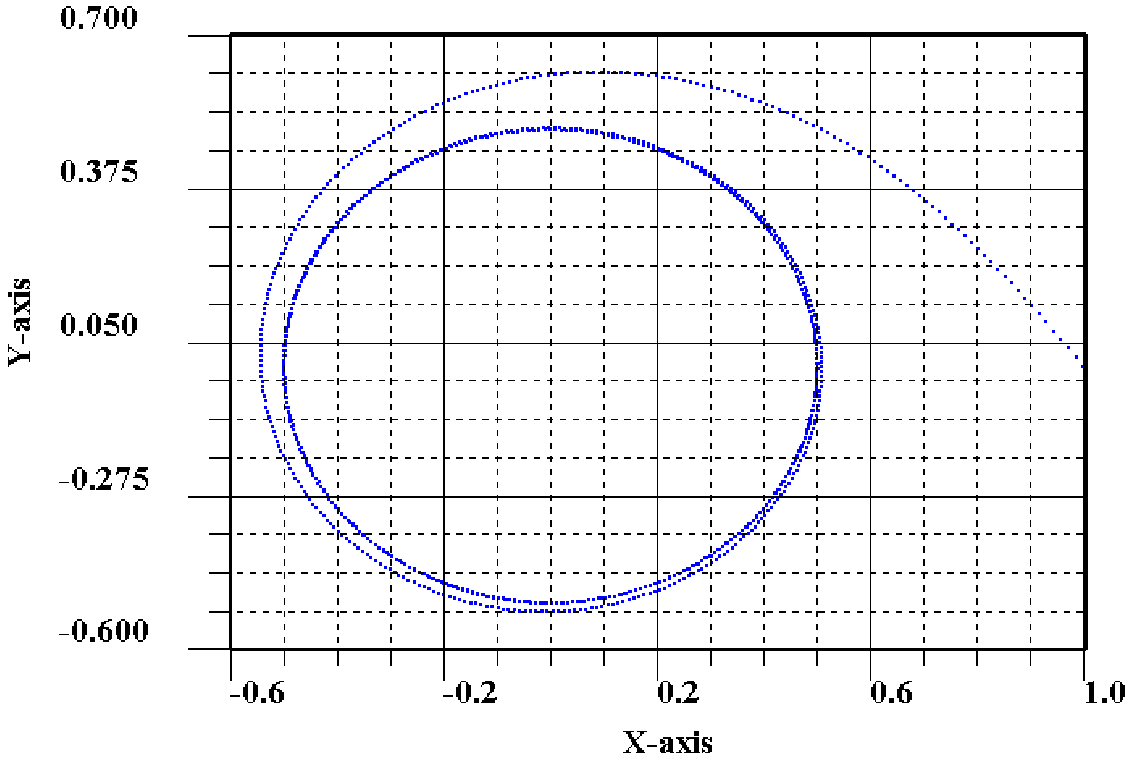



Рис.1. Фазовый портрет бифуркации Хопфа – Андронова с начальными условиями

$\alpha = 0.25; x = 1.0; y = 0.0$ (начальная точка находится вне предельного цикла $r = 0.5$).

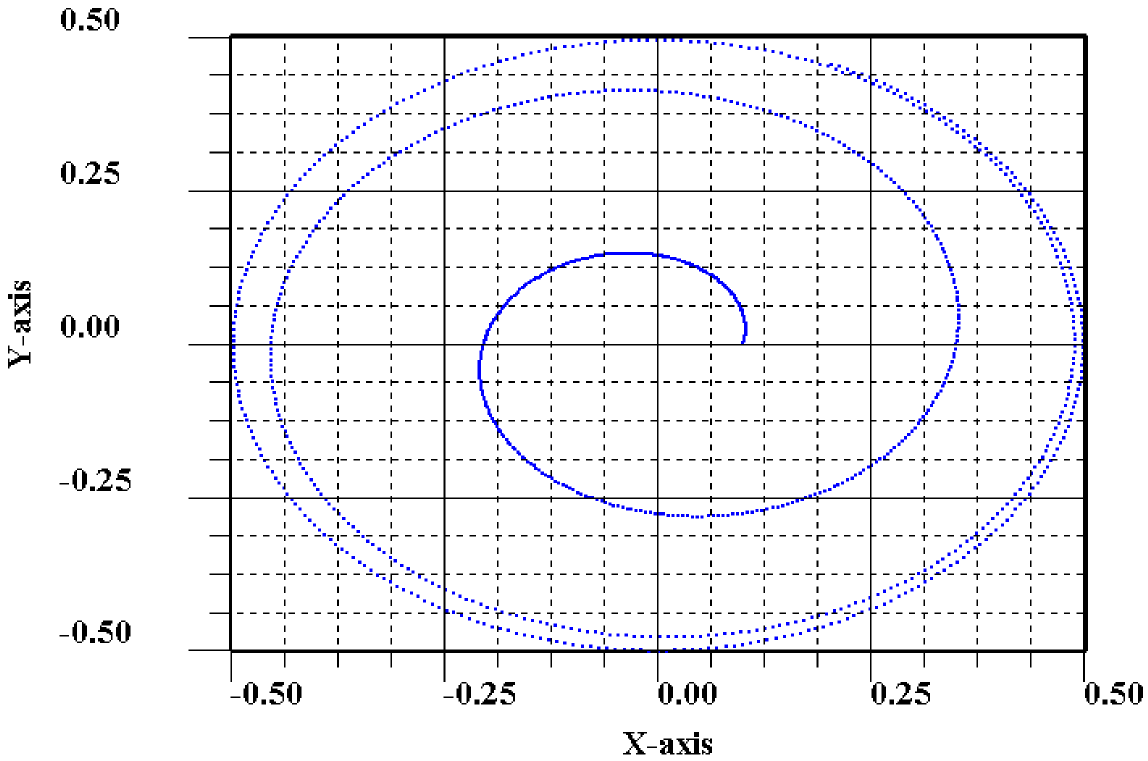



Рис.2. Фазовый портрет бифуркации Хопфа – Андронова с начальными условиями

$\alpha = 0.25; x = 0.1; y = 0.0$ (начальная точка находится внутри предельного цикла $r = 0.5$).

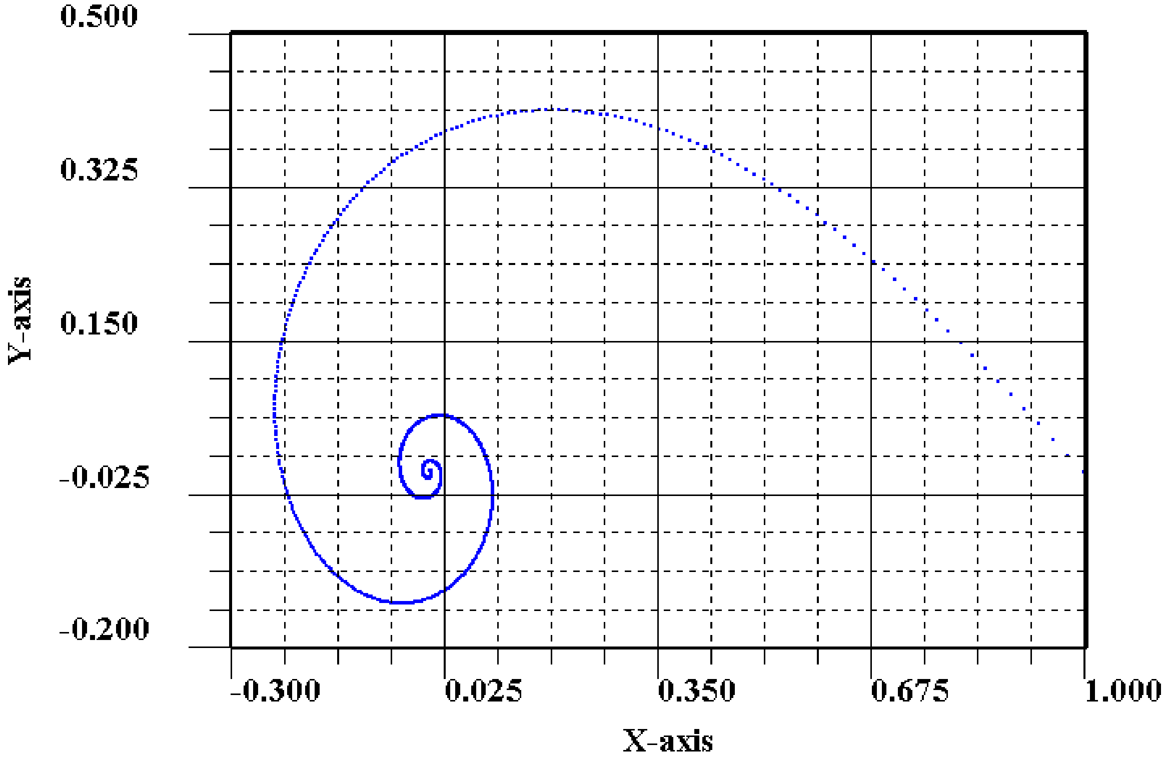



Рис.3. Фазовый портрет бифуркации Хопфа – Андронова с начальными условиями

$\alpha = -0.25; x = 1.0; y = 0.0$ (начальная точка находится на расстоянии $r = 1.0$ от начала координат).

Видно, что все свойства решений системы уравнений Хопфа – Андронова, полученные аналитическим и численным методом, полностью совпадают.

Литература:


1) А.Ф.Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.- М. , Наука, 1992(издание седьмое). – 128 с.


**Система дифференциальных уравнений 1 порядка с двумя неизвестными функциями. Собственные векторы, собственные направления и собственные значения.**

Рассмотрим простейшую систему дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями

$$\begin{cases} \dot{x} \equiv \dfrac{dx(t)}{dt} = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) \\ \dot{y} \equiv \dfrac{dy(t)}{dt} = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) \end{cases} \qquad (1)$$

В системе уравнений(1) коэффициенты $a_{ij}, i, j = 1,2$ постоянны.

Очевидно, (1) удовлетворяет экспоненциальное решение вида

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t}, y(t) = C_2 e^{\lambda t} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) \\ \lambda y(t) = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)C_1 + a_{12}C_2 = 0 \\ a_{21}C_1 + (a_{22} - \lambda)C_2 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Характеристическое уравнение (3) является следствием того, что среди решений(2) однородной линейной системы уравнений мы ищем нетривиальные решения $C_1^2 + C_2^2 \neq 0 \Leftrightarrow \det(A_{i,j} - \lambda\delta_{i,j}) = 0$.

Запишем характеристическое уравнение, задаваемое коэффициентами(1)

$$\det(A_{i,j} - \lambda\delta_{i,j}) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0 \Leftrightarrow \qquad (3)$$

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

Отсюда собственные значения задачи (1):

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2} \qquad (4)$$

Как видно, числа $C_1, C_2$ - являются компонентами собственного вектора в задаче (5):

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)C_1 + a_{12}C_2 = 0 \\ a_{21}C_1 + (a_{22} - \lambda)C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Подставим собственные значения (4) в формулу (5):

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a_{11} - a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2} & a_{12} \\ a_{21} & \dfrac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Например, $C_1 = a_{12}, C_2 = -\dfrac{a_{11} - a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2}$. Тогда угловой коэффициент наклона собственного вектора равен

$$k = \frac{C_2}{C_1} = -\frac{a_{11} - a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2a_{12}} \qquad (6)$$

(плюс и минус соответствуют 2 разным собственным векторам для неравных собственных значений).

**Определение 1.** Прямая $y = kx$ называется собственным направлением семейства интегральных кривых для (1), если она является решением системы уравнений (1).

**Теорема 1.** Особые направления системы уравнений (1) параллельны собственным векторам.

**Доказательство**. Согласно определению 1 прямая проходящая через начало координат является решением системы уравнений (1). Поэтому подставим решение $y = kx$ в фазовое уравнение, следствие системы(1), явно не зависящее от времени:

$$\begin{cases} \dot{x} \equiv \dfrac{dx(t)}{dt} = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) \\ \dot{y} \equiv \dfrac{dy(t)}{dt} = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d(kx)}{dx} = k = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y} = \frac{a_{21} + a_{22}k}{a_{11} + a_{12}k} \tag{7}$$

Уравнение (7) является квадратным относительно углового коэффициента

$$a_{12}k^2 + k(a_{11} - a_{22}) - a_{21} = 0 \tag{8}$$

Решая уравнение (8), получим:

$$k = \frac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2a_{12}} \tag{9}$$

Но формула (9) совпадает с формулой (6). То есть нами показано, что угловые коэффициенты особых направлений и собственных векторов системы уравнений(1) равны. Теорема 1 доказана.

**Теорема 2**. Система уравнений (1) не содержит особых точек кроме начала координатной системы. Тогда в случае действительных собственных значений особые направления системы уравнений (1) разбивают фазовую плоскость на угловые секторы, являющимися недостижимыми границами для интегральных кривых, отличных от особых направлений.

**Замечание.** Как видно из формулы (9) угловой коэффициент особого направления $\bar{k}$ является комплексным числом, если $a_{12}a_{21} < 0, u\,|a_{11} - a_{22}| < 2\sqrt{-a_{12}a_{21}}$. В остальных случаях $\bar{k}$ действительно. Т.е. теорема рассматривает только действительные значения $\bar{k}$.

**Доказательство**. Постоим рекуррентную последовательность.

Согласно(7) и Теореме(1)(стр.21)

$\tau = \min\left\{1/\|A\|_C, b_1 / \left( \|x\|_C \sum_{j=1}^{n} A_{1j} \right), b_2 / \left( \|x\|_C \sum_{j=1}^{n} A_{2j} \right), \ldots, b_n / \left( \|x\|_C \sum_{j=1}^{n} A_{nj} \right) \right\} = 1/\|A\|_C$ (будем считать, что на временной допустимый промежуток нет ограничений кроме матрицы системы уравнений(7)). Тогда из (7)

$$\begin{cases} |\Delta x(t)| \le (|a_{11}||x(t)| + |a_{12}||y(t)|)\tau = (|a_{11}||x(t)| + |a_{12}||y(t)|)/\|A\|_C \\ |\Delta y(t)| \le (|a_{21}||x(t)| + |a_{22}||y(t)|)\tau = (|a_{21}||x(t)| + |a_{22}||y(t)|)/\|A\|_C \end{cases}$$

(10)

Выберем начальную точку $(x_0^k, y_0^k), k = 0,1,2,\ldots$, принадлежащую особой прямой, т.е. $y_0^k = \bar{k}x_0^k$. По теореме существования и единственности решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений в достаточно малом временном интервале $\Delta t:\ \Delta t_k = \min\{1/\|A\|_C, b_1^k/((M|a_{11}| + |a_{12}|)), b_2^k/(M|a_{21}| + |a_{22}|)\}$

$$\|A\|_C = \max\{|a_{11}| + |a_{12}|, |a_{21}| + |a_{22}|\}, M = \max\{\|x\|_C, \|y\|_C\}, \|x\|_C = \max_{|x(t) - x_0| \le b_1^k} |x(t)|, \|y\|_C = \max_{|y(t) - y_0| \le b_2^k} |y(t)|$$

найдётся криволинейный 4 - угольник с центром $t = t_0^k, x_0^k = x(t_0^k), y_0^k = y(t_0^k)$, ограниченными линиями $x_a^k = x(t_0 - \Delta t), x_b^k = x(t_0 + \Delta t), y_a^k = y(t_0 - \Delta t), y_b^k = y(t_0 + \Delta t)$, с единственным решением задачи. В прямоугольнике можно выбрать круг радиуса $\varepsilon_k = \min\{b_1^k, b_2^k\}$ с окрестностью $O^{\varepsilon_k}(x_0^k, y_0^k), y_0^k = \bar{k}x_0^k$, в которой решение системы ОДУ единственно. Если расстояние между центрами соседних в последовательности окрестностей $\sqrt{\left(y_0^{k+1} - y_0^k\right)^2 + \left(x_0^{k+1} - x_0^k\right)^2} = \left|x_0^{k+1} - x_0^k\right|\sqrt{\bar{k}^2 + 1} < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, тогда центр каждой следующей окрестности накрывается круговой областью единственности решения с предыдущей итерации.

Действительно, согласно (10) на особой прямой $\Delta y = k\Delta x$ имеем

$$\begin{cases} |\Delta x(t)| \le (|a_{11}||x(t)| + |a_{12}||y(t)|)\tau = (|a_{11}| + |a_{12}|k)/|x(t)|/\|A\|_C \Leftrightarrow |\Delta x(t)|/|x(t)| \le (|a_{11}| + |a_{12}|k)/\|A\|_C \\ |\Delta y(t)| \le (|a_{21}| + |a_{22}|k)|\Delta x(t)| \le (|a_{21}| + |a_{22}|k)(|a_{11}| + |a_{12}||k|)|x(t)|/\|A\|_C \Leftrightarrow |\Delta y(t)|/\Delta x(t) = (|a_{21}| + |a_{22}|k) \end{cases}$$

Но $|\Delta x(t)|/|x(t)| \le (|a_{11}| + |a_{12}|k)/\|A\|_C \Leftrightarrow |\Delta x(t)| \to \infty \Leftrightarrow |x(t)| \to \infty(|\Delta x(t)| \to 0 \Leftrightarrow |x(t)| \to 0)$,

$|\Delta y(t)|/\Delta x(t) = (|a_{21}| + |a_{22}|k), |\Delta y(t)| \to \infty \Leftrightarrow |x(t)| \to \infty(|\Delta y(t)| \to 0 \Leftrightarrow |x(t)| \to 0)$

Поэтому такими перекрывающимися круговыми (квазипрямоугольными $(\Delta x(t), \Delta y(t))$) окрестностями можно покрыть всю прямую особого направления, от координатного начала до бесконечно удаленной точки, т.е. в некоторой сколь угодно малой полосе, содержащей особую прямую решение задачи (1) единственно.

Поскольку особая прямая является по определению решением системы уравнений (1), то из единственности решения в узкой полосе, содержащей особую прямую, интегральная кривая, не совпадающая с особой прямой, не может её пересечь. Следовательно, всё семейство интегральных кривых на плоскости разбивается особыми направлениями на угловые секторы, полностью содержащие свои интегральные кривые. **Теорема 2** доказана.

Рассмотрим пример № 976 А.Ф.Филиппов Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Исследовать особые точки системы уравнений $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = -x + y \end{cases} A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$.

Находим особые направления $y = kx, \dfrac{dy}{dx} = k$,

$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = -x + y \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = k = \dfrac{-x + kx}{3x + kx} \Leftrightarrow k^2 + 2k + 1 = 0, (k+1)^2 = 0, k = -1$. Т.е в данном случае имеем вырожденный случай с совпадением особых прямых и нахождением интегральных кривых в двух полуплоскостях. Найдём собственные числа.

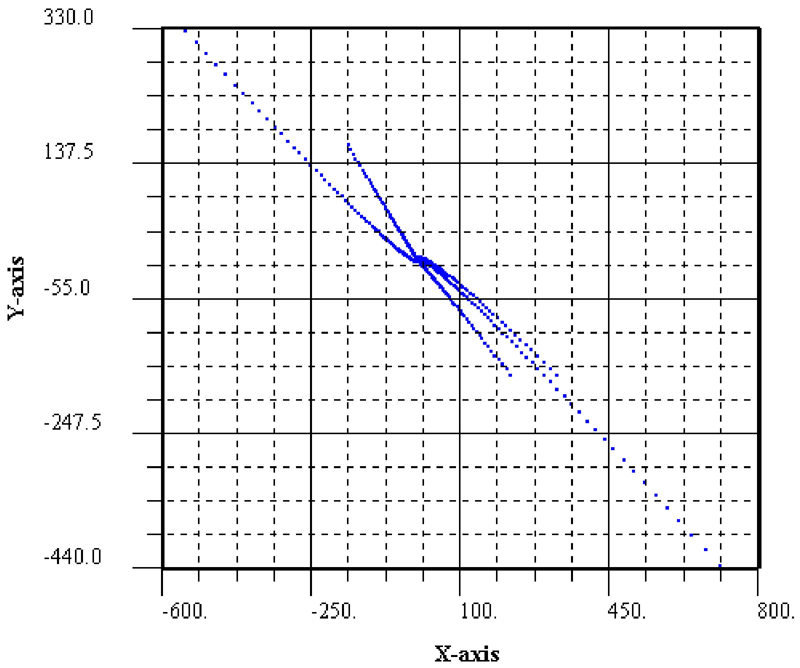
$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0$$

Решение системы уравнений ищем в виде $x(t) = (a + bt)e^{2t}, y(t) = (c + dt)e^{2t}$, которое подставим в исходную систему уравнений, сокращая на $e^{2t}$, получим систему алгебраических уравнений верную для любого значения $t$.

$$\begin{cases} b + 2a + 2bt = 3a + c + (3b + d)t \\ d + 2c + 2dt = -a + c + (d - b)t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + 2a = 3a + c \\ d + 2c = c - a \\ 2b = 3b + d \\ 2d = d - b \end{cases} \Leftrightarrow a = C_1, b = C_2, c = b - a = C_2 - C_1, d = -b = -C_2$$

$x(t) = (a + bt)e^{2t} = (C_1 + C_2 t)e^{2t}, y(t) = (C_2 - C_1 - C_2 t)e^{2t}$, где $C_1$ $C_2$ - произвольные постоянные, определяющие двухпараметрическое семейство решений. Угловой коэффициент радиус – вектора интегральной кривой в асимптотике при $t \to \pm\infty$:

$y(t)/x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{2t} = (C_2 - C_1 - C_2 t)e^{2t} / (C_1 + C_2 t)e^{2t} = -1$, т.е. в асимптотике интегральные кривые приближаются к особым прямым. Действительно, нами получены угловые коэффициенты особых прямых $k = -1$.




Интегральные кривые сгущаются к особой прямой , проходящей через начало координат с угловым коэффициентом $k = -1$, как видно из рисунка.

## Лабораторная работа №3
## Критерий устойчивости Михайлова

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + \psi_1(t, x_1,..., x_n) = 0 \\ .................................................................................... \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + \psi_n(t, x_1,..., x_n) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Система уравнений(1) линейна относительно неизвестных переменных $x_1, x_2,..., x_n$. Любую нелинейную систему ОДУ первого порядка можно свести к (1) в переменных $y_1, y_2,..., y_n$ операцией линеаризации в произвольной точке $x_{10}, x_{20},..., x_{n0}$ заменой переменных $y_1 = x_1 - x_{10}, y_2 = x_2 - x_{20},..., y_n = x_n - x_{n0}$.

**Определение 1.** Решение системы уравнений (1) $x(t) = \varphi(t)$ асимптотически устойчиво по Ляпунову, если:

1) решение $\varphi(t)$ устойчиво по Ляпунову, если для любого решения $x(t) \neq \varphi(t)$:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x(t): |x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta \Rightarrow |x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon, \forall t: t_0 \leq t < \infty$

2) $\lim\limits_{t \to \infty}(x(t) - \varphi(t)) = 0$

**Теорема 1.**(Ляпунова). Рассмотрим решение системы уравнений (1)

Пусть $|\psi_i| \leq |\gamma(x)||x|,\ |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$, $\lim\limits_{|x| \to 0} \gamma(x) = 0$. Тогда, если действительные части собственных значений меньше нуля $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0, i = \overline{1, n}$, то

1) нулевое решение $x_1(t) \equiv .... \equiv x_n(t) \equiv 0$ системы уравнений (1) асимптотически устойчиво.
2) Если $\exists \lambda_i : \mathrm{Re}(\lambda_i) = d_i > 0, i = \overline{1, n}$, то решение системы уравнений (1) является неустойчивым по Ляпунову

**Замечание.** В силу справедливости предельного перехода $\lim\limits_{|x| \to 0} \gamma(x) = 0$ набор функций: $\overline{x_1(t)} \equiv .... \equiv \overline{x_n(t)} \equiv 0$ - очевидно, является решением системы уравнений (1).

**1)Доказательство** теоремы (достаточность)

Пусть $\forall \lambda_i : \mathrm{Re}(\lambda_i) = d_i < 0, i = \overline{1, n}$

В силу линейности и пропорциональности временных производных функций и функций система уравнений(1) имеет очевидное решение $x_i(t) = A_i e^{\lambda t}$, которое подставим в (1). Если малы решения $|x_i(t)|, i = \overline{1, n}$, получим, сокращая на величину $e^{\lambda t}$:

$$\lambda \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ...a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ...a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ...a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ...a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ...a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ...a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = 0 \qquad (2)$$

Система уравнений(2) имеет нетривиальное решение: $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i^2 \neq 0$ если и только если определитель однородной линейной системы уравнений(2) относительно $A_i, i = \overline{1, n}$ равен нулю. То есть собственные значения $\lambda_i, i=\overline{1,n}$ системы уравнений (1) определяются характеристическим уравнением $\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & ...a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & ...a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ...a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$ (3)

Характеристическое уравнение (3) является алгебраическим многочленом степени $n$

$b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + b_{n-1}\lambda + b_n = 0$ и его решением по основной теореме алгебры являются $n$ комплексных корней $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ с учётом их кратности. Не теряя общности доказательства, считаем все корни различными. В силу линейности системы уравнений (1) её общее решение

$x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t}$, где $C_i, i=\overline{1,n}$ - произвольные постоянные.

Используя неравенство треугольника $|x(t)| \le \sum_{i=1}^{n} |C_i| e^{\operatorname{Re}(\lambda_i)t} = \sum_{i=1}^{n} |C_i| e^{-|d_i|t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Для предельного нулевого решения $\overline{x_1(t)} \equiv .... \equiv \overline{x_n(t)} \equiv 0$ получим

Поскольку

1) $|x(t_0)-\varphi(t_0)| \le \sum_{i=1}^{n} |C_i| e^{-|d_i|t_0} < \delta,\ |C_i| e^{-|d_i|t} < |C_i| e^{-|d_i|t_0} (t > t_0) \Rightarrow |x(t)-\varphi(t)| < \varepsilon(\delta) = \delta$, то показано, что решение(1) $x(t) = \varphi(t) \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову.

2) $\lim_{t\to\infty} |x(t) - \overline{x(t)}| = \lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0$, то нулевое решение является по определению асимтотичекси устойчивым по Ляпунову.

2)Пусть $\exists \lambda_i : \operatorname{Re}(\lambda_i) = d_i > 0, i=\overline{1,n}$, для определённости $d_1 > 0$. Построим отрицание к определению устойчивости по Ляпунову:

$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x(t) : |x(t_0)-\varphi(t_0)| < \delta \Rightarrow |x(t)-\varphi(t)| \ge \varepsilon, \exists t : t_0 \le t < \infty$

$$|x(t)-\varphi(t)| > |C_1| e^{d_1 t} - \sum_{i=2}^{n} |C_i| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty \Rightarrow |x(t)-\varphi(t)| > |C_1| e^{d_1 t} - \sum_{i=2}^{n} |C_i| > \varepsilon = \sum_{i=2}^{n} |C_i| \Rightarrow$$

$t > \bar{t} = \frac{1}{d_1} \ln\left( \frac{2}{|C_1|} \sum_{i=2}^{n} |C_i| \right)$ - при любом выборе коэффициентов $C_i$ из класса допустимых решений (для сколь угодно малого $\delta > 0$) и выполнении начального условия $|x(t_0)-\varphi(t_0)| \le \sum_{i=1}^{n} |C_i| e^{-d_i t_0} < \delta$. Другими словами, при больших значениях $t > \frac{1}{d_1} \ln\left( \frac{2}{|C_1|} \sum_{i=2}^{n} |C_i| \right)$ мы не сможем подобрать близкие решения к нулевому по норме Чебышева ($|x(t)-\varphi(t)| < \varepsilon = \sum_{i=2}^{n} |C_i|$)в моменты $\bar{t} \le t$. Таким образом, решение системы уравнений(1) ($\operatorname{Re}(\lambda_1) = d_1 > 0$) неустойчиво по Ляпунову. И по определению 1 асимптотически неустойчиво по Ляпунову.

**Замечание 1.** Для любого многочлена $P(t)$ степени $m_i$ с кратностью собственного значения $\lambda_i$ $m_i + 1$ существует предел $\lim_{t\to\infty} P_{m_i+1}(t) e^{-|d_i|t} = 0, i = \overline{1,n}, d_i < 0$.

С учётом замечания доказательство теоремы завершено и для кратных собственных значений.

**Теорема 2.**Если решение системы уравнений (1) асимптотически устойчиво, то коэффициенты характеристического уравнения (4) положительны.

$$b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + b_{n-1}\lambda + b_0 = 0,\ b_i > 0, i = \overline{0,n} \qquad (4)$$

**Доказательство.** По основной теореме алгебры

$$\lambda_i = g_i \in R, i = \overline{1,s}, \lambda_j = p_j + iq_j, i = \sqrt{-1}, j = \overline{1,(n-s)/2}$$

$$g_i < 0, i = \overline{1,s},\quad p_j < 0, j = 1,(n-s)/2$$

$$b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + b_{n-1}\lambda + b_n = 0 \Leftrightarrow b_0\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)\prod_{j=1}^{(n-s)/2}(\lambda-\lambda_j)(\lambda-\overline{\lambda_j}) = 0$$

$$\prod_{i=1}^{s}(\lambda-g_i)\prod_{j=1}^{(n-s)/2}(\lambda-p_j-iq_j)(\lambda-p_j+iq_j) = \prod_{i=1}^{s}(\lambda-g_i)\prod_{j=1}^{(n-s)/2}\left(\lambda^2-2\lambda p_j+{p_j}^2+{q_j}^2\right) = 0 \qquad (5)$$

Но по теореме 1 для устойчивости решения по Ляпунову необходимо чтобы все действительные части собственных значений $\mathrm{Re}(\lambda_i) = \begin{cases} g_i < 0, i = \overline{1,s} \\ p_j < 0,\ j = \overline{1,(n-s)/2} \end{cases}$ (6)

Тогда из(5),(6)многочлен $\prod_{i=1}^{s}(\lambda-g_i)$имеет все положительные коэффициенты, а также многочлен $\prod_{j=1}^{(n-s)/2}\left(\lambda^2-2\lambda p_j+{p_j}^2+{q_j}^2\right)$имеет все положительные коэффициенты. Произведение 2 многочленов с положительными коэффициентами образует многочлен с положительными коэффициентами. Другими словами, необходимое условие (6) устойчивости по Ляпунову нулевого решения системы(1) эквивалентно не отрицательности всех коэффициентов характеристического уравнения(4)(случай $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ исключается). Теорема (2) доказана. Однако условия на коэффициенты (4) не является достаточным условием устойчивости.

**Теорема 3**(***критерий устойчивости Михайлова***). Для устойчивости решения системы(1) необходимо и достаточно, чтобы на комплексной плоскости точка $f(i\omega)$(аффикс характеристического уравнения), где $f(\lambda)$левая часть уравнения (4):

$$f(\lambda) = b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + b_{n-1}\lambda + b_n$$

не проходил через начало координат и сделал поворот против часовой стрелки на угол $n\pi/2$ при изменении $\omega$ от 0 до $+\infty$.

**Доказательство**

**1)Необходимость.** Пусть решение системы уравнений (1) устойчиво по Ляпунову. По теореме 1 $\mathrm{Re}(\lambda_i) = \begin{cases} g_i < 0, i = \overline{1,s} \\ p_j < 0,\ j = \overline{1,(n-s)/2} \end{cases}$

$$f(\lambda) = b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + b_{n-1}\lambda + b_n = b_0\prod_{i=1}^{s}(\lambda-g_i)\prod_{j=1}^{(n-s)/2}\left(\lambda^2-2\lambda p_j+{p_j}^2+{q_j}^2\right) \qquad (7)$$

Аргумент комплексного числа (угол между радиусом вектором в комплексную точку и действительной осью) для произведения конечного числа комплексных чисел определяется формулой:

$$\arg(z_1z_2...z_n) = \arg(z_1)+\arg(z_1)+...+\arg(z_n) \Leftrightarrow \Delta\arg(z_1z_2...z_n) = \sum_{i=1}^{n}\Delta\arg(z_i)$$

где $\Delta\arg(z_i) = \arg(z_i(\omega=\infty)) - \arg(z_i(\omega=0))$, $i=\overline{1,n}$

Применим указанное правило для комплексных чисел к формуле (7)

$$\Delta\arg(f(\lambda)) = \sum_{i=1}^{s}\Delta\arg(\lambda - g_i) + \sum_{j=1}^{(n-s)/2}\left(\Delta\arg(\lambda - p_j - iq_j) + \Delta\arg(\lambda - p_j + iq_j)\right) \qquad (8)$$

Рассмотрим изменение аргумента каждого из действительных собственных значений $g_i, i=\overline{1,s}$ на комплексной плоскости – в первой сумме формулы (8) при изменении действительного параметра $\omega = \overline{0,\infty}$.

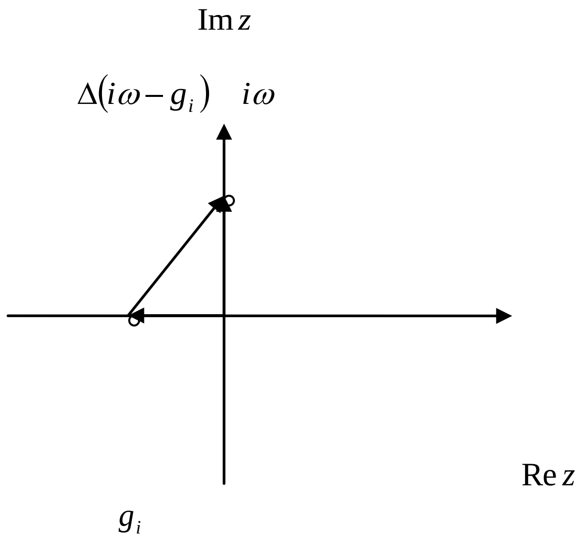



Рис 1.Векторная диаграмма для комплексных чисел $g_i$, $i\omega$, $\Delta(i\omega - g_i)$

Из рисунка 1 видно, что $\Delta(i\omega - g_i)\big|_0^\infty = \arg((i\infty) - g_i) = \dfrac{\pi}{2}$. Поэтому для $s$ действительных собственных значений получим $\sum_{i=1}^{s}\Delta\arg(i\omega - g_i)\Big|_0^\infty = s\dfrac{\pi}{2}$.

Во второй сумме формулы (8) нужно рассматривать приращение аргумента для пары комплексно сопряжённых собственных значений $\Delta\arg(\lambda - p_j - iq_j) + \Delta\arg(\lambda - p_j + iq_j)$ при изменении $\omega\big|_0^\infty$.

$$\Delta f_2 = \Delta(i\omega - p_j + iq_j) \qquad \Delta f_1 = \Delta(i\omega - p_j - iq_j)$$

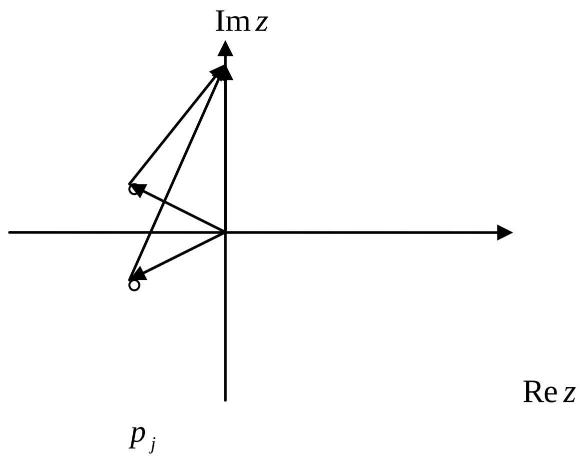


Рис 2. Векторная диаграмма чисел $\Delta\left(i\omega - p_j + iq_j\right)$ $\Delta\left(i\omega - p_j - iq_j\right)$

Из рисунка 2 видно, что $\arg\left(\Delta f_1 + \Delta f_2\right)\Big|_0^\infty = \pi$ (сумма 2 углов дополнительных до развёрнутого). Поэтому вторая сумма в формуле(8)

$$\sum_{j=1}^{(n-s)/2}\left(\arg\Delta\left(\lambda - p_j - iq_j\right) + \arg\Delta\left(\lambda - p_j + iq_j\right)\right)\Big|_0^\infty = \pi\left(\frac{n-s}{2}\right)$$ , а два слагаемых дают

$s\dfrac{\pi}{2} + \pi\dfrac{n-s}{2} = \pi\dfrac{n}{2}$. Необходимость доказана.

2)*Доказательство* ***достаточности*** *проведём конструктивно.*

$$f(i\omega) = b_0(i\omega)^n + b_1(i\omega)^{n-1} + b_2(i\omega)^{n-2} + b_{n-1}(i\omega) + b_n = b_n - \omega^2 b_{n-2} + \omega^4 b_{n-4} - \ldots +$$
$$+ i\omega\left(b_{n-1} - \omega^2 b_{n-3} + \omega^4 b_{n-5} - \ldots\right) = P\left(\omega^2\right) + i\omega Q\left(\omega^2\right),$$

где обозначены многочлены

$$P\left(\omega^2\right) = b_n - \omega^2 b_{n-2} + \omega^4 b_{n-4} - \ldots, Q\left(\omega^2\right) = b_{n-1} - \omega^2 b_{n-3} + \omega^4 b_{n-5} - \ldots \quad (9)$$

Комплексный аффикс на плоскости имеет координаты $f(i\omega) = \left(P\left(\omega^2\right), \omega Q\left(\omega^2\right)\right)$ (10)

Т.е. движение аффикса на комплексной плоскости начинается с точки $\left(b_n, 0\right)$, расположенной справа от начала координат на действительной оси. Пусть при изменении $\omega\big|_0^\infty$ аффикс не проходит через начало координат $(0,0)$. Это значит, что корни многочленов $P\left(\omega^2\right) = 0, Q\left(\omega^2\right) = 0$ не могут быть равными при одинаковом значении $\omega^2$. В силу достаточности пусть аффикс не проходит через начало координат и поворачивается против часовой стрелки на угол $n\pi/2$ при изменении $\omega$ от 0 до $+\infty$. Что возможно тогда и только тогда, если движение аффикса пересекает последовательно мнимую ось в положительном направлении, затем действительную ось в отрицательном направлении, затем мнимую ось в отрицательном направлении, затем действительную ось в положительном направлении и т.д. (назовем такую последовательность пересечения осей аффиксом ***упорядоченной последовательностью***)

В этом случае между последовательными пересечениями координатных осей аффикс получает приращение аргумента на угол $\pi/2$. Всего суммарное число корней у многочленов $P\left(\omega^2\right), \omega Q\left(\omega^2\right)$ равно $n$. Действительно.

Предположим $n = 2k$, тогда $P\left(\omega^2\right) = b_n - \omega^2 b_{n-2} + \omega^4 b_{n-4} - \ldots$ имеет ровно $k = \dfrac{n}{2}$ корней, а многочлен $Q\left(\omega^2\right) = b_{n-1} - \omega^2 b_{n-3} + \omega^4 b_{n-5} - \ldots$ имеет $k - 1 = \dfrac{n}{2} - 1$ корней, но $\omega = 0$ также корень для многочлена $\omega Q\left(\omega^2\right)$, итого у обоих многочленов $\dfrac{n}{2} + \dfrac{n}{2} - 1 + 1 = n$.

Предположим $n = 2k + 1$, тогда $P\left(\omega^2\right) = b_n - \omega^2 b_{n-2} + \omega^4 b_{n-4} - \ldots$ имеет ровно $k = \dfrac{n-1}{2}$ корней, а многочлен $Q\left(\omega^2\right) = b_{n-1} - \omega^2 b_{n-3} + \omega^4 b_{n-5} - \ldots$ имеет $k = \dfrac{n-1}{2}$ корней, но $\omega = 0$ также корень для многочлена $\omega Q\left(\omega^2\right)$, итого у обоих многочленов $\dfrac{n-1}{2} + \dfrac{n-1}{2} + 1 = n$.

Между n последовательными точками пересечений аффиксом действительной и мнимой координатных осей находится n-1 промежуток и угол $(n-1)\frac{\pi}{2}$. Но в силу достаточности аффикс изменяет угол на $n\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки при изменении $\omega\big|_0^\infty$. Что возможно, если последний угол $\frac{\pi}{2}$ аффикс проходит при $\omega\to\infty$ не пересекая более осей комплексной плоскости.

Действительно, пусть $n=2k$, то все $n=2k$ точек пересечения с осями аффикс получит, начиная с точки $(b_n,0)$ и заканчивая точкой на мнимой оси. Но в асимптотике при $\omega\to\infty$ играет роль слагаемое аффикса $b_0(i\omega)^n = b_0(i\omega)^{2k} = b_0\omega^n(-1)^k$, то есть аффикс приближается в асимптотике к действительной оси сколь угодно близко к ней, но пересечь ее не может, что противоречило бы факту, что суммарное число корней у характеристического многочлена более чем n.

Аналогично, пусть $n=2k+1$, то все $n=2k+1$ точек пересечения с осями аффикс получит начиная с точки $(b_n,0)$ и заканчивая точкой на действительной оси. Но в асимптотике при $\omega\to\infty$ играет роль слагаемое аффикса $b_0(i\omega)^n = b_0(i\omega)^{2k+1} = b_0\omega^n(-1)^k i$, то есть аффикс приближается в асимптотике к мнимой оси сколь угодно близко, но пересечь ее не может, что противоречило бы факту, что суммарное число корней у характеристического многочлена более чем n.

Все сказанное соответствует $n$ последовательным пересечениям координатных осей и полному углу поворота $n\pi/2$. Любая ***неупорядоченная последовательность приведет к числу точек пересечения осей более n,что более числа корней характеристического уравнения при повороте аффикса на угол*** $n\pi/2$. В силу непрерывного увеличения параметра $\omega$ вдоль кривой аффикса получим соотношение корней

$$0<\omega_1^2=\mu_1<\omega_2^2=\nu_1<\omega_3^2=\mu_2<\omega_4^2=\nu_2,... \qquad (11)$$

Т.е. положительные корни многочленов $P(\omega^2), Q(\omega^2)$ чередуются по формуле(11), причём наименьшим по величине является первый корень многочлена $P(\omega^2)$, вторым первый корень многочлена $Q(\omega^2)$, причём все корни многочленов различны, так как аффикс не проходит через начало координат. В силу достаточности поворот аффикса равен углу $n\pi/2$ против часовой стрелки.

Теорема 3 доказана.

Отметим, что система $n$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка имеет характеристическое уравнение

$$f(\lambda)=b_0\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+b_2\lambda^{n-2}+b_{n-1}\lambda+b_n=0$$

Такое характеристическое уравнение имеет также обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $n$ с теми же постоянными коэффициентами.

$$b_0y^{(n)}+b_1y^{(n-1)}+b_2y^{(n-2)}+b_{n-1}y'+b_ny=0 \qquad (10)$$

Решение ОДУ (10) имеет вид $x(t)=\sum_{i=1}^{n}C_ie^{\lambda_it}$, где $C_i$ произвольные постоянные коэффициенты, а $\lambda_i$ собственные числа уравнения (4),т.е. полностью совпадает с решением системы ОДУ (1). Поэтому вопросы, связанные с устойчивостью нулевого решения как системы ОДУ (1) так и уравнения (10) исчерпываются теоремами (1) – (3).

Выделим в комплексном аффиксе характеристического уравнения реальную и мнимую части $\lambda=i\omega$:

$$f(\lambda)=b_0(i\omega)^n+b_1(i\omega)^{n-1}+b_2(i\omega)^{n-2}+b_{n-1}(i\omega)+b_n=P(\omega^2)+i\omega Q(\omega^2), i=\sqrt{-1}$$

где:

$$\begin{cases} P\left(\omega^2\right) = b_n - b_{n-2}\omega^2 + b_{n-4}\omega^4 - ... \\ Q\left(\omega^2\right) = b_{n-1} - b_{n-3}\omega^2 + b_{n-5}\omega^4 - ... \end{cases} \quad |f(\lambda)| = \sqrt{P\left(\omega^2\right)^2 + \omega^2 Q\left(\omega^2\right)^2} \text{ - модуль аффикса.} \quad (11)$$

По теореме косинусов угол между двумя комплексными числами $z_i, z_{i+1}$:

$$\cos(z_i, z_{i+1}) = \frac{\mathrm{Re}(z_i)\mathrm{Re}(z_{i+1}) + \mathrm{Im}(z_i)\mathrm{Im}(z_{i+1})}{\sqrt{\mathrm{Re}(z_i)^2 + \mathrm{Im}(z_i)^2}\sqrt{\mathrm{Re}(z_{i+1})^2 + \mathrm{Im}(z_{i+1})^2}}, \mathrm{Re}(z_i) = P\left(\omega_i^{\,2}\right), \mathrm{Im}(z_i) = \omega_i Q\left(\omega_i^{\,2}\right)$$

Здесь $i$ - номер итерации, при малом шаге $h$ на частоту $\omega_{i+1} = h + \omega_i$ соседние точки в итерации аффикса будут образовывать небольшой угол между собой, и, следовательно, этот угол можно найти однозначно по формуле

$$\angle(z_i, z_{i+1}) = \arccos\left(\frac{\mathrm{Re}(z_i)\mathrm{Re}(z_{i+1}) + \mathrm{Im}(z_i)\mathrm{Im}(z_{i+1})}{\sqrt{\mathrm{Re}(z_i)^2 + \mathrm{Im}(z_i)^2}\sqrt{\mathrm{Re}(z_{i+1})^2 + \mathrm{Im}(z_{i+1})^2}}\right), \mathrm{Re}(z_i) = P\left(\omega_i^{\,2}\right), \mathrm{Im}(z_i) = \omega_i Q\left(\omega_i^{\,2}\right) \quad (12)$$

Формулы(11), (12) определяют алгоритм, используемый в программе.

В массив $a[m+1]$ записываются постоянные коэффициенты дифференциального уравнения порядка $m$ слева направо $b_0, b_1, b_2, ..., b_{m-1}, b_m$. $n$ - число итераций с шагом h.

Все действительные переменные имеют двойную точность double. Далее мы суммируем все углы между каждой парой соседних комплексных точек.

В качестве теста рассмотрим пример из А.Ф.Филиппова (Сборник задач по дифференциальным уравнениям, 945 пример). Исследовать нулевое решение дифференциального уравнения на устойчивость.

$$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 16y^{'''} + 25y^{''} + 13y^{'} + 9y = 0$$

Решаем сначала задачу аналитически, используя критерий Михайлова, х. уравнение:

$$\lambda^5 + 4\lambda^4 + 16\lambda^3 + 25\lambda^2 + 13\lambda + 9 = 0$$

$$P\left(\omega^2\right) = 9 - 25\omega^2 + 4\omega^4 = 0, \ \omega_{1,2}^2 = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 4*36}}{8} \approx 0.38; 5.86;$$

$$Q\left(\omega^2\right) = 13 - 16\omega^2 + \omega^4 = 0, \ \omega_{1,2}^2 = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 4*13}}{2} \approx 0.86; 15.1;$$

Так как $0 < 0.38 < 0.86 < 5.86 < 15.1$ то согласно критерию Михайлова нулевое решение устойчиво.

Теперь для решения задачи на устойчивость используем программу (программа даёт положительный результат, если суммарный угол отличается от величины $\pi \frac{n}{2}$ меньше, чем на заданную величину 0,01).

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
int const n=10000;
int const m=3;
main()
{
int i,j;
double w,x,y,h,delta,z,z1,z2,angle,res[3][n+1],a[m+2],sum,sum1,sum2;
a[0]=1.0;
a[1]=4.0;
a[2]=16.0;
a[3]=25.0;
 a[4]=13.0;
 a[5]=9.0;
w=0.0;
```

```
 h=0.1;
angle=0.0;
for(j=1;j<=n;j++)
{
sum=0.0;
sum1=0.0;
sum2=0.0;
for(i=0;i<=m;i++)
{
if(i%4==0)
{
sum1=sum1+pow(w,double(m-i))*a[i];
}
else if(i%4==1)
{
sum2=sum2+pow(w,double(m-i))*a[i];
}
 else if(i%4==2)
 {
sum1=sum1-pow(w,double(m-i))*a[i];
}
 else if(i%4==3)
 {
sum2=sum2-pow(w,double(m-i))*a[i];
}
}
 w=w+h;
res[1][j]=sum1;
 res[2][j]=sum2;
}
for(j=1;j<=n-1;j++)
{
z1=sqrt( res[1][j] * res[1][j] + res[2][j] * res[2][j] );
z2=sqrt( res[1][j+1] * res[1][j+1] + res[2][j+1] * res[2][j+1] );
z = acos((res[1][j] * res[1][j+1] + res[2][j] * res[2][j+1])/(z1*z2));
angle=angle+z;
}
printf("d(fi)=%.8lf pi*n/2=%.4lf 'n'= %.8lf
 delta=%.16lf\n",angle,double(m)*asin(1.0),angle/asin(1.0) ,angle-double(m)*asin(1.0) );
delta= angle-double(m)*asin(1.0);
if(sqrt(delta*delta)<=0.01)
{
printf("solves is stabiling\n" );
}
else
{
 printf("solves is not stabiling\n" );
}
}
```

Программа возвращает результат

```
d(fi)=7.84998123 pi*n/2=7.8540 'n'= 4.99745326 delta=-0.0040004051519418
solves is stabiling
```

Press any key to continue

Нулевое решение из первого примера программа определила как устойчивое. Первое число - точное значение $\pi \frac{n}{2}$, второе число полный суммарный угол angle в радианах (его значение в случае устойчивости должно быть близким к первому числу), вторым числом следует $angle/\frac{\pi}{2} \approx n$, последней является фраза с принятием решения об устойчивости либо неустойчивости нулевого решения дифференциального уравнения.

Решим второй пример аналитически и с помощью программы.

$$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 9y''' + 16y'' + 19y' + 13y = 0$$

Решаем сначала задачу аналитически, используя критерий Михайлова, характеристическое уравнение:

$$\lambda^5 + 4\lambda^4 + 9\lambda^3 + 16\lambda^2 + 19\lambda + 13 = 0$$

$$P(\omega^2) = 13 - 16\omega^2 + 4\omega^4 = 0,\ \omega_{1,2}^2 = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 16*13}}{8} \approx 1.13;\ 2.87;$$

$$Q(\omega^2) = 19 - 9\omega^2 + \omega^4 = 0,\ \omega_{1,2}^2 = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4*19}}{2} \approx 3.38; 5.61;$$

В данном случае нет вложения корней второго многочлена между корнями первого многочлена, так как неверны неравенства $0 < 1.13 < 3.38 < 2.87 < 5.61$, то согласно критерию Михайлова нулевое решение неустойчиво.

Для решения задачи программа с массивом коэффициентов

a[0]=1.0;a[1]=4.0;a[2]=9.0;a[3]=16.0; a[4]=19.0; a[5]=13.0;

возвращает результат:

d(fi)=5.91014786 pi*n/2=7.8540 'n'= 3.76251699 delta=-1.9438337725896293

solves is not stabling

Press any key to continue

То есть нулевое решение дифференциального уравнения из примера 944 неустойчиво.

Литература:

1)А.Ф.Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.- М. , Наука, 1992(издание седьмое). – 128 с.

**Инвариантно – групповой метод исследования дифференциальных уравнений. Лабораторная работа №4. Модель Лоренца.**

Большинство дифференциальных уравнений остаются неизменными относительно преобразований независимых переменных и неизвестных функций. Типы всех преобразований составляют инвариантно – групповую классификацию данного уравнения либо системы дифференциальных уравнений (А.А. Самарский). Рассмотрим в качестве примера инвариантно – группового метода уравнение теплопроводности:

$$c_0 \frac{\partial T}{\partial t} = div(k\ gradT)$$

Очевидны два инвариантных преобразования координат и времени – параллельный перенос на фиксированный момент времени (на фиксированный вектор)

$$t \to t + t_0, \partial(t + t_0) = \partial(t);\ r \to r + r_0, \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial(x + x_0)}, \frac{\partial}{\partial(y + y_0)}, \frac{\partial}{\partial(z + z_0)}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$divT = \frac{\partial T}{\partial(x + x_0)} + \frac{\partial T}{\partial(y + y_0)} + \frac{\partial T}{\partial(z + z_0)} = \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z}$$

3) Преобразование растяжение – сжатие. $t' \to \alpha t,\ r' \to \beta r,\ T' \to \gamma T,\ k' = k_0 T^{\sigma}$

$$c_0 \frac{\partial T'}{\partial t'} = div\left(k_0 \left(T'\right)^{\sigma} gradT'\right) \Leftrightarrow c_0 \frac{\partial \gamma T}{\partial \alpha t} = \frac{\partial}{\partial \beta x}\left(k_0 (\gamma T)^{\sigma} \frac{\partial}{\partial \beta x} \gamma T\right) + \frac{\partial}{\partial \beta y}\left(k_0 T^{\sigma} \frac{\partial}{\partial \beta y} \gamma T\right) + \frac{\partial}{\partial \beta z}\left(k_0 T^{\sigma} \frac{\partial}{\partial \beta z} \gamma T\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\beta^2}{\alpha \gamma^{\sigma}} \equiv 1 \Leftrightarrow \alpha^{-1}\beta^2\gamma^{-\sigma} = 1,\ \ c_0 \frac{\partial T'}{\partial t'} = div\left(k_0 \left(T'\right)^{\sigma} gradT'\right) \Leftrightarrow c_0 \frac{\partial T}{\partial t} = div\left(k_0 (T)^{\sigma} gradT\right)$$

Только в случае закона $\alpha^{-1}\beta^2\gamma^{-\sigma} = 1$ исходное и конечное уравнение совпадают с точностью до буквенного переименования переменных.

Рассмотрим гидродинамическую задачу о нагреве слоя жидкости снизу и конвективную устойчивость слоя в зависимости от параметров задачи. Используя разложение в ряд Фурье функций скорости и температуры, подставляя в систему уравнений гидродинамики (приближение Буссинеска), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = \dfrac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases} \qquad (1)$$

Где коэффициенты $\sigma, r$ - числа Прандтля и Релея $\Pr = \dfrac{\nu}{\alpha} = \dfrac{\eta c_p}{k}, \alpha = \dfrac{k}{\rho c_p}, r \equiv Ra = \dfrac{g\beta\Delta T L^3}{\nu\chi}, g, L, \Delta T, \nu = \dfrac{\eta}{\rho}, \alpha = \dfrac{k}{c_p\rho}, \beta = \dfrac{1}{V}\left(\dfrac{dV}{dT}\right)_p$ - ускорение свободного падения, характерный размер области, разность температур между стенками и жидкостью, кинематическая вязкость жидкости, температуропроводность жидкости, коэффициент теплового расширения жидкости. Переменная $x$ представляет одну из компонент скорости жидкой частицы внутри инверсного по температуре жидкого слоя, переменные $y, z$ - коэффициенты разложения в ряд Фурье температуры.

$k, \eta, \rho, c_p$ - коэффициенты теплопроводности, динамической вязкости, плотности, теплоёмкости при постоянном давлении.

Система уравнений (1) инвариантна относительно группы преобразований (преобразования координат $(x, y, z) \to (-x, -y, z)$).

Действительно: $\begin{cases} -\dot{x} = \sigma(-y + x) \\ -\dot{y} = xz - rx + y \\ \dot{z} = (-x)(-y) - bz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$

Данное преобразование указывает не только на симметрию исходной системы дифференциальных уравнений, но и на ту же симметрию решений данной системы. В частности, существует симметрия множества стационарных точек и циклов относительно преобразования $(x, y, z) \to (-x, -y, z)$. Определим стационарные точки системы(1)

$$\begin{cases} \sigma(y - x) = 0 \\ -xz + rx - y = 0 \\ xy - bz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y, z = \frac{x^2}{b}, x\left(-\frac{x^2}{b} + r - 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 = z_1 = 0 \\ x_2 = y_2 = \pm\left(b\sqrt{r-1}\right) \\ z_2 = b(r-1) \end{cases} \quad (2)$$

Очевидно из (2), что существует одна стационарная точка $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, и два симметричных предельных цикла, связанных заменой координат $(x, y, z) \to (-x, -y, z)$:

$$\begin{matrix} x_2 = y_2 = \left(b\sqrt{r-1}\right) \\ z_2 = b(r-1) \end{matrix} \text{ и } \begin{matrix} x_3 = y_3 = -\left(b\sqrt{r-1}\right) \\ z_3 = b(r-1) \end{matrix} \quad (3)$$

Предельные циклы становятся устойчивыми, если $r > 1, b > 0$. В этом случае $z_2, z_3 > 0$. Программа для реализации решения задачи Лоренца, написанная с двойной точностью, использует численную схему Рунге – Кутты 4 порядка. Кроме того, используя инвариантность преобразования системы уравнений Лоренца, выбираем симметричные начальные точки для двух разных притягивающих множеств (предельных циклов) относительно преобразования $(x, y, z) \to (-x, -y, z)$.

```
#include<iterator>
#include<math.h>
int const n=10000,n1=1000,m=n/n1;
double f1(double t, double x, double y, double z,double sigma);
double f2(double t, double x, double y, double z,double r);
double f3(double t, double x, double y, double z, double b);
int main()
{
int i,k,k1;
double k11,k12,k13,k14,k21,k22,k23,k24,k31,k32,k33,k34;
double x,y,z,sigma,r,x0,xx;
double res[6][2*n+1],h,a,b,t,pi;
remove("103.txt");
FILE*file;
file=fopen("103.txt","w");
pi=2.0*asin(1.0);
sigma=10.0;
r=28.0;
b=8.0/3.0;
a=0.0;
b=5.0;
h=(b-a)/double(n);
```

```
k=0;
t=a;
x=1.0;
 y=0.0;
z=0.0;
res[1][0]=t;
res[2][0]=x;
res[3][0]=y;
 res[4][0]=z;
 for(i=1;i<=n/2;i++)
{
k11=f1(t,x,y,z,sigma);
k21= f2(t,x,y,z,r);
k31= f3(t,x,y,z,b);
k12= f1(t+h/2.0,x+h/2.0*k11,y+h/2.0*k21,z+h/2.0*k31,sigma);
k22=f2(t+h/2.0,x+h/2.0*k11,y+h/2.0*k21,z+h/2.0*k31,r);
 k32= f3(t+h/2.0,x+h/2.0*k11,y+h/2.0*k21,z+h/2.0*k31,b);
 k13= f1(t+h/2.0,x+h/2.0*k12,y+h/2.0*k22,z+h/2.0*k32,sigma);
 k23=f2(t+h/2.0,x+h/2.0*k12,y+h/2.0*k22,z+h/2.0*k32,r);
 k33= f3(t+h/2.0,x+h/2.0*k12,y+h/2.0*k22,z+h/2.0*k32,b);
k14= f1(t+h,x+h*k13,y+h*k23,z+h*k33,sigma);
 k24= f2(t+h,x+h*k13,y+h*k23,z+h*k33,r);
 k34= f3(t+h,x+h*k13,y+h*k23,z+h*k33,b);
x=x+h*(k11+2.0*(k12+k13)+k14)/6.0;
y=y+h*(k21+2.0*(k22+k23)+k24)/6.0;
 z=z+h*(k31+2.0*(k32+k33)+k34)/6.0;
t=t+h;
if(i%m==0)
{
k=k+1;
 res[2][k]=x;
res[3][k]=y;
res[4][k]=z;
res[1][k]=t;
printf("x(%.2lf)=%.8lf y(%.2lf)=%.8lf z(%.2lf)=%.8lf\n",t,x,t,y,t,z);
 }
}
 x=-1.0;
 y=0.0;
z=0.0;
 printf("\n");
for(i=0;i<=n1/2;i++)
{
fprintf(file,"%.16lf   %.16lf    %.16lf\n", res[2][i], res[3][i], res[4][i]) ;
}
for(i=n/2;i<=n;i++)
{
k11=f1(t,x,y,z,sigma);
k21= f2(t,x,y,z,r);
k31= f3(t,x,y,z,b);
k12= f1(t+h/2.0,x+h/2.0*k11,y+h/2.0*k21,z+h/2.0*k31,sigma);
 k22=f2(t+h/2.0,x+h/2.0*k11,y+h/2.0*k21,z+h/2.0*k31,r);
```

```
k32= f3(t+h/2.0,x+h/2.0*k11,y+h/2.0*k21,z+h/2.0*k31,b);
 k13= f1(t+h/2.0,x+h/2.0*k12,y+h/2.0*k22,z+h/2.0*k32,sigma);
k23=f2(t+h/2.0,x+h/2.0*k12,y+h/2.0*k22,z+h/2.0*k32,r);
 k33= f3(t+h/2.0,x+h/2.0*k12,y+h/2.0*k22,z+h/2.0*k32,b);
k14= f1(t+h,x+h*k13,y+h*k23,z+h*k33,sigma);
k24= f2(t+h,x+h*k13,y+h*k23,z+h*k33,r);
 k34= f3(t+h,x+h*k13,y+h*k23,z+h*k33,b);
x=x+h*(k11+2.0*(k12+k13)+k14)/6.0;
 y=y+h*(k21+2.0*(k22+k23)+k24)/6.0;
z=z+h*(k31+2.0*(k32+k33)+k34)/6.0;
t=t+h;
if(i%m==0)
{
k=k+1;
 res[2][k]=x;
 res[3][k]=y;
 res[4][k]=z;
 res[1][k]=t;
printf("x(%.2lf)=%.8lf y(%.2lf)=%.8lf z(%.2lf)=%.8lf\n",t,x,t,y,t,z);
}
}
for(i=n1/2;i<=n1;i++)
{
fprintf(file,"%.16lf   %.16lf    %.16lf\n", res[2][i], res[3][i], res[4][i]) ;
}
printf("\n");
fclose(file);
}
double f1(double t, double x, double y, double z,double sigma)
{
return sigma*(y-x);
}
double f2(double t, double x, double y, double z,double r)
{
 return -x*z+r*x-y;
}
double f3(double t, double x, double y, double z,double b)
{
return x*y-b*z;
}
```

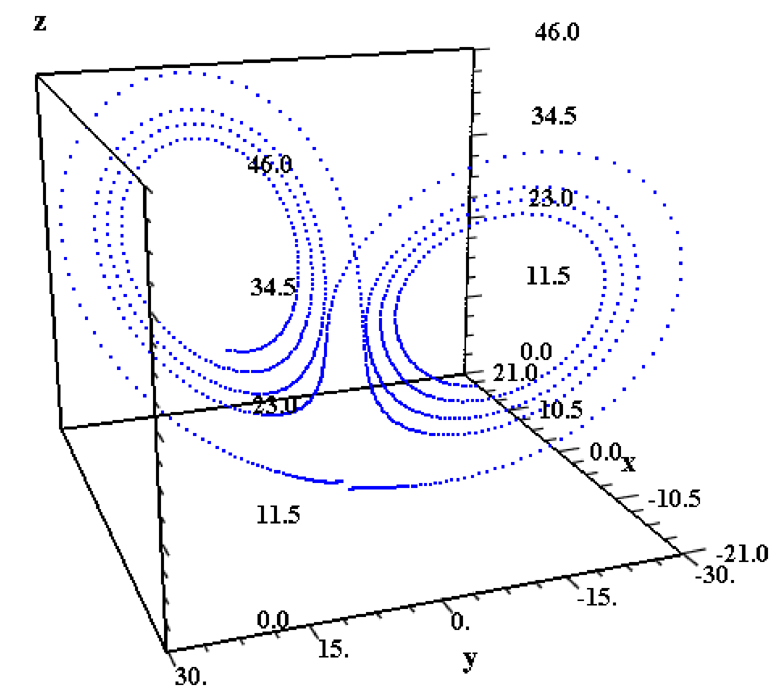



Рис.1. Фазовый портрет решения системы уравнений Лоренца с параметрами модели sigma=10.0, r=28.0, b=8.0/3.0, x=+1.0(x=-1.0).

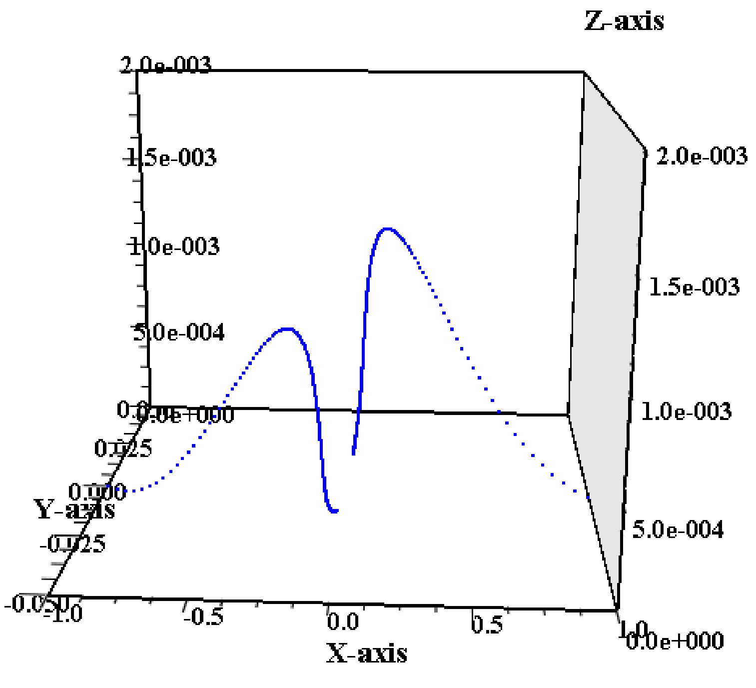



Рис.2. Фазовый портрет решения системы уравнений Лоренца с параметрами модели sigma=10.0, r=0.5, b=8.0/3.0, x=+1.0(x=-1.0).

Из рисунка 1 видно, что перемешивание в жидком слое (конвекция Релея) возможна только с параметром r>1 (большие значения z). При этом образуется 2 симметричных предельных цикла, связанных преобразованием $(x, y, z) \to (-x, -y, z)$, движение интегральных кривых происходит с затуханием в системе (вязкое трение) – диаметр циклической кривой со временем уменьшается.

Рисунок 2 показывает, что перемешивание в жидком слое (конвекция Релея) невозможна с параметром r<1. При этом образуется две фазовые симметричные асимптотически стремящиеся к началу координат кривые, связанные преобразованием $(x, y, z) \to (-x, -y, z)$, (z пренебрежимо мало) и движение частиц по вертикали не происходит, что соответствует преобладающему экспоненциальному затуханию начального движения жидкой частицы.

Литература


1) Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры – М.: Издательство Физмат лит, 2001.- 320 с.
2) М.Холодничок., А.Клич, М.Кубичек, М. Марек. Методы анализа нелинейных динамических систем – М.: Издательство Мир, 1985. – 362 с.


## Лабораторная работа №5. Моделирование свободного вращения твёрдого тела вокруг центра масс

В 1765 Леонард Эйлер, академик Российской академии наук написал работу “Теория движения твёрдых тел”, в которой впервые привёл систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка для компонент угловой скорости на главные оси инерции тела. Данная система описывает как вращение спутника относительно центра масс спутника в околоземном пространстве, так и динамику движения многоатомных молекул. Нелинейные явления давно привлекают математиков, механиков и физиков, например, нелинейные колебания А.А.Андронова. Можно также привести многочисленные примеры из теоретической и прикладной механики[1-4].

### Постановка задачи

Рассмотрим вращение твердого тела относительно неподвижной точки-центра масс. Оси прямоугольной системы координат направим вдоль главных осей симметрии эллипсоида инерции, а начало координат совместим с центром масс. Таким образом, система координат неподвижна относительно центра масс тела. Проекции угловой скорости $W_1(t), W_2(t), W_3(t)$ тела на координатные оси $X, Y, Z$ описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка Эйлера[1]:

$$\begin{cases} I_1 \dfrac{dW_1}{dt} + (I_3 - I_2) W_2 W_3 = M_1 \\ I_2 \dfrac{dW_2}{dt} + (I_1 - I_3) W_1 W_3 = M_2 \\ I_3 \dfrac{dW_3}{dt} + (I_2 - I_1) W_2 W_1 = M_3 \end{cases} \tag{1}$$

Где $0 < I_1 \le I_2 \le I_3$- моменты инерции тела относительно главных осей симметрии $X, Y, Z$. $M_1, M_2, M_3$ компоненты момента внешних сил вдоль осей $X, Y, Z$, проходящие через центр масс. Если $M_1 = M_2 = M_3 = 0$, то вращение тела называется свободным. Наша цель заключается в качественном анализе системы уравнений Эйлера и выделении особенностей частных решений.

Докажем, что для свободного вращения тела относительно центра масс справедливо следующее утверждение:

**Теорема 1**. Если все моменты инерции тела различны $(0 < I_1 < I_2 < I_3)$, то нетривиальное решение (нестационарное во времени) для компоненты $W_2(t)$, соответствующее промежуточному моменту инерции $I_2$, не может сохранять знак.

**Доказательство**. Из первого и третьего уравнений системы (4) выразим производные:

$$\dot{W}_1 = \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} W_2 W_3, \dot{W}_3 = \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} W_2 W_1.$$

Второе уравнение продифференцируем по времени и подставим найденные производные

$$\ddot{W}_2 + \frac{(I_1 - I_3)}{I_2}\left(\dot{W}_1 W_3 + W_1 \dot{W}_3\right) = 0$$

$$\ddot{W}_2 + \frac{(I_1 - I_3)}{I_2} W_2 \left(\frac{(I_2 - I_3)}{I_1} W_3^2 + \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} W_1^2\right) = 0$$

$$\ddot{W}_2 + \left(\frac{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2} W_3^2 + \frac{(I_2 - I_1)(I_3 - I_1)}{I_3 I_2} W_1^2\right) W_2 = 0$$

$$\ddot{W}_2 + F(W_1, W_3) W_2 = 0 \tag{2}$$

Где функция:

$$F(W_1, W_3) = \frac{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2} W_3^2 + \frac{(I_2 - I_1)(I_3 - I_1)}{I_3 I_2} W_1^2 \geq 0$$

Очевидно, $F(W_1, W_3) \equiv 0 \Leftrightarrow W_1(t) = W_3(t) \equiv 0$

Обозначим: $\min\limits_{W_1, W_3} F(W_1, W_3) = m^2, \max\limits_{W_1, W_3} F(W_1, W_3) = M^2$

Будем искать периодические решения системы уравнений(1). Пусть $T$ - основной период колебаний функций $W_1(t), W_2(t), W_3(t)$, $\omega = 2\pi / T$ минимальная частота, $m \leq \omega \leq M$.

Следовательно, $F(t+T) = F(W_1(t+T), W_3(t+T)) = F(W_1(t), W_3(t)) = F(t)$ функция периодическая с периодом $T$, как зависящая только от компонент $W_1(t), W_3(t)$.

Решение $W_2(t)$ищем в виде ряда Фурье:

$$W_2(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\} \tag{3}$$

$c_0, a_n, b_n$ −коэффициенты ряда Фурье $W_2(t)$.

$$c_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T W_2(t) dt, \; a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T W_2(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T W_2(t) \sin(n\omega t) dt, n = 1,2,...$$

Покажем, что функция $W_2(t)$ не может быть определённого знака.

Заметим, что среднее значение за период $T$ каждой из гармоник (3) $\overline{\cos(\omega t)} = \overline{\sin(\omega t)} = 0$.

Следовательно, среднее значение $\overline{W_2(t)} = c_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left\{a_n \overline{\cos(n\omega t)} + b_n \overline{\sin(n\omega t)}\right\} = c_0$

Кроме того:

$$\overline{\ddot{W}_2(t)} = -\omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left\{a_n \overline{\cos(n\omega t)} + b_n \overline{\sin(n\omega t)}\right\} = 0$$

Запишем $W_2(t)$ в виде ряда(3) и подставим в уравнение (2) и усредним уравнение (2) за период $T$

$$\overline{\ddot{W}_2} + \overline{F(W_1, W_3) W_2} = \overline{F(W_1, W_3) W_2} = 0$$

(В силу линейности оператора среднего, что эквивалентно свойству линейности интеграла). Воспользуемся первой теоремой об интегральном среднем (В.А.Зорич)[5,стр. 410].

**Теорема 2**. Пусть заданы интегрируемые по Риману функции $f, g \in R[a,b]$. Если функция $g(x) \geq 0$ неотрицательна на отрезке $[a,b]$, $f \in C[a,b]$, то найдётся точка $\xi \in [a,b]$, такая что: $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx$

Поэтому применимы все условия теоремы 2 для функций $F(t) = g(t), W_2(t) = f(t), a = 0, b = T$

$0 = \overline{F(W_1, W_3)W_2} = W_2(\xi)\overline{F(W_1, W_3)} = 0$.

Если тождественно $W_1(t) = W_3(t) \neq 0 \Leftrightarrow \overline{F(W_1, W_3)} > 0 \Rightarrow W_2(\xi) = 0$

Здесь обозначено:

$$\overline{F(W_1(t)W_3(t))W_2(t)} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T F(W_1(t)W_3(t))W_2(t)dt \quad \overline{F(W_1(t)W_3(t))} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T F(W_1(t)W_3(t))dt$$

Т.е. функция $W_2(t)$ имеет периодически расположенные корни в точках $t = \xi, \xi + T, \xi + 2T, \ldots$

Покажем, что в окрестности точки $t = \xi$ функция $W_2(t)$ принимает разные знаки, т.е. не является определённого знака для условия $M_1 = M_2 = M_3 = 0$. Из первого и третьего уравнений системы (1) при условии $W_2(\xi) = 0 \Rightarrow \dot{W}_1(\xi) = \dot{W}_3(\xi) = 0 \Leftrightarrow W_1(\xi) \in extr, W_3(\xi) \in extr$ .

Т.е. $\xi$ - точка экстремума для функций $W_1(t), W_3(t)$. Причём $W_1(\xi) \neq 0, W_3(\xi) \neq 0$. Иначе, начиная с точки $t \geq \xi$, как следует из системы (1) $W_1(t) = const, W_2(t) = const, W_3(t) = const$, т.е. является стационарным решением, которое исключается условием теоремы. Тогда из второго уравнения

$$\dot{W}_2(\xi) = \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} W_1(\xi)W_3(\xi) \neq 0, I_3 > I_2 > I_1$$

Поскольку $W_2(\xi) = 0, \dot{W}_2(\xi) \neq 0 \Rightarrow \exists \tau_0 > 0 \; W_2(\xi - \tau)W_2(\xi + \tau) < 0, \forall \tau < \tau_0$ .

Итак, $W_2(t)$ принимает разные знаки в достаточно малой окрестности точки $\xi$, ***что доказывает сформулированную теорему 1.***

Умножая первое, второе, третье уравнения системы (1) на компоненты $W_1, W_2, W_3$ соответственно, складывая все три полученных уравнения, получим:

$$\frac{d\left(\frac{I_1}{2}W_1^2 + \frac{I_2}{2}W_2^2 + \frac{I_3}{2}W_3^2\right)}{dt} = M_1W_1 + M_2W_2 + M_3W_3$$

Последнее уравнение показывает, что кинетическая энергия вращательного движения $I = \frac{I_1}{2}W_1^2 + \frac{I_2}{2}W_2^2 + \frac{I_3}{2}W_3^2$ изменяется только за счёт момента внешних сил $M_1, M_2, M_3$. Рассмотрим простой случай $M_1 = M_2 = M_3 = 0,\ I_2 = 2I_1, I_3 = 3I_1$ (тогда полная кинетическая энергия $I$ постоянна во времени) получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dW_1}{dt} + W_2 W_3 = 0 \\ \dfrac{dW_2}{dt} - W_1 W_3 = 0 \\ \dfrac{dW_3}{dt} + W_2 W_1 / 3 = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Решение системы уравнений (4) $W_1(t), W_2(t), W_3(t)$ единственным образом определяется значением начальной угловой скорости $W_1(0), W_2(0), W_3(0)$, если компоненты угловой скорости $W_1(t), W_2(t), W_3(t)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями времени. Если любые 2 начальные компоненты угловой скорости равны нулю, то из (4) следует, что угловая скорость совпадает с одной из главных осей симметрии эллипсоида инерции и постоянна: $\dfrac{dW_1}{dt} = \dfrac{dW_2}{dt} = \dfrac{dW_3}{dt} = 0 \Leftrightarrow W_1(t) = W_1(0), W_2(t) = W_2(0), W_3(t) = W_3(0).$

Рассмотрим частный случай, когда $\dfrac{dW_3}{dt}$ мало, $W_3 \approx const$.

Первое уравнение (4) продифференцируем по времени и подставим $\dfrac{dW_2}{dt}$ из второго уравнения. $\dfrac{d^2 W_1}{dt^2} + W_3 \dfrac{dW_2}{dt} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d^2 W_1}{dt^2} + W_3^2 W_1 = 0 \quad W_3^2 \approx const$ (5)

Уравнение (5) представляет собой квазигармоническое уравнение колебаний.

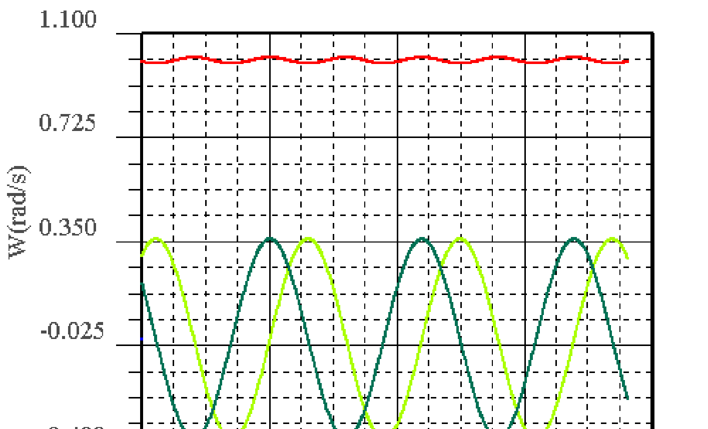



Рис.1. Решение системы равнений (4) $W_1(t), W_2(t), W_3(t)$ с начальными условиями $W_1(0) = 0.2, W_2(0) = 0.3, W_3(0) = 1.0$ (темно, светло – зелёный и красный графики соответственно).

Общее решение однородного с постоянными коэффициентами уравнения (5) есть:

$$W_1(t) = A\cos(W_3 t) + B\sin(W_3 t) = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(W_3 t + \varphi_0), \; A, B, \varphi_0 = const \quad .$$

Прецессия $W_1(t)$ определяется средним значением $W_3(t)$ с максимальным значением момента инерции (это утверждение также справедливо и для прецессии компоненты $W_2(t)$). Т.е. среднее почти постоянное значение $W_3(t)$ частотно модулирует частоту прецессии проекций $W_1(t)$, $W_2(t)$. Этот вывод подтверждают рисунки рис.1 и рис.2, в которых начальные условия $W_3(0) = 1{,}0$ и $W_3(0) = 2{,}0$ различаются в 2 раза. Соответственно, второй рисунок содержит 6 периодов прецессии, а первый ровно 3 периода прецессии $W_1(t), W_2(t)$ (за равное время), т.е. различие частот прецессии также в 2 раза.

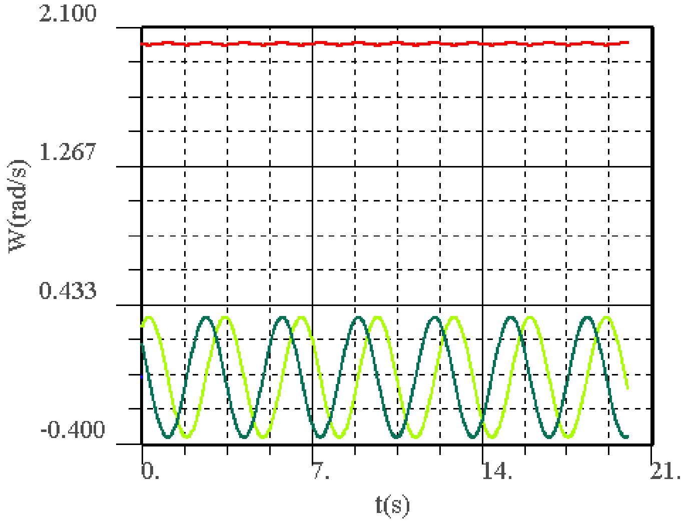



Рис.2. Решение системы равнений (4) $W_1(t), W_2(t), W_3(t)$ с начальными условиями $W_1(0) = 0.2, W_2(0) = 0.3, W_3(0) = 2.0$ (темно, светло – зелёный и красный графики соответственно).

Оценим границу области применимости в случае замены нелинейной системы уравнений линейной системой уравнений.

Из третьего уравнения системы (1) следует, что $\frac{1}{W_3}\frac{dW_3}{dt} + \frac{(I_2 - I_1)}{I_3}\frac{W_2 W_1}{W_3} = 0$

Из рисунка 3 видно, что частота прецессии $W_3(t)$ в 2 раза больше частоты прецессии. В общем случае частота прецессии $W_1(t), W_2(t)$ $\omega_{prW_1} \approx W_3(0)\sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2}}$

$$\omega_{prW_3} \approx 2W_3(0)\sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2}}$$

$$T_{pr} = 2\pi / \omega_{prW_3} = \frac{\pi}{W_3(0)}\sqrt{\frac{I_1 I_2}{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}} \quad \frac{\Delta W_3}{W_3} << 1, \Delta W_3 \approx \frac{T_{pr}}{2}\frac{dW_3}{dt}$$

$$\left|\frac{\Delta W_3}{W_3}\right| \approx \left|\frac{T_{pr}}{2W_3}\frac{dW_3}{dt}\right| = \frac{\pi}{2W_3(0)}\sqrt{\frac{I_1 I_2}{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}}\frac{(I_2 - I_1)}{I_3}\frac{W_2 W_1}{W_3} = \frac{\pi}{2}\frac{(I_2 - I_1)}{I_3}\frac{\left(W_2(0)^2 + W_1(0)^2 I_2 / I_1\right)}{W_3(0)^2}\sqrt{\frac{I_1 I_2}{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}} << 1$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{\left(W_2(0)^2 + W_1(0)^2 I_2 / I_1\right)}{W_3(0)^2}\sqrt{\frac{I_1 I_2 (I_2 - I_1)^2}{I_3^2 (I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}} << 1$$

Оценка $W_1 W_2 \le W_{\max}^2 = W_2(0)^2 + W_1(0)^2 I_2 / I_1$ следует из закона сохранения энергии. Из рисунков 1,2 видно, что амплитуды $W_1, W_2$ одинаковы, т.е. первые 2 степени свободы вращения обмениваются энергией, а 3 степень имеет постоянную энергию (заморожена). Из закона сохранения энергии получим $\frac{I_1}{2}W_1^2(0) + \frac{I_2}{2}W_2^2(0) = \frac{I_2}{2}W_{\max}^2$.

## Описание программы

Программа написана на языке С++. Для графической визуализации решение $W_1(t), W_2(t), W_3(t)$ записывается в массив, параллельно также записывается в текстовый файл. Затем столбцы решений из текстового файла 1.txt считываются и загружаются вспомогательной программой Compaq Array Viewer 1.5, которая автоматически масштабирует полученные точки в нескольких графических режимах визуализатором Compaq Array Viewer 1.5[6]. Все действительные переменные имеют тип двойной точности Double.

```
include<stdio.h>
#include<iostream>
#include<fstream>
#include<algorithm>
#include<stdlib.h>
#include<vector>
#include<iterator>
#include<math.h>
int const n=100000,n1=1000,m=n/n1;
double f1(double t, double x, double y, double z);
double f2(double t, double x, double y, double z);
double f3(double t, double x, double y, double z);
int main()
{
int i,k;
double k11,k12,k13,k14,k21,k22,k23,k24,k31,k32,k33,k34;
double x,y,z;
double res[6][n1+1],h,a,b,t,pi;
pi=2.0*asin(1.0);
a=0.0;
b=120.0;
h=(b-a)/double(n);
k=0;
x=0.519616;
y=0.0;
z=0.3;
t=a;
res[1][0]=t;
res[2][0]=x;
 res[3][0]=y;
 res[4][0]=z;
for(i=1;i<=n;i++)
{
k11=f1(t,x,y,z);
k21= f2(t,x,y,z);
k31= f3(t,x,y,z);
k12= f1(t+h/2.0,x+h/2.0*k11,y+h/2.0*k21,z+h/2.0*k31);
 k22=f2(t+h/2.0,x+h/2.0*k11,y+h/2.0*k21,z+h/2.0*k31);
 k32= f3(t+h/2.0,x+h/2.0*k11,y+h/2.0*k21,z+h/2.0*k31);
 k13= f1(t+h/2.0,x+h/2.0*k12,y+h/2.0*k22,z+h/2.0*k32);
k23=f2(t+h/2.0,x+h/2.0*k12,y+h/2.0*k22,z+h/2.0*k32);
k33= f3(t+h/2.0,x+h/2.0*k12,y+h/2.0*k22,z+h/2.0*k32);
k14= f1(t+h,x+h*k13,y+h*k23,z+h*k33);
k24= f2(t+h,x+h*k13,y+h*k23,z+h*k33);
```

```
 k34= f3(t+h,x+h*k13,y+h*k23,z+h*k33);
 x=x+h*(k11+2.0*(k12+k13)+k14)/6.0;
 y=y+h*(k21+2.0*(k22+k23)+k24)/6.0;
 z=z+h*(k31+2.0*(k32+k33)+k34)/6.0;
t=t+h;
if(i%m==0)
{
k=k+1;
 res[2][k]=x;
res[3][k]=y;
 res[4][k]=z;
res[1][k]=t;
printf("x(%.2lf)=%.8lf y(%.2lf)=%.8lf z(%.2lf)=%.8lf\n",t,x,t,y,t,z);
 }
}
 remove("1.txt");
FILE*file;
file=fopen("1.txt","w");
for(i=0;i<=n1;i++)
{
fprintf(file,"%.16lf   %.16lf    %.16lf\n", res[2][i], res[3][i], res[4][i]) ;
}
fclose(file);
}
double f1(double t, double x, double y, double z)
{
return -y*z;
}
double f2(double t, double x, double y, double z)
{
 return x*z;
}
double f3(double t, double x, double y, double z)
{
return -x*y/3.0;
}
```

После запуска визуализатора Compaq Array Viewer 1.6 необходимо с помощью левой кнопки мыши открыть в строке меню Settings $\rightarrow$ Graph $\rightarrow$ установить(X-Component Index = 1, Y-Component Index = 2, Z-Component Index = 0,W-Component Index = 4). В этом случае графические решения 3 компонент угловой скорости проектируются в координатах $t, W(t)$ на одну плоскость.

**Анализ решений**

Рассмотрим общее решение системы уравнений (4). В дальнейшем будем считать, что равна нулю $W_2(0) = 0$ только одна проекция $W_1(0), W_2(0), W_3(0)$, так как случай трех ненулевых проекций качественно нового решения не дает.

Из приведенных графиков и доказанной теоремы 1 видно, что график $W_2(t)$ всегда имеет корни, периодически проходит через ноль, а в силу периодичности решений случай 3 ненулевых компонент сводится к переносу начала отсчёта. Общий случай сводится к 2 ненулевым компонентам и одной нулевой $W_2(0) = 0$. В дальнейшем всегда $W_2(0) = 0$. Зафиксируем две компоненты угловой скорости $W_2(0) = 0{,}0; W_3(0) = 0{,}3$ и будем варьировать только компоненту $W_1(0)$ как единственный параметр задачи. Обозначим важное для задачи (4) число $W_1(0)^* = 0{,}3\sqrt{3} = W_3(0)\sqrt{I_3 / I_1} \approx 0{,}51961524$. Графики решений с начальными условиями $W_1(0) = 0{,}5; W_2(0) = 0{,}0; W_3(0) = 0{,}3$ приведены на рисунке 3. Поскольку $W_3(t) > 0$ во все моменты времени, то вектор угловой скорости окружает ось $Z$, находится над плоскостью $X - Y$, его проекция на эту плоскость вращается (совершает прецессию). Кроме того частота колебаний функции $W_3(t)$ в 2 раза больше, чем у функций $W_1(t), W_2(t)$.

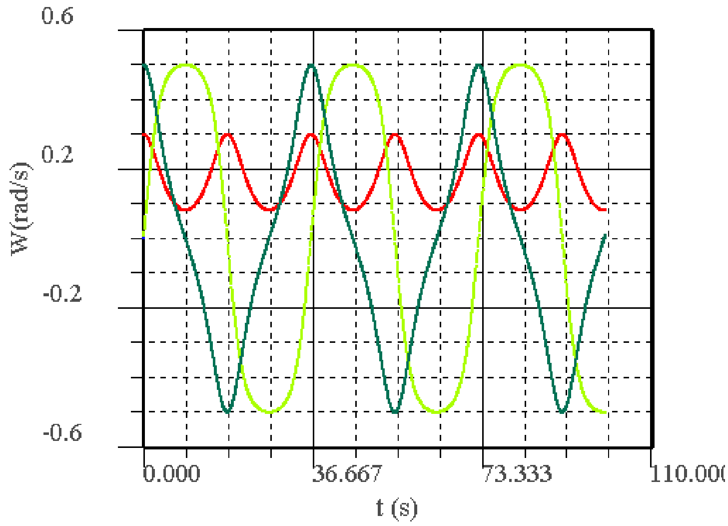



Рис.3. $W_1(0) = 0.5, W_2(0) = 0.0, W_3(0) = 0.3$

В данном случае вектор угловой скорости находится над плоскостью $Y - Z$ и окружает ось $X$ при своем вращении вокруг нее. Кроме того, качественно рисунок 3 переходит в рисунок 4, если оси $X, Z$, а также проекции $W_1(t), W_3(t)$ переставить одновременно, то есть на Рис.3 $W_3(t) > 0$ положительна и окружала ось $Z$, а на Рис.4 $W_1(t) > 0$ и окружает ось $X$.

Графики решений, представленные на рисунках 1-6, подтверждают теорему механики о том, что конус полодии окружает либо ось наибольшего, либо ось наименьшего моментов инерции тела. Но он никогда не окружает ось промежуточного момента инерции[4] (в нашем случае ось $Y$) – (суть доказанного нами утверждения чисто аналитическим подходом).

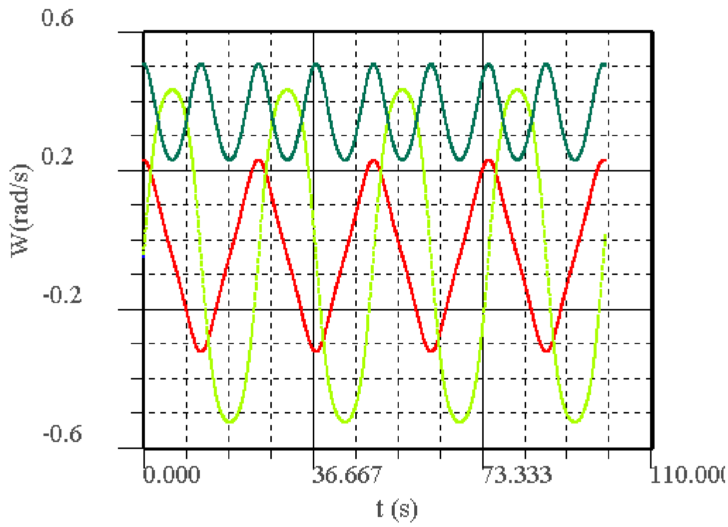



Рис.4. $W_1(0) = 0.6, W_2(0) = 0.0, W_3(0) = 0.3$

Рис.5 соответствует решению системы уравнений (2) с начальными условиями $W_1(0)=0{,}519615; W_2(0)=0{,}0; W_3(0)=0{,}3$, где $W_1(0)$ близко к критическому значению

$W_1(0)^* = 0{,}3\sqrt{3} \approx 0{,}519615242$.

В окрестности точки $W_1(0)^*$ период колебаний графиков решений заметно возрастает (от 37сек. на рис.3 до 110 сек. на рис.5).

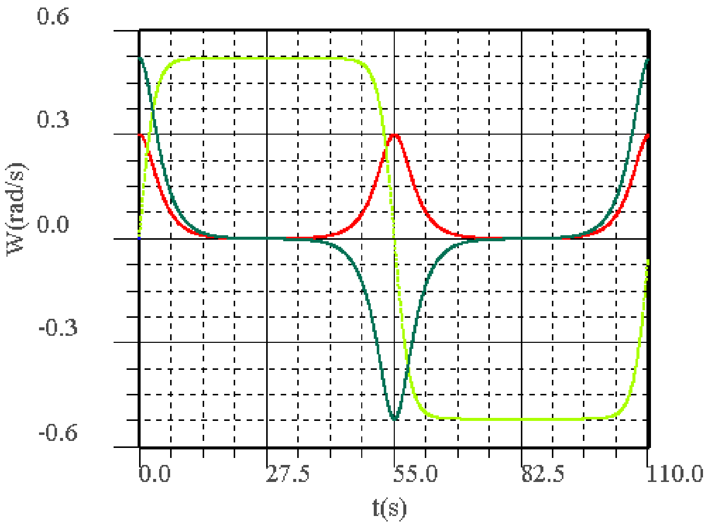



Рис.5. $W_1(0)=0.519615, W_2(0)=0.0, W_3(0)=0.3$

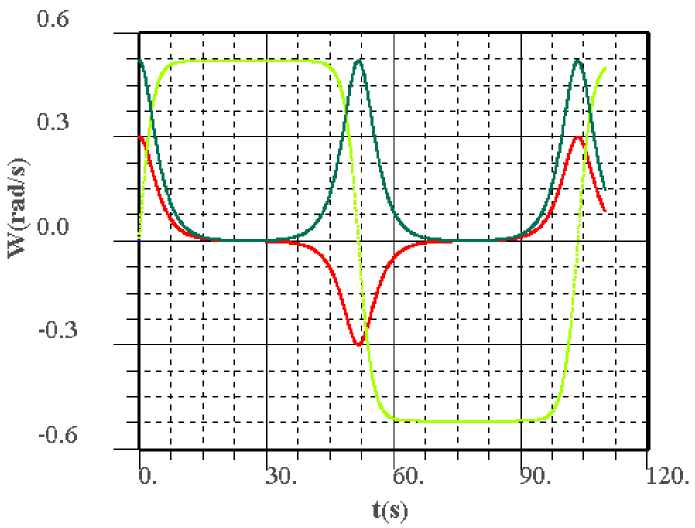



Рис.6. $W_1(0)=0.519616, W_2(0)=0.0, W_3(0)=0.3$

Максимальное значение периода Т=156,35с. Форма решений напоминает периодические прямоугольные импульсы в пределе $W_1(0)\to W_1(0)^*$. Фазовые соотношения между функциями $W_1(t), W_3(t)$ по-прежнему сохраняются (соотношение знаков) для $W_1(0)<W_1(0)^*$ ($W_3(t)>0$ (рис.3,рис.5)) и для $W_1(0)>W_1(0)^*$ численно проверено ($W_1(t)>0$ (рис.4,рис.6)) на больших промежутках времени $t<10000$ с.

Подчеркнем, что сохранение вышеуказанных свойств в окрестности значения $W_1(0)^*$ (даже если $\left|\frac{W_1(0)-W_1(0)^*}{W_1(0)^*}\right| = 4\cdot 10^{-9}$) возможно именно благодаря двойной точности переменных. Если $W_1(0)$ проходит критическое значение $W_1(0)^*$, как видно из рисунков 5 и

6 фазы компонент $W_1(t), W_3(t)$ совпадают, либо противоположны по знаку в любой момент времени. Следовательно, отношение компонент $\left|\frac{W_3(t)}{W_1(t)}\right| = \left|\frac{W_3(0)}{W_1(0)}\right| = \sqrt{I_3 / I_1}$ справедливо в любой момент времени. Кроме того, $E_{1`}(t) = \frac{I_1}{2} W_1^2(t) = \frac{I_3}{2} W_3^2(t) = E_{3`}(t)$ в малой окрестности критической точки $W_1(0) = W_1(0)^*$. Тогда: $E_{1`}(0) = \frac{I_1}{2} W_1^2(0) = \frac{I_3}{2} W_3^2(0) = E_{3`}(0)$

Или, более подробно: $W_1(0)^* = W_3^*(0)\sqrt{I_3 / I_1} = 0{,}3\sqrt{3}$ (4)

Но управляющий параметр $W_1(0)$ изменился с 0,519615 до 0,519616, т.е. всего на 0,000001!. А ориентация оси конуса полодии изменилась с оси z на ось x – т.е. на $90^0$ при малом изменении $W_1(0)$ на 0,000001!

Мы имеем дело с критическим явлением, в котором ориентация оси конуса полодии имеет разрыв (скачок) при непрерывном изменении параметра $W_1(0)$ в окрестности точки $W_1(0)^*$. Обозначим $\tau = \left|\frac{W_1(0) - W_1(0)^*}{W_1(0)^*}\right|$, где $\tau$ - безразмерный критический параметр.

Если $\tau$ стремится к 0, то некоторые физические величины, например, удельная теплоёмкость как функция $\tau$ имеет особенность логарифмического или степенного вида в фазовых переходах второго рода [3]. При фазовых переходах первого рода теплоёмкость вещества равна бесконечности. Фазовые переходы второго рода имеют конечную теплоёмкость с логарифмической либо степенной особенностью и характеризуются изменением порядка термодинамической системы, например, изменением группы симметрии кристаллической решётки твёрдого тела. В теории фазовых переходов постулируется минимум некоторого термодинамического потенциала как термодинамическое устойчивое состояние системы. При фазовых переходах второго рода два состояния системы могут иметь равные минимальные значения термодинамического потенциала с разрывом параметров симметрии, а система при переходе из одного состояния в другое изменяет параметры симметрии с разрывом при малом изменении энергии. Такие явления в физике называются критическими. Другими словами, аналогия механической задачи свободного вращения твёрдого тела с фазовыми переходами второго рода чисто математическая. Если в твёрдой фазе фазовые переходы второго рода сопровождаются изменением порядка трансляции пространственной симметрии (межатомных расстояний в кристаллической решётке), то в данной задаче мы имеем временную трансляционную симметрию (периодическое повторение состояний системы через время $T$). Поскольку обе задачи объединяются только равенством энергий 2 состояний разделённых скачком параметров симметрии (в нашем случае ориентации оси конуса полодии). И обе задачи описываются как критические явления с характерной логарифмической особенностью.

Особенно эффектно изменение ориентации оси конуса полодии можно проследить на фазовой диаграмме в координатной системе $W_1(t), W_2(t), W_3(t)$. На рисунке 7 ось конуса расположена вертикально вдоль оси $z$, $W_1(0) = 0{,}519615; W_2(0) = 0{,}0; W_3(0) = 0{,}3$. А на рис.8 ось конуса полодии совпадает с осью $x$, $W_1(0) = 0{,}519616; W_2(0) = 0{,}0; W_3(0) = 0{,}3$. Изменение параметра $W_1(0)$ составляет всего $\Delta W_1(0) = 10^{-6}$, а ориентация конуса претерпела скачок на 90 градусов! Очевидно, что мы описываем критическое явление!

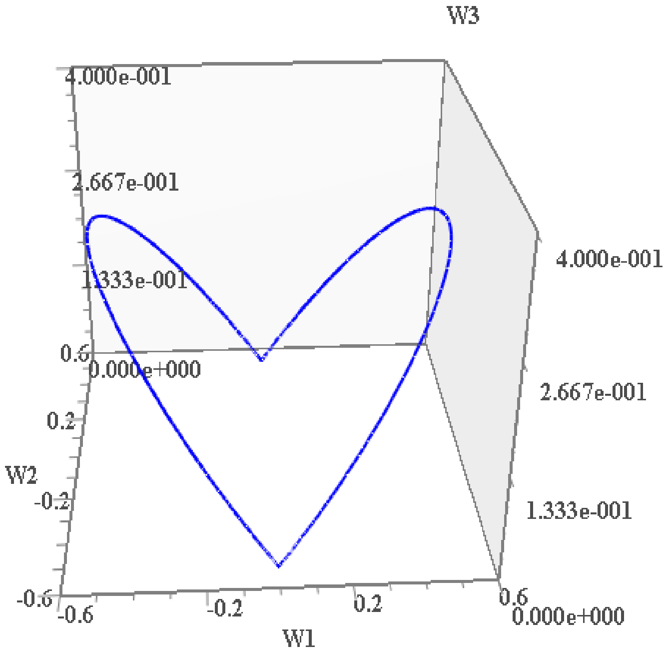



Рис.7. $W_1(0) = 0.519615, W_2(0) = 0.0, W_3(0) = 0.3$

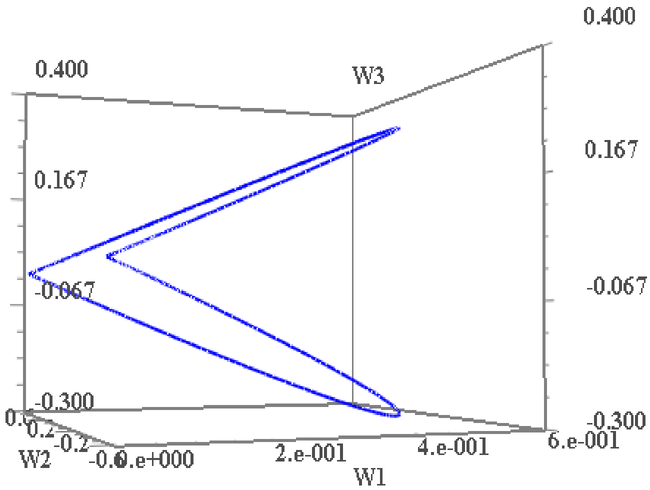



Рис.8. $W_1(0) = 0.519616, W_2(0) = 0.0, W_3(0) = 0.3$

Обозначим $T(\tau)$ - период колебаний прецессии как функцию безразмерного параметра $\tau$ . Заполним таблицу расчетных данных:

Таблица 1

| $W_1(0), \frac{rad}{s}$ | 0.519 | 0.5196 | 0.519615 |
|---|---|---|---|
| $T(\tau), s$ | 58.8 | 83.4 | 111.05 |
| $\tau$ | 1.18* $10^{-3}$ | 2.9333* $10^{-5}$ | 4.66* $10^{-7}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\ln(\tau)$ | -6.7388 | -10.437 | -14.579 |
| $W_1(0), \frac{rad}{s}$ | 0.5196152 | 0.51961524 | 0.519615242 |
| $T(\tau), s$ | 122.65 | 142.15 | 156.35 |
| $\tau$ | 8.135* $10^{-8}$ | 4.369* $10^{-9}$ | 5.2* $10^{-10}$ |
| $\ln(\tau)$ | -16.325 | -19.2485 | -21.375 |

Из приведенной таблицы получаем эмпирическую формулу:

$T = b + a\ln(\tau), a = -6.66516, b = 13.863$, которая даёт относительную погрешность не более чем 0.04%.

***Выводы***

1)Если $\frac{\pi}{2}\frac{\left(W_2(0)^2 + W_1(0)^2 I_2 / I_1\right)}{W_3(0)^2}\sqrt{\frac{I_1 I_2 (I_2 - I_1)^2}{I_3^2 (I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}} << 1$,

то нелинейная система уравнений Л. Эйлера может рассматриваться как квазилинейная, а прецессия решений $W_1(t), W_2(t)$ описывается квазипериодическим процессом, с частотой прецессии прямо пропорциональной $W_3(t) \approx const$.

2) Разрыв ориентации оси конуса полодии на 90 градусов происходит в случае равенства начальных энергий с максимальным и минимальным моментом инерции при бесконечно малом изменении параметра в критической точке $W_1(0)^* = W_3(0)\sqrt{I_3 / I_1} \Leftrightarrow \tau = 0$.

4)В критической области (где $\tau$ стремится к 0) период колебаний угловой скорости имеет логарифмическую особенность как функция $\tau$:

$T = b + a\ln(\tau), a = -6.66516, b = 13.863$, $\tau = \left|\frac{W_1(0) - W_1(0)^*}{W_1(0)^*}\right|$ где $a, b -$ некоторые постоянные

4)Ось конуса полодии совпадает либо с осью максимального, либо минимального момента инерции, а именно,- с осью, соответствующей максимальной кинетической энергии, определяемой начальными условиями:

$$max\left\{\frac{I_1}{2}W_1(0)^2, \frac{I_3}{2}W_3(0)^2\right\}$$

**Литература**


1. Андронов А.А., А.А. Витт, С.Э. Хайкин Теория колебаний./А.А. Андронов. - М.: Физматлит,1959. – 915с.
2. Койтер В.Т. Теоретическая и прикладная механика. Труды 14 международного конгресса IUTAM./В.Т. Койтер. – М.: Мир,1979. – 765с.
3. А.А.Андронов, Е.А.Леонтович, И.И.Гордон, А.Г. Майер Качественная теория динамических систем второго порядка./Леонтович Е.А. – М.: Наука,1966.- 568 с.
4. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Механика/Д.В. Сивухин.-М.: Наука,1989.-576 с.
5. В.А. Зорич Математический анализ. Часть первая – М.:МЦНМО, 2007, 657 с.
6. БартеньевО.В. Математическая библиотека IMSL:(Ч.3)/О.В. Бартеньев.- М.: Диалог-МИФИ,2001.-368 с.
7. Квасников И.А.Термодинамика и статистическая физика (теория равновесных систем)/И.А. Квасников. - М.: МГУ,1991.-793 с.

8. С.В.Павлов. Методы теории катастроф в исследовании фазовых переходов./Павлов С.В. Павлов. – М.: Издательство Московского университета, 1993. – 104 с.

## Лабораторная работа №6 Моделирование рынка 2 конкурирующих фирм и рекламного агентства

В экономике взаимодействие государственных предприятий или частных фирм на рынке зачастую можно смоделировать системой дифференциальных уравнений.

Рассмотрим две конкурирующие фирмы, выпускающие однотипные изделия, например, обувь. У изделий первой фирмы качество товаров ниже, чем у второй, и, она пользуется услугами рекламного агентства для увеличения спроса своего товара.

Динамику изменения числа покупателей товаров первой фирмы $N_1$, второй $N_2$ можно описать системой 2 нелинейных обезразмеренных[1] дифференциальных уравнений первого порядка (усложнённая модель А.А.Самарского[2] на случай двух переменных):

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{N_1}}{d\bar{t}} = \left(-\overline{\alpha_1} + \overline{N_1}\,\overline{\beta_1} + \overline{c_1}\,\overline{N_2}\right)\left(1 - \overline{N_1} - \overline{N_2}\right) \\ \dfrac{d\overline{N_2}}{d\bar{t}} = \left(\overline{\alpha_2} - \overline{N_2}\,\overline{\beta_2} - \overline{c_2}\,\overline{N_1}\right)\left(1 - \overline{N_1} - \overline{N_2}\right) \end{cases} \quad \overline{N_1} = \frac{N_1}{N_0}, \overline{N_2} = \frac{N_2}{N_0}, \bar{t} = \frac{t}{T_0}, \quad 0 \le \overline{N_1}, \overline{N_2}, \bar{t} \le 1 \qquad (1)$$

$$\overline{\alpha_1} = \alpha_1 T_0, \overline{\alpha_2} = \alpha_2 T_0, \overline{\beta_1} = \beta_1 T_0 N_0, \overline{\beta_2} = \beta_2 T_0 N_0, \overline{c_1} = c_1 T_0 N_0, \overline{c_2} = c_2 T_0 N_0, \bar{t} = t / T_0 .$$

Где: $N_0$- население города с потенциальной возможностью покупки товара обеих фирм, - рассматриваемый промежуток времени ($\bar{t}$- безразмерное время). $N_1$, $N_2$ - число покупателей товара 1 и 2 фирм соответственно. Второй множитель в правой части системы $1 - \overline{N_1} - \overline{N_2}$ равен оставшейся доле потенциальных покупателей в городе.

Скорость покупателей товара второй фирмы $\dfrac{d\overline{N_2}}{d\bar{t}}$ пропорциональна $1 - \overline{N_1} - \overline{N_2}$ с коэффициентом рекламы первого порядка $\overline{\alpha_2}$, скорость $\dfrac{d\overline{N_1}}{d\bar{t}}$ пропорциональна $1 - \overline{N_1} - \overline{N_2}$ с коэффициентом $-\overline{\alpha_1}\left(\overline{\alpha_1} = \overline{\alpha_2}\right)$ (рекламное агентство превозносит достоинства товара второй фирмы в ущерб товару первой фирмы). Реклама второго порядка генерируется покупателями и соответствует умножению доли покупателей $\overline{N_1}$ с коэффициентом $\overline{\beta_1} > 0$ (качественным товаром) и умножению $\overline{N_2}$ на отрицательный коэффициент $-\overline{\beta_2}$ с дешёвым некачественным товаром. Коэффициенты $\overline{c_1}, \overline{c_2}$ моделируют отношение покупателей товара одной фирмы к товару противоположной фирмы (реклама второго порядка). Покупатели товара первой фирмы с долей $\overline{N_1}$ хвалят свою покупку и осуждают качество второй фирмы (коэффициенты $\overline{\beta_1}, -\overline{c_2}$ соответственно). Недовольные покупатели с долей $\overline{N_2}$ низким качеством второй фирмы предполагают высокое качество у первой фирмы (коэффициенты $-\overline{\beta_2}, \overline{c_1}$ соответственно). В выбранной нами модели безразмерные коэффициенты порядка единицы (т.к. коэффициенты в левой части(1) равны 1, иначе некоторые слагаемые в системе (1) можно удалить) отражают стоимость, качество товара и отношение покупателей $\overline{\alpha_1} = 0.7, \overline{\alpha_2} = 0.7, \overline{\beta_1} = 0.75, \overline{\beta_2} = 0.97, \overline{c_1} = 1.07, \overline{c_2} = 0.9$.

Предположим, что поворот точки с фазовыми координатами $\left(\overline{N_1}, \overline{N_2}\right)$ на угол $2\pi$ происходит раньше истечения гарантийного срока. Магазины принимают возвращённый товар от покупателей по первому их требованию до истечения гарантийного срока, т.е.

возможна ситуация $\frac{d\overline{N_1}}{d\bar{t}} < 0, \frac{d\overline{N_2}}{d\bar{t}} < 0$. Определим[3] стационарную точку $\left(\overline{N_{01}}, \overline{N_{02}}\right)$ для системы уравнений(1):

$$\begin{cases} \frac{d\overline{N_1}}{d\bar{t}} = 0 \Leftrightarrow \left(-\overline{\alpha_1} + \overline{N_{10}}\overline{\beta_1} + \overline{c_1}\overline{N_{20}}\right) = 0 \\ \frac{d\overline{N_2}}{d\bar{t}} = 0 \Leftrightarrow \left(\overline{\alpha_2} - \overline{N_{20}}\overline{\beta_2} - \overline{c_2}\overline{N_{10}}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{N_{10}} = \frac{\overline{\alpha_2}\,\overline{c_1} - \overline{\alpha_1}\overline{\beta_2}}{\overline{c_1}\,\overline{c_2} - \overline{\beta_1}\overline{\beta_2}} \approx 0.297. \\ \overline{N_{20}} = \frac{\overline{\alpha_1}\,\overline{c_2} - \overline{\alpha_2}\overline{\beta_1}}{\overline{c_1}\,\overline{c_2} - \overline{\beta_1}\overline{\beta_2}} \approx 0.446 \end{cases} \tag{2}$$

В новых переменных $\overline{n_1} = \overline{N_1} - \overline{N_{10}}, \overline{n_2} = \overline{N_2} - \overline{N_{20}}$ из (1) в окрестности особой точки $(0,0)$ получим систему уравнений (3):

$$\begin{cases} \frac{d\overline{n_1}}{d\bar{t}} = \left(\overline{n_1}\overline{\beta_1} + \overline{c_1}\overline{n_2}\right)\left(1 - \overline{N_{10}} - \overline{N_{20}} - \overline{n_1} - \overline{n_2}\right) \approx \left(\overline{n_1}\overline{\beta_1} + \overline{c_1}\overline{n_2}\right)\left(1 - \overline{N_{10}} - \overline{N_{20}}\right) \\ \frac{d\overline{n_2}}{d\bar{t}} = \left(-\overline{n_2}\overline{\beta_2} - \overline{c_2}\overline{n_1}\right)\left(1 - \overline{N_{10}} - \overline{N_{20}} - \overline{n_1} - \overline{n_2}\right) \approx \left(-\overline{n_2}\overline{\beta_2} - \overline{c_2}\overline{n_1}\right)\left(1 - \overline{N_{10}} - \overline{N_{20}}\right) \end{cases} \tag{3}$$

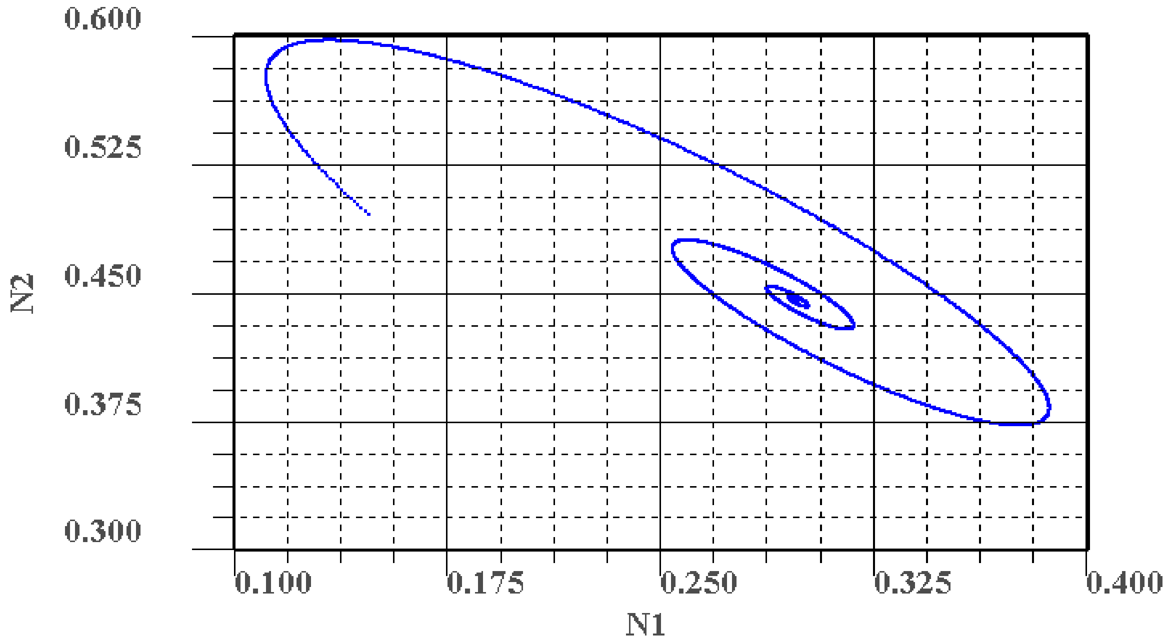



Рис.1 Зависимость $\overline{N_2}\left(\overline{N_1}\right)$: $\overline{\alpha_1} = 0.7, \overline{\alpha_2} = 0.7, \overline{\beta_1} = 0.75, \overline{\beta_2} = 0.97, \overline{c_1} = 1.07, \overline{c_2} = 0.9$, с начальными условиями $\overline{n_1} = -0.15, \overline{n_2} = 0.05$ и временным шагом $h_{\bar{t}} = 0.03$(уст. фокус).

Характеристическое уравнение для собственных значений (3) $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\begin{vmatrix} \overline{\beta_1}\left(1 - \overline{N_{10}} - \overline{N_{20}}\right) - \lambda & \overline{c_1}\left(1 - \overline{N_{10}} - \overline{N_{20}}\right) \\ -\overline{c_2}\left(1 - \overline{N_{10}} - \overline{N_{20}}\right) & -\overline{\beta_2}\left(1 - \overline{N_{10}} - \overline{N_{20}}\right) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \left(1 - \overline{N_{10}} - \overline{N_{20}}\right)\left(\frac{\overline{\beta_1} - \overline{\beta_2}}{2} \pm \frac{\sqrt{\left(\overline{\beta_1} + \overline{\beta_2}\right)^2 - 4\overline{c_1}\,\overline{c_2}}}{2}\right)$$

По классификации особых точек [3] если особая точка $\left(n_1 = 0, n_2 = 0\right)$ является устойчивым фокусом (в линейном приближении), то

$$\overline{\beta_2} > \overline{\beta_1}, \left(\overline{\beta_1} + \overline{\beta_2}\right)^2 - 4\overline{c_1}\,\overline{c_2} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{\overline{\beta_1}\overline{\beta_2}} \le \frac{\overline{\beta_1} + \overline{\beta_2}}{2} < \sqrt{\overline{c_1}\,\overline{c_2}} \Rightarrow \overline{\beta_1}\overline{\beta_2} < \overline{c_1}\,\overline{c_2}.$$

. $\overline{N_{10}} > 0, \overline{N_{20}} > 0, \frac{\overline{\beta_2}}{\overline{c_1}} < \frac{\overline{\alpha_2}}{\overline{\alpha_1}} < \frac{\overline{c_2}}{\overline{\beta_1}} \Rightarrow \overline{\beta_1}\overline{\beta_2} < \overline{c_1}\,\overline{c_2}$. Численно решим нелинейную систему уравнений(3) методом Рунге – Кутты 4-го порядка (результаты приведены на рис.1).

Если особая точка $(n_1=0,n_2=0)$ - устойчивый узел [3], то

$$\overline{\beta_1}-\overline{\beta_2}+\sqrt{\left(\overline{\beta_1}+\overline{\beta_2}\right)^2-4\overline{c_1}\overline{c_2}}<0 \Leftrightarrow \overline{\beta_1}\overline{\beta_2}<\overline{c_1}\overline{c_2}, \overline{\beta_2}>\overline{\beta_1}, \frac{\overline{\beta_1}+\overline{\beta_2}}{2}>\sqrt{\overline{c_1}\overline{c_2}}>\sqrt{\overline{\beta_1}\overline{\beta_2}}$$

$$\overline{N_{10}}>0, \overline{N_{20}}>0, \frac{\overline{\beta_2}}{\overline{c_1}}<\frac{\overline{\alpha_2}}{\overline{\alpha_1}}<\frac{\overline{c_2}}{\overline{\beta_1}} \Rightarrow \overline{\beta_1}\overline{\beta_2}<\overline{c_1}\overline{c_2}\left(\overline{N_{10}}=0.144, \overline{N_{20}}=0.225\right).$$

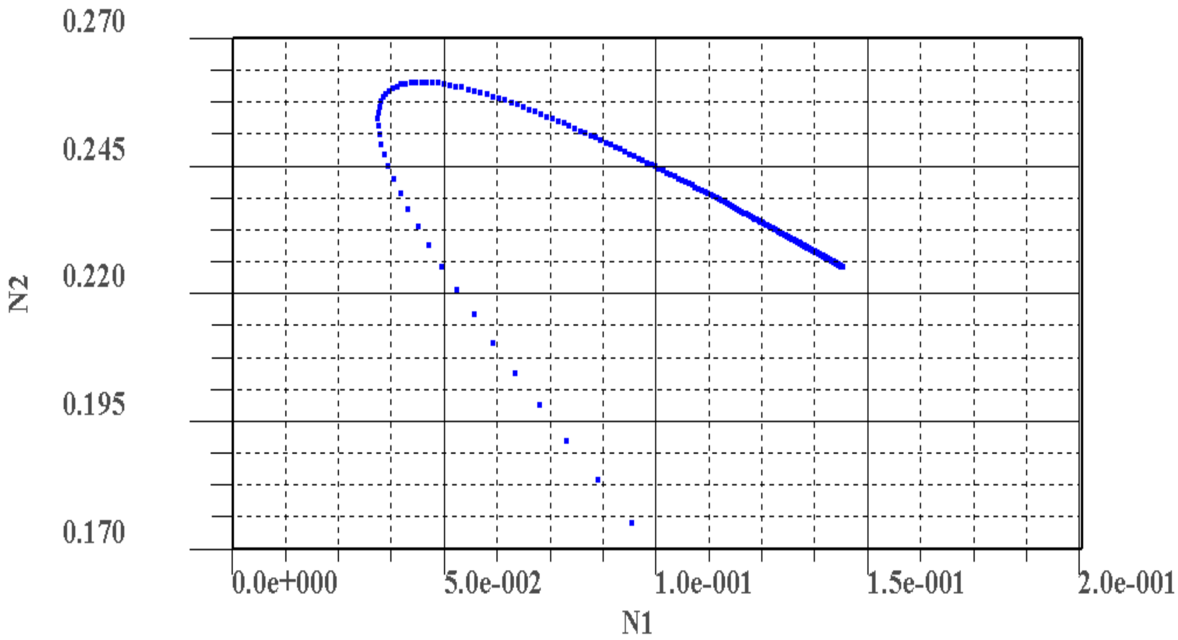



Рис.2 Зависимость $\overline{N_2}\left(\overline{N_1}\right)$: $\overline{\alpha_1}=0.8, \overline{\alpha_2}=0.8, \overline{\beta_1}=0.8, \overline{\beta_2}=2.88, \overline{c_1}=1.05, \overline{c_2}=3.04$, с начальными условиями $\overline{n_1}=-0.05, \overline{n_2}=-0.05$ и шагом сетки $h_{\bar{t}}=0.03$ ( уст. узел).

Программа написана на языке C++. Решения записываются в массив данных res[6][n1+1]. Параметр n1 указывает период числа точек, через который заполняется массив res[6][n1+1]. M - число всех клеток на графике. Начальный и конечный моменты времени a,b соответственно. Численная схема Рунге - Кутты имеет 4 порядок погрешности. Правые части системы дифференциальных уравнений записаны в функциях double f1(double t, double x, double y) и double f2(double t, double x, double y).

```
#include<stdio.h>
#include<iostream>
#include<fstream>
#include<algorithm>
#include<stdlib.h>
#include<vector>
#include<iterator>
#include<math.h>
int const n=100000,n1=1000,m=n/n1;
double f1(double t, double x, double y);
double f2(double t, double x, double y);
int main()
{
int i,k;
double k11,k12,k13,k14,k21,k22,k23,k24;
double x,y,z;
double res[6][n1+1],h,a,b,t,pi;
pi=2.0*asin(1.0);
a=0.0;
```

```
b=120.0;
h=(b-a)/double(n);
k=0;
x=-0.15;
y=0.05;
t=a;
 res[1][0]=t;
 res[2][0]=x+0.297;
res[3][0]=y+0.446;
for(i=1;i<=n;i++)
{
k11=f1(t,x,y);
k21= f2(t,x,y);
k12= f1(t+h/2.0,x+h/2.0*k11,y+h/2.0*k21);
k22=f2(t+h/2.0,x+h/2.0*k11,y+h/2.0*k21);
 k13= f1(t+h/2.0,x+h/2.0*k12,y+h/2.0*k22);
k23=f2(t+h/2.0,x+h/2.0*k12,y+h/2.0*k22);
k14= f1(t+h,x+h*k13,y+h*k23);
k24= f2(t+h,x+h*k13,y+h*k23);
 x=x+h*(k11+2.0*(k12+k13)+k14)/6.0;
y=y+h*(k21+2.0*(k22+k23)+k24)/6.0;
t=t+h;
if(i%m==0)
{
k=k+1;
 res[2][k]=x+0.297;
res[3][k]=y+0.446;
res[1][k]=t;
printf("x(%.2lf)=%.8lf y(%.2lf)=%.8lf \n",t,x+0.297,t,y+0.446,t);

}
}
 remove("15.txt");
FILE*file;
file=fopen("15.txt","w");
for(i=0;i<=n1;i++)
{
fprintf(file,"%.16lf   %.16lf \n", res[2][i], res[3][i]) ;
}
fclose(file);
}
double f1(double t, double x, double y)
{
return (0.75*x+1.07*y)*(1.0-0.297-0.446-x-y);
}
double f2(double t, double x, double y)
{
 return (-0.97*y-0.9*x)*(1.0-0.297-0.446-x-y);
}
```

Из рис.1, рис.2 видно, что система уравнений(3) направляет любую начальную точку, удалённую от стационарной точки по каждой переменной (на рис.1не более чем на 0.15, на рис.2 не более чем на 0.05) в стационарную точку. Стационарная точка - устойчивое состоянием системы бесконечное время, в котором вторая фирма с плохим качеством товара имеет почти вдвое больше покупателей, чем фирма с высоким качеством товара и большей стоимостью. Второй недостаток – изоляция большей доли покупателей.

**Вывод**. Приведена математическая модель экспансии фирмы с плохим качеством товара и рекламного агентства на фирму с высоким качества товара. Возможны два режима блокировки и отток большей доли покупателей города от фирмы с хорошим качеством продукции – устойчивый фокус и устойчивый узел, в последнем случае разорение фирмы с хорошим качеством товара происходит скорее.

Литература:


1) Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М: Наука. Физмат лит. 1977. – 435 с.
2) Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – 2-е изд., испр. – М.: Физмат лит. 2001. – 320 с. – ISBN 5-9221-0120-X.
3) Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М: Наука. Физмат лит. 1992. – 128 с.


## Невырожденные ортогональные преобразования координат. Коэффициенты Ламе.

Задачи математической физики на практике имеют размерность максимум 3. Поэтому рассмотрим произвольное невырожденное преобразование декартовой 3 мерной системы координат в новое 3 мерное координатное пространство.

$$q_1 = q_1(x_1, x_2, x_3), q_2 = q_2(x_1, x_2, x_3), q_3 = q_3(x_1, x_2, x_3), \det\left(\frac{\partial q_i}{\partial x_j}\right) \neq 0, i, j = 1,2,3$$

Возьмём дифференциал от (1):

$$dq_1 = \frac{\partial q_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial q_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial q_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} dx_3$$

$$dq_2 = \frac{\partial q_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial q_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial q_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} dx_3 \qquad (1)$$

$$dq_3 = \frac{\partial q_3(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial q_3(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial q_3(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} dx_3$$

Теперь пусть мы рассматриваем локально ортогональные координатные системы с совпадающими координатными началами, а движение точки в новой координатной системе происходит вдоль координатной линии:

$$dx_1 = \frac{\partial x_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial q_1} dq_1, dx_2 = \frac{\partial x_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial q_1} dq_1, dx_3 = \frac{\partial x_3(x_1, x_2, x_3)}{\partial q_1} dq_1,$$

в силу ортогональности $dx_1, dx_2, dx_3, dl = \sqrt{dx_1^{\ 2} + dx_2^{\ 2} + dx_3^{\ 2}}$ - длина дифференциала дуги неизменна в любой координатной системе, получим длину дифференциала дуги в старой системе координат

$$dl_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1(q_1,q_2,q_3)}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2(q_1,q_2,q_3)}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3(q_1,q_2,q_3)}{\partial q_1}\right)^2}\, dq_1 = H_1 dq_1$$

Аналогично, вдоль 2 других координатных линий в новой координатной системе

$$dl_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1(q_1,q_2,q_3)}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2(q_1,q_2,q_3)}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3(q_1,q_2,q_3)}{\partial q_2}\right)^2}\, dq_2 = H_2 dq_2$$

$$dl_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1(q_1,q_2,q_3)}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2(q_1,q_2,q_3)}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3(q_1,q_2,q_3)}{\partial q_3}\right)^2}\, dq_3 = H_3 dq_3 \qquad (2)$$

Где обозначены масштабные коэффициенты – коэффициенты Ламе

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x_1(q_1,q_2,q_3)}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2(q_1,q_2,q_3)}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3(q_1,q_2,q_3)}{\partial q_1}\right)^2} = H_1$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x_1(q_1,q_2,q_3)}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2(q_1,q_2,q_3)}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3(q_1,q_2,q_3)}{\partial q_2}\right)^2} = H_2 \qquad (3)$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x_1(q_1,q_2,q_3)}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2(q_1,q_2,q_3)}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3(q_1,q_2,q_3)}{\partial q_3}\right)^2} = H_3$$

Для наиболее часто применяемых в математической физике координатных систем (цилиндрической и сферической) вычислим коэффициенты Ламе:

1) $x_1 = r\cos\varphi, x2 = r\sin\varphi, x3 = z, q_1 = r, q_2 = \varphi, q_3 = z, 0 \le r, 0 \le \varphi \le 2\pi$

$$H_1 = \sqrt{(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2 + (0)^2} = 1,\ H_2 = \sqrt{(-r\sin\varphi)^2 + (r\cos\varphi)^2 + (0)^2} = r \qquad (4)$$

$H_3 = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (1)^2} = 1$ - в цилиндрической системе координат.

2) $x_1 = r\sin(\vartheta)\cos\varphi, x2 = r\sin(\vartheta)\sin\varphi, x3 = r\cos(\vartheta), q_1 = r, q_2 = \vartheta, q_3 = \varphi$

$0 \le r, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \vartheta \le \pi$

$$H_1 = \sqrt{(\sin(\vartheta)\cos\varphi)^2 + (\sin(\vartheta)\sin\varphi)^2 + (\cos(\vartheta))^2} = 1,$$

$$H_2 = \sqrt{(r\cos(\vartheta)\cos\varphi)^2 + (r\cos(\vartheta)\sin\varphi)^2 + (-r\sin(\vartheta))^2} = r \qquad (5)$$

$$H_3 = \sqrt{-(r\sin(\vartheta)\sin\varphi)^2 + (r\sin(\vartheta)\cos\varphi)^2 + (0)^2} = r\sin(\vartheta)$$

- в сферической системе координат.

В дальнейшем нам понадобится запись операторов теории поля для ортогональных систем координат – градиента, дивергенции, оператора Лапласа.

1) В новой ортогональной системе координат для оператора градиента имеем:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial l_1}, \frac{\partial u}{\partial l_2}, \frac{\partial u}{\partial l_3}\right) = \left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}, \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}, \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right) = \left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}, \frac{1}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)u \qquad (6)$$

В частности, если новая и старая (декартова $\{x_1, x_2, x_3\}$) координатные системы совпадают

$x_1 = q_1, x_2 = q_2, x_3 = q_3$, то $H_1 = H_2 = H_3 = 1$ $\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{\partial}{\partial q_2}, \frac{\partial}{\partial q_3}\right)u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)u$

2) Оператор дивергенции векторного поля $\vec{\mathrm{A}} = \{A_1(q_1,q_2,q_3), A_2(q_1,q_2,q_3), A_3(q_1,q_2,q_3)\}$,

в старой (декартовой) системе координат есть $div\,\vec{\mathrm{A}} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$.

А с другой стороны, по определению, $div\,\vec{A} \equiv \lim\limits_{V\to 0}\dfrac{1}{V}\oint\limits_{S}\vec{A}\,\vec{n}\,ds$ (7)

где: $V$ - объём тела с гладкой замкнутой поверхностью площади $S$, $ds$ - дифференциал площади, $\vec{n} = \{n_1(q_1,q_2,q_3), n_2(q_1,q_2,q_3), n_3(q_1,q_2,q_3)\}$ - вектор внешней нормали к дифференциалу площади $\vec{ds}$ $\vec{A}\,\vec{n}$ - скалярное произведение векторов. Не теряя общности, воспользуемся определением (7) для расчёта дивергенции в параллелепипеде:

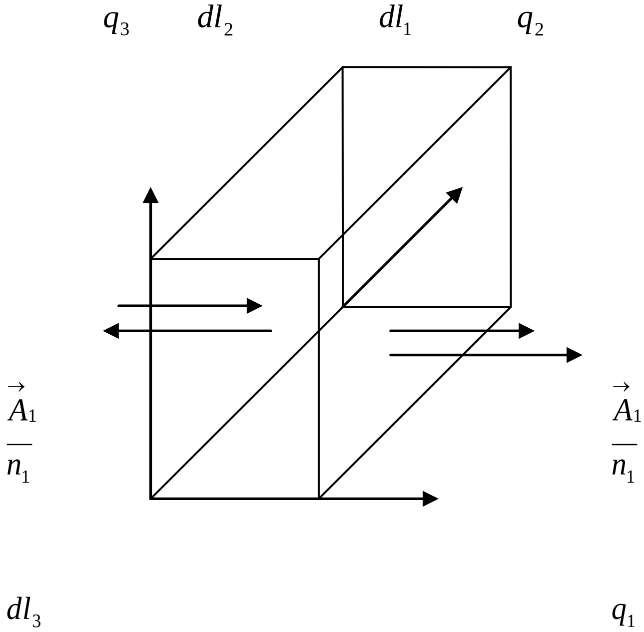



Рис.1 Дивергенция векторного поля вдоль оси $q_1$.

Из рисунка 1 видно, что поток векторного поля через две противоположные грани параллелепипеда перпендикулярным оси $q_1$ равен:

$$\Delta F_1 = \Delta\left(\vec{A}_1\,\vec{n}_1\,S_1\right) = \Delta\left(A_1(q_1,q_2,q_3)dl_2 dl_3\right) = \Delta\left(A_1(q_1,q_2,q_3)H_2H_3dq_2dq_3\right) =$$

$$\frac{\partial\left(A_1(q_1,q_2,q_3)H_2H_3dq_2dq_3\right)}{\partial l_1}dl_1 = \frac{\partial\left(A_1(q_1,q_2,q_3)H_2H_3\right)}{\partial q_1}dq_1dq_2dq_3$$

Переменные $q_1, q_2, q_3$ не зависят друг от друга. Поэтому, дифференциалы $dq_2dq_3$ можно вынести из - под знака производной $dl_1 = H_1dq_1$ (2). Тогда $dl_1$ представляет собой движение точки вдоль координатной линии $q_1$. Благодаря локальной ортогональности координатных линий $q_1, q_2, q_3$ имеем, что частный дифференциал в этом случае равен полному дифференциалу $\partial q_1 = dq_1$, тогда $\partial l_1 = H_1\partial q_1 = dl_1 = H_1dq_1$.

Аналогично, поток векторного поля через две другие противоположные пары граней равен:

$$\Delta F_2 = \Delta\left(\vec{A}_2\,\vec{n}_2\,S_2\right) = \Delta\left(A_2(q_1,q_2,q_3)dl_1 dl_3\right) = \Delta\left(A_2(q_1,q_2,q_3)H_1H_3dq_1dq_3\right) =$$

$$\frac{\partial\left(A_2(q_1,q_2,q_3)H_1H_3dq_1dq_3\right)}{\partial l_2}dl_2 = \frac{\partial\left(A_2(q_1,q_2,q_3)H_1H_3\right)}{\partial q_2}dq_1dq_2dq_3$$

$$\Delta F_3 = \Delta\left(\vec{A}_3\,\vec{n}_3\,S_3\right) = \Delta\left(A_3(q_1,q_2,q_3)dl_2 dl_1\right) = \Delta\left(A_3(q_1,q_2,q_3)H_2H_1dq_2dq_1\right) =$$

$$\frac{\partial\left(A_3(q_1,q_2,q_3)H_2H_1dq_2dq_1\right)}{\partial l_3}dl_3=\frac{\partial\left(A_3(q_1,q_2,q_3)H_2H_1\right)}{\partial q_3}dq_1dq_2dq_3$$

Полный поток векторного поля через параллелепипед объёмом $V=dl_1dl_2dl_3$ равен:

$$\Delta F=\Delta F_1+\Delta F_2+\Delta F_3=\left(\frac{\partial\left(A_1(q_1,q_2,q_3)H_2H_3\right)}{\partial q_1}+\frac{\partial\left(A_2(q_1,q_2,q_3)H_1H_3\right)}{\partial q_2}+\frac{\partial\left(A_3(q_1,q_2,q_3)H_2H_1\right)}{\partial q_3}\right)dq_1dq_2dq_3$$

Имеем:

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{\mathrm{A}}\,\vec{\mathrm{n}}ds=\Delta F=\left(\frac{\partial\left(A_1(q_1,q_2,q_3)H_2H_3\right)}{\partial q_1}+\frac{\partial\left(A_2(q_1,q_2,q_3)H_1H_3\right)}{\partial q_2}+\frac{\partial\left(A_3(q_1,q_2,q_3)H_2H_1\right)}{\partial q_3}\right)dq_1dq_2dq_3$$

По формуле (7) получим:

$$div\,\vec{\mathrm{A}}\equiv\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint\!\!\!\oint_S \vec{\mathrm{A}}\,\vec{\mathrm{n}}ds\,\frac{\Delta F}{dl_1dl_2dl_3}=\frac{\Delta F}{H_1dq_1H_2dq_2H_3dq_3}=$$

$$=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial\left(A_1(q_1,q_2,q_3)H_2H_3\right)}{\partial q_1}+\frac{\partial\left(A_2(q_1,q_2,q_3)H_1H_3\right)}{\partial q_2}+\frac{\partial\left(A_3(q_1,q_2,q_3)H_2H_1\right)}{\partial q_3}\right)\qquad(8)$$

Формула (8) и описывает дивергенцию векторного поля в произвольной криволинейной системе координат. В частном случае для перехода от декартовой системы координат к декартовой системе координат $H_1=H_2=H_3=1$ и формула (8) переходит в хорошо известную формулу $div\,\vec{\mathrm{A}}=\frac{\partial A_1}{\partial q_1}+\frac{\partial A_2}{\partial q_2}+\frac{\partial A_3}{\partial q_3}=\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}$

В цилиндрической и сферической системах координат получим соответственно:

1) $div\,\vec{\mathrm{A}}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(A_r r)}{\partial r}+\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z r}{\partial z}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial(A_r r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$

2)

$$div\,\vec{\mathrm{A}}=\frac{1}{r^2\sin(\vartheta)}\left(\frac{\partial\left(A_r r^2\sin(\vartheta)\right)}{\partial r}+\frac{\partial A_\vartheta r\sin(\vartheta)}{\partial\vartheta}+\frac{\partial A_\varphi r}{\partial\varphi}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(A_r r^2\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial\left(A_\vartheta\sin(\vartheta)\right)}{\partial\vartheta}+\frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

Наконец, мы сможем построить оператор Лапласа в произвольных криволинейных ортогональных системах координатах, используя формулы (6),(8):

$$\Delta u=div(grad\,u)=div\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1},\frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2},\frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)=$$

$$=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial\left(A_1(q_1,q_2,q_3)H_2H_3\right)}{\partial q_1}+\frac{\partial\left(A_2(q_1,q_2,q_3)H_1H_3\right)}{\partial q_2}+\frac{\partial\left(A_3(q_1,q_2,q_3)H_2H_1\right)}{\partial q_3}\right)=$$

$$=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial\left(\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)H_2H_3\right)}{\partial q_1}+\frac{\partial\left(\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)H_1H_3\right)}{\partial q_2}+\frac{\partial\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}H_2H_1\right)}{\partial q_3}\right)=$$

$$\Delta u=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)}{\partial q_1}+\frac{\partial\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)}{\partial q_2}+\frac{\partial\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)}{\partial q_3}\right)\qquad(9)$$

В частном случае для перехода от декартовой системы координат к декартовой системе координат $H_1 = H_2 = H_3 = 1$ и формула (9) переходит в хорошо известную формулу

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial {q_1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {q_2}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {q_3}^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

В цилиндрической и сферической системах координат имеем:

$$1)\ \Delta u = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)}{\partial \varphi} + \frac{\partial\left(r\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial z}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (10)$$

$$2)\ \Delta u = \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\left(\frac{\partial\left(r^2 \sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)}{\partial \vartheta} + \frac{\partial\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)}{\partial \varphi}\right) =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \qquad (11)$$

Формулы (10) и (11) часто используются при решении эллиптических задач математической физики.

Литература:


1) Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972.
2) Будак Б.М., С.В.Фомин. Кратные интегралы и ряды. – М.: Наука, 1965. 608 с.

**Задача об обтекании бесконечного цилиндра идеальной несжимаемой жидкостью**

Как известно, течение жидкости описывается уравнением неразрывности. Уравнение неразрывности – следствие закона сохранения массы в произвольном случае, т.е. во всех случаях движение жидкости с переменной плотностью во времени.

Не теряя общности, в большом объёме жидкости выделим объём с гладкой поверхностью. Изменение массы жидкости внутри выделенного объёма равно:
$\Delta\iiint\limits_V \rho(\bar{x})dv$, где $\rho(\bar{x})$ плотность жидкости в точке $\bar{x}$, $dv$ - элемент объёма.

Масса жидкости внутри воображаемого объёма уменьшается за счёт оттока массы через гладкую границу объёма за малый промежуток времени $\Delta t$:
$\Delta t\iint\limits_S \bar{v}\rho(\bar{x})\bar{n}ds$. В последнем интеграле используем теорему Остроградского – Гаусса

$$\Delta t\iint\limits_S \bar{v}\rho(\bar{x})\bar{n}ds = \Delta t\iiint\limits_V div(v\rho(\bar{x}))dv$$

Приравняем указанные изменения масс с разными знаками в пределе $\Delta t \to 0$

$$\iiint\limits_V \Delta\rho(\bar{x})dv = -\Delta t\iiint\limits_V div(\bar{v}\rho(\bar{x}))dv \Leftrightarrow \lim_{\Delta t\to 0}\iiint\limits_V \left[\frac{\partial\rho(\bar{x})}{\partial t} + div(\bar{v}\rho(\bar{x}))\right]dv = 0$$

В последнем интеграле перейдём к бесконечно малому объёму $V \to 0$, получим:

$$\frac{\partial\rho(\bar{x})}{\partial t} + div(\bar{v}\rho(\bar{x})) = 0 \qquad (1)$$

для любой рассматриваемой точки объёма жидкости $\bar{x}$.

Уравнение (1) называется уравнением неразрывности. Частная временная производная и полная производная по времени входят в следующее уравнение:

$$\frac{d\rho(x,y,z)}{dt} = \frac{\partial\rho(x,y,z)}{\partial t} + \frac{\partial\rho(x,y,z)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\rho(x,y,z)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\rho(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial\rho(x,y,z)}{\partial t} + \frac{\partial\rho(x,y,z)}{\partial x}v_x + \frac{\partial\rho(x,y,z)}{\partial y}v_y + \frac{\partial\rho(x,y,z)}{\partial z}v_z \qquad (2)$$

$(v_x, v_y, v_z)$ - компоненты вектора скорости. Преобразуем формулу (1), используя(2)

$$0 = \frac{\partial\rho(\bar{x})}{\partial t} + div(\bar{v}\rho(\bar{x})) = \frac{\partial\rho(\bar{x})}{\partial t} + \frac{\partial\rho(x,y,z)}{\partial x}v_x + \frac{\partial\rho(x,y,z)}{\partial y}v_y + \frac{\partial\rho(x,y,z)}{\partial z}v_z + \rho(\bar{x})div(\bar{v})$$

$$\frac{d\rho(\bar{x})}{dt} + \rho(\bar{x})div(\bar{v}) = 0 \qquad (3)$$

Формулу (3) как и формулу (1) также называют уравнением неразрывности.

Для несжимаемой жидкости, по определению жидкости с неизменной во времени плотностью получим упрощённое уравнение неразрывности:

$$\frac{d\rho(\bar{x})}{dt} = 0 \Leftrightarrow \rho(\bar{x})div(\bar{v}) = 0 \Leftrightarrow div(\bar{v}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \qquad (4)$$

Уравнение неразрывности (4), записанное в декартовой системе координат определяет траектории движения частиц несжимаемой жидкости.

Допустим следующий шаг идеализации свойств жидкости, предположим, что она идеальная, т.е. движется без трения, такое движение жидкости называют потенциальным. И только для потенциальной жидкости можно представить её скорость как градиент некоторой потенциальной функции $\bar{v} = grad(u)$.

$$div(\bar{v}) = 0 \Leftrightarrow div(grad(u)) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv \Delta u = 0 \qquad (5)$$

Уравнение (5) называется уравнением Лапласа и относится по классификации к эллиптическим уравнениям второго порядка в частных производных.

Очевидно, что для решения в задаче обтекания длинного цилиндра идеальной жидкостью нужно использовать аксиальную симметрию, т. е. искать решение уравнения Лапласа (5) в полярной системе координат

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad (6)$$

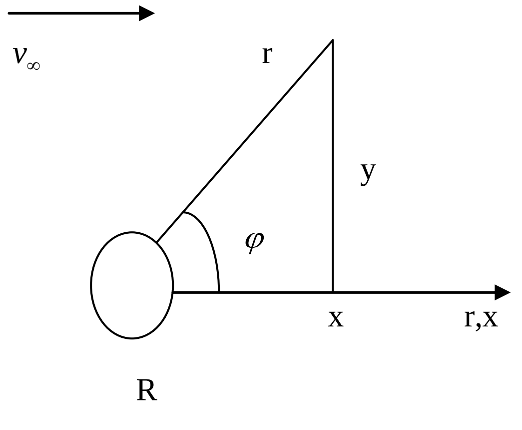
*Граничными условиями будут*:1) условие не протекания на образующей боковой поверхности цилиндра радиуса R. Скорость жидкости запишем через градиент потенциала в полярной системе координат

$$\vec{v} = \nabla u = \left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}, \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\Bigg|_{r=R} \qquad (7)$$

Другими словами, вектор скорости жидкой частицы в каждой точке образующей цилиндра перпендикулярен к вектору нормали $\vec{n} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, где $\varphi$ - угол между радиусом вектором полярной системы координат с началом координатной системы, лежащей на оси цилиндра и осью 0x. Тогда $\vec{v}\,\vec{n} = 0 \Leftrightarrow v_{r=R} = \frac{\partial u}{\partial R} = 0$ (8)

На бесконечности жидкие частицы направлены горизонтально $\vec{v} = (v_x, 0) = (v_\infty, 0)$(9)

Интегрируя уравнение(7) $\frac{\partial u}{\partial x} = v_\infty$ для частиц, движущихся по горизонтальной оси x(ось x проходит через ось цилиндра), получим $u(x,0) = v_\infty x + C$. Из прямоугольного треугольника имеем $u = v_\infty r\cos\varphi + C$. Постоянную C удобно выбрать таким образом




чтобы на оси цилиндра потенциал скорости обращался в ноль $u\big|_{r=0} = v_\infty r\cos\varphi + C = 0 \Leftrightarrow C = 0, u(r,\varphi) = v_\infty r\cos\varphi$ - *второе граничное условие*

В результате мы можем сформулировать задачу на языке математической физики

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = 0 \\ u(r\to\infty,\varphi) = v_\infty r\cos\varphi \\ 0 \le r, 0\le\varphi\le 2\pi \end{cases} \qquad (10)$$

Рассмотрим решения первого уравнения системы (10). Ищем решение методом разделения переменных $u(r,\varphi) = R(r)F(\varphi)$

$$\frac{F(\varphi)}{r}\frac{\partial\left(r\dfrac{\partial R(r)}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{R(r)}{r^2}\frac{\partial^2 F(\varphi)}{\partial\varphi^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{F(\varphi)}{r}\left(rR'\right)' + \frac{R(r)}{r^2}F(\varphi)'' = 0$$

Последнее уравнение разделим на $u(r,\varphi) = R(r)F(\varphi)$, затем умножим на $r^2$ и перенесем переменные $r,\varphi$ по разные стороны уравнения:

$$\frac{F(\varphi)''}{F(\varphi)} = -\frac{r\left(rR'\right)'}{R(r)} = -\lambda$$

Последнее возможно если и только если $\lambda = const$. В результате получаем два, связанных параметром $\lambda$ уравнения:

$$F(\varphi)'' + \lambda F(\varphi) = 0, \quad r\left(rR'\right)' - \lambda R(r) = 0 \qquad (11)$$

В силу непрерывности и периодичности функции $F(\varphi)$ для неё периодом является $2\pi : F(\varphi + 2\pi) = F(\varphi)$

$$\begin{cases} F(\varphi)'' + \lambda F(\varphi) = 0 \\ F(\varphi+2\pi) = F(\varphi) \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases} \qquad (12)$$

$$F(\varphi) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}\varphi\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}\varphi\right) = F(\varphi+2\pi) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}(\varphi+2\pi)\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}(\varphi+2\pi)\right)$$

Последнее равенство возможно, если $\sqrt{\lambda}2\pi = 2\pi n \Leftrightarrow \lambda = n^2, n = \pm(1,2,...)$

Где число $n$ целое. Тогда общее решение системы (12) есть

$$F_n(\varphi) = A\cos(n\varphi) + B\sin(n\varphi), n = \pm(1,2,...) \qquad (13)$$

Возвращаемся ко второму уравнению (11) (нижний индекс n у $R_n(r)$ появился в связи с использованием (13))

$$r\left(rR_n{}'\right)' - n^2 R_n(r) = 0 \Leftrightarrow rR_n{}' + r^2 R_n{}'' - n^2 R_n(r) = 0 \qquad (14)$$

Общее решение уравнения(14) ищем на классе степенных функций:

$R_n(r) = Cr^k$ которое подставим в (14)

$$Cr^k\left(k + k(k-1) - n^2\right) = 0 \ \ \forall r > 0 \Leftrightarrow k^2 = n^2 \Leftrightarrow k = \pm n$$

Тогда общее решение уравнения (14) есть $R_n(r) = C_{1n}r^n + C_{2n}r^{-n}, n = 1,2,...$

Суммируя произведения угловой и радиальной части по целочисленному параметру $n = 1,2,...$ получим:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{1n}r^n + C_{2n}r^{-n}\right)\cos(n\varphi) + \left(C_{3n}r^n + C_{4n}r^{-n}\right)\sin(n\varphi) \qquad (15)$$

Отдельно рассмотрим случай с параметром $n = 0$, т.е. (11) переходит в упрощённое уравнение $r\left(rR'_0\right)' = 0 \Leftrightarrow rR_0{}' = C_0, R_0{}' = C_0 / r,\ R_0(r) = C_0\ln(r) + C_1$, окончательно,

$$u(r,\varphi)=C_1+C_0\ln(r)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{1n}r^n+C_{2n}r^{-n}\right)\cos(n\varphi)+\left(C_{3n}r^n+C_{4n}r^{-n}\right)\sin(n\varphi) \qquad (16)$$

Общее решение уравнения 1 системы уравнений (10). Кроме того необходимо, чтобы решение(16) удовлетворяло граничным условиям 2,3 системы (10). Сравнивая общее решение (10) с третьим уравнением системы(10) видим, что при $r\to\infty$:

$$u(r\to\infty,\varphi)=v_\infty r\cos\varphi=C_1+C_0\ln(r)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{1n}r^n\right)\cos(n\varphi)+\left(C_{3n}r^n\right)\sin(n\varphi)\Rightarrow$$

$$n=1, C_1=C_0=0, C_{3n}=C_{4n}=0, n=1,2,..., C_{1n}=0, n=2,3..., \ C_{11}=v_\infty$$

В силу линейной независимости систем функций $\begin{cases}\sin n\varphi\\ \cos n\varphi\end{cases}, \begin{cases}r^n\\ r^{-n}\end{cases} \ n=0,1,2,...$

Тогда из(16) возможны только функции вида $u(r,\varphi)=\left(C_{11}r+\dfrac{C_{21}}{r}\right)\cos(\varphi)$ (17)

Из третьего уравнения системы (10) получим

$u(r\to\infty,\varphi)=v_\infty r\cos\varphi=C_{11}r\cos(\varphi)\Leftrightarrow C_{11}=v_\infty$

Из уравнения (9) на поверхности цилиндра $r=R$, дифференцируя (17) по переменным $r,\varphi$, получим:

$$u(r,\varphi)'_r=\left(C_{11}-\frac{C_{21}}{r^2}\right)\cos(\varphi), u(r,\varphi)'_\varphi=-\left(C_{11}r+\frac{C_{21}}{r}\right)\sin(\varphi)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=0\Leftrightarrow,\left(C_{11}-\frac{C_{21}}{R^2}\right)\cos(\varphi)=0,\forall\varphi\in[0,2\pi]\Leftrightarrow C_{21}=C_{11}R^2=v_\infty R^2,$$

Окончательно потенциал скорости в задаче(10) математической физики равен

$$u(r,\varphi)=v_\infty\left(r+\frac{R^2}{r}\right)\cos(\varphi) \qquad (18)$$

Компоненты скорости жидких частиц

$$\vec{v}=\left(v_r,v_\varphi\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)=v_\infty\left(\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\cos(\varphi),\ -\frac{1}{r}\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin(\varphi)\right) \qquad (19)$$

Или более подробно

$$\begin{cases}v_r=v_\infty\left(1-\dfrac{R^2}{r^2}\right)\cos(\varphi)\\ v_\varphi=-v_\infty\left(1+\dfrac{R^2}{r^2}\right)\sin(\varphi)\end{cases}\qquad 0\le r,\ 0\le\varphi\le 2\pi \qquad (20)$$

На поверхности цилиндра $r=R$ формула (20) преобразуется в формулу

$$\begin{cases}v_r=0\\ v_\varphi=-2v_\infty\sin(\varphi)\end{cases}\qquad r=R,\ 0\le\varphi\le 2\pi \qquad (21)$$

Из формулы (21) видно, что при условии $\varphi=\pi/2, v_\varphi=-2v_\infty$, $\varphi=-\pi/2, v_\varphi=2v_\infty$. Знак минус в первом случае означает, что угол $\varphi$ отсчитывают против часовой стрелки и касательный единичный вектор направлен противоположно $v_\infty$.

Именно в этих двух указанных точках модуль скорости жидких частиц больше значения скорости жидкости на бесконечности в 2 раза.

Литература:

1)Ольховский И.И. Теоретическая механика для физиков.- М.: Издательство МГУ.1978, 574с.

## Уравнения в частных производных второго порядка

### 1.Волновое уравнение (по классификации гиперболического типа)

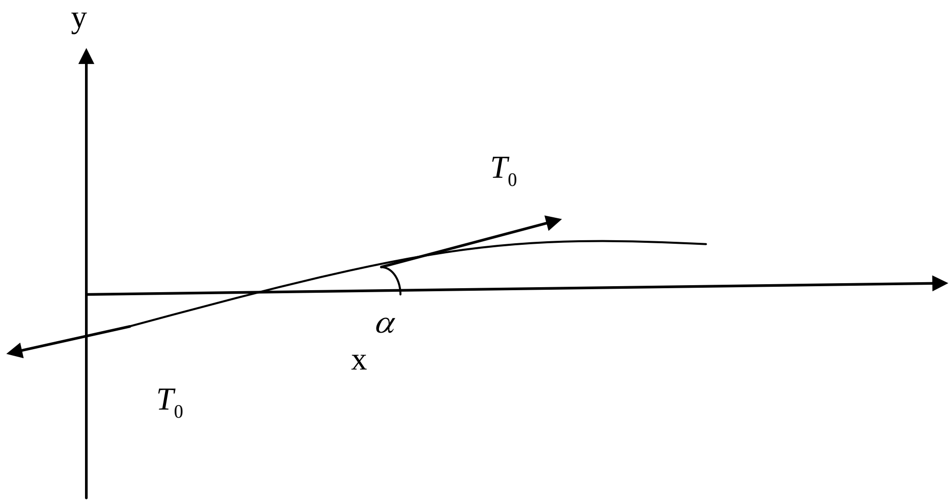
Рассмотрим малые отклонения от положения равновесия бесконечной горизонтально расположенной растянутой с силой $T_0$ упругой струны. Считаем, что при малых отклонениях натяжение струны не меняется и постоянно вдоль всей длины. Выделим малый элемент струны длиной $dx$ с дифференциалом массы $dm = \rho dx$, где $\rho$ - линейная плотность струны (масса на единицу длины). Запишем второй закон Ньютона для выделенного элемента в проекции на ось y

$$y : dF_y = T_0\left(\sin(\alpha + d\alpha) - \sin(\alpha)\right) \approx T_0 \cos(\alpha) d\alpha \approx T_0 d\alpha = dma = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\rho dx \qquad (22)$$

При малых углах $\alpha$ из прямоугольного треугольника получим $tg(\alpha) \approx \alpha = \frac{dy}{dx}$.

Последнее выражение подставим в формулу (22)

$$T_0 d\alpha = T_0 d\left(\frac{dy}{dx}\right)\Bigg|_{t=const} = T_0 \frac{d^2 y}{dx^2} dx = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\rho dx \Leftrightarrow T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\rho \Leftrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\rho}{T_0}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \qquad (23)$$




Окончательно, обозначая $\frac{1}{c^2} = \frac{\rho}{T_0}$ из уравнения(23)получим волновое уравнение

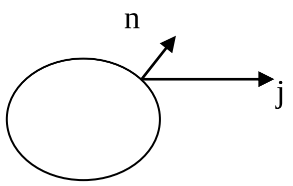
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \qquad (24)$$

Где c –фазовая скорость волны вертикального(поперечные волны) возмущения. Поперечная волна возмущений распространяется вдоль оси x с постоянной скоростью $c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$ .

## 2.Уравнение теплопроводности (по классификации параболического типа)

Рассмотрим тело конечного объёма $V$ с гладкой границей. Теплопроводность тела $k = k(r)$ является функцией только радиус – вектора, но не является функцией времени.

Теплоёмкость и плотность среды также функции радиус – вектора




Плотность потока тепла определяется с помощью формулы Ньютона

$$j = -k \ gradT(r,t) = -k\nabla T(r,t) \tag{25}$$

Знак минус в формуле (25) показывает, что тепло распространяется противоположно направлению градиенту температуры (от более нагретых участков к менее нагретым).

Из – за того, что плотность потока тепла составляет некоторый угол с вектором нормали в точке на поверхности, плотность потока пропорциональна скалярному произведению $\left(\vec{j}, \vec{n}\right)$. Полное тепло, ушедшее через поверхность тела за малый промежуток времени $dt$ равно:

$$dQ_1 = dt\iint_S (jn)ds \tag{26}$$

Преобразуем поверхностный интеграл (26), используя теорему Остроградского – Гаусса

$$dQ_1 = dt\iint_S \left(\vec{j}, \vec{n}\right)ds = dt\iiint_V div\left(\vec{j}\right)dv = -dt\iiint_V div(k\nabla T(r,t))dv \tag{27}$$

Если в теле действуют источники объёмного тепла $q(r,t)$, то убыль энергии по формуле(27) компенсируется остыванием тела $dQ_2$ и внутренними источниками тепла $dQ_3$

$$dQ_2 = -\iiint_V d(T)c\rho dv \tag{28}$$

температура в теле малого объёма распределена практически однородно и изменяется на малый дифференциал $d(T)$.

$$dQ_3 = \iiint_V qdtdv$$

Из закона сохранения энергии, изменение количеств тепла внутри тела равно изменению количества тепла, прошедшего через его границу за то же время:

$$dQ_1 = dQ_2 + dQ_3 \Leftrightarrow -dt\iiint_V div(k\nabla T(r,t))dv = -\iiint_V d(T)c\rho dv + \iiint_V qdtdv \Leftrightarrow$$

$$\iiint_V d(T)c\rho dv = \iiint_V dt\ div(k\nabla T(r,t))dv + \iiint_V qdtdv \Leftrightarrow \iiint_V \left(d(T)c\rho - dt\ div(k\nabla T(r,t)) - qdt\right)dv = 0$$

Устремляя объём тела к нулю получим уравнение теплопроводности справедливое в каждой точке сплошной среды

$$d(T)c\rho - dt\, div(k\nabla T(r,t)) - qdt = 0$$

Последнее уравнение делим на малый дифференциал времени $dt$, получим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} c\rho = div(k\nabla T(r,t)) + q \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{c\rho} div(k\nabla T(r,t)) + \frac{q}{c\rho} \tag{29}$$

Для однородной среды общее уравнение теплопроводности (29) переходит в упрощённое уравнение (30):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} div(\nabla T(r,t)) + \frac{q}{c\rho} = \frac{k}{c\rho} \Delta T(r,t) + \frac{q}{c\rho}, \alpha = \frac{k}{c\rho} \tag{30}$$

В уравнении (30) постоянная $\alpha = \frac{k}{c\rho}$ называется коэффициентом температуропроводности среды.

### 3.Уравнение Пуассона (по классификации эллиптического типа)

Рассмотрим стационарное уравнение теплопроводности(29), которое перейдёт в упрощённое

$$\frac{1}{c\rho} div(k\nabla T(r)) = -\frac{q}{c\rho} \tag{31}$$

А для однородной среды $\alpha\, div(\nabla T) = \alpha \Delta T(r) = -\frac{q}{c\rho}$ (32)

Уравнения (31),(32) содержат обязательно только координатный дифференциальный оператор

$$div(k(r) divT(r)), div(gradT(r)) \equiv \Delta T(r)$$

но не содержат производных и зависимости от времени.

### Метод автомодельных переменных

Метод автомодельных переменных применяется в математической физике для того, чтобы понизить число переменных в задаче и свести уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению. Для этого необходимо связать некоторые переменные в отдельные группы, в каждой группе переменные входят в уравнение связи только в данном сочетании. Связать размерные переменные вместе в степенном виде можно в безразмерную переменную, используя, например, теорию подобия и размерности. В качестве примера рассмотрим два задачи.

### Задача об остывании полупространства

Впервые задача о распространении тепла в полупространстве была поставлена и решена В. Томсоном. Будем считать среду однородной с постоянным коэффициентом температуропроводности. В силу симметрии задачи, очевидно, что тепло распространяется перпендикулярно границе полупространства и достаточно использовать одну пространственную переменную. Постановка задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \dfrac{k}{\rho c_p}\dfrac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \chi\dfrac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \\ T(x,0) = T_0,\ 0 \le x < \infty \\ T(0,t) = T_1,\ t > 0 \end{cases} \tag{1}$$

Опишем определяющие переменные в задаче:

$T(x,t), T_0, x, t, \chi$ - температура в данной точке и момент времени, начальная температура среды, координата, момент времени, коэффициент температуропроводности соответственно. Одна безразмерная переменная очевидна $\dfrac{T(x,t)}{T_0}$. В механике все задачи определяются 3 независимыми переменными, например, временем длиной и массой. Вторую безразмерную переменную найдём по размерностям остальных величин

$$x^\alpha t^\beta \chi^\gamma \sim 1 \Leftrightarrow [м]^\alpha [c]^\beta \left[\frac{м^2}{c}\right]^\gamma \sim 1 \Leftrightarrow \begin{cases} м: \alpha + 2\gamma = 0 \\ c: \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \beta = \gamma = 1, \alpha = -2\gamma = -2$$

В итоге получаем вторую безразмерную переменную $\dfrac{t\chi}{x^2}$. Безразмерной будет также и величина $\dfrac{x}{\sqrt{t\chi}}$, а также переменная $\xi = \dfrac{x}{2\sqrt{t\chi}}$. Коэффициент $\dfrac{1}{2}$ выбран из соображения удобства. Согласно пи – теореме из 5 определяющих величин можно получить функциональную связь между 5-3=2 безразмерными величинами. Таким образом, все безразмерные величины найдены и справедливо:

$$\bar{T} = \frac{T(x,t)}{T_0} = f(\xi) = f\left(\frac{x}{2\sqrt{t\chi}}\right) \tag{2}$$

Явный вид функции $f(\xi)$ из теории размерностей найти невозможно, но мы можем использовать первое определяющее уравнение задачи(1).

$$\frac{\partial f\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t\chi}}\right)}{\partial t} = \chi\frac{\partial^2 f\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t\chi}}\right)}{\partial x^2} \tag{3}$$

В уравнении (3) требуется определить частные производные функции $f(\xi)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = f'(\xi)\left(-\frac{1}{2t}\right)\frac{x}{2\sqrt{t\chi}} = f'(\xi)\left(-\frac{\xi}{2t}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = f'(\xi)\frac{1}{2\sqrt{t\chi}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(\xi)\frac{1}{4t\chi}$$

В результате уравнение (3) перепишем в виде

$$f'(\xi)\left(-\frac{\xi}{2t}\right) = \chi f''(\xi)\frac{1}{4t\chi} = \frac{f''(\xi)}{4t} \Leftrightarrow f''(\xi) = -2\xi f'(\xi) \tag{4}$$

Обозначим функцию $y(\xi) = f'(\xi)$, в результате перепишем уравнение (4) в виде

$$y'(\xi) = -2\xi y(\xi) \Leftrightarrow d\ln y(\xi) = -d\xi^2 \Leftrightarrow y(\xi) = Ce^{-\xi^2} \Leftrightarrow f(\xi) - f(0) = \int_0^{\xi} f'(z)dz = \int_0^{\xi} y(z)dz$$

Очевидно, что $f(0) = \frac{T(\xi = 0)}{T_0} = \frac{T(x = 0)}{T_0} = \frac{T_1}{T_0}$ и

$$f(\xi) - f(0) = \frac{T(x,t)}{T_0} - \frac{T_1}{T_0} = C\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t\chi}}} e^{-z^2}dz, \; f(\infty) = \frac{T(x \to \infty)}{T_0} = \frac{T_0}{T_0} = 1$$

$$f(\infty) - f(0) = 1 - \frac{T_1}{T_0} = C\int_0^{\infty} e^{-z^2}dz,$$

Найдём значение вспомогательного интеграла $I = \int_0^{\infty} e^{-z^2}dz$:

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-(r^2)}2\pi r dr d\varphi = \frac{2\pi}{2}\int_0^{\infty} e^{-(r^2)}dr^2 = -\pi e^{-(r^2)}\Big|_0^{\infty} = \pi$$

$$\Rightarrow I = \sqrt{\pi}, \; f(\infty) - f(0) = 1 - \frac{T_1}{T_0} = C\sqrt{\pi} \Leftrightarrow C = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right)$$

$$\frac{T(x,t)}{T_0} - \frac{T_1}{T_0} = C\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t\chi}}} e^{-z^2}dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{T_0 - T_1}{T_0}\right)\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t\chi}}} e^{-z^2}dz \Leftrightarrow T(x,t) = T_1 + \left(\frac{T_0 - T_1}{\sqrt{\pi}}\right)\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t\chi}}} e^{-z^2}dz \qquad (5)$$

Легко видеть из формулы (5), что $T(0,t) = T_1 + \left(\frac{T_0 - T_1}{\sqrt{\pi}}\right)\int_0^{0} e^{-z^2}dz = T_1, T(x,0) = T_1 + \left(\frac{T_0 - T_1}{\sqrt{\pi}}\right)\int_0^{\infty} e^{-z^2}dz = T_1 + \sqrt{\pi}\left(\frac{T_0 - T_1}{\sqrt{\pi}}\right) = T_0$

Другими словами, выполнены начальное (второе уравнение) и граничное (третье уравнение) условия в постановке задачи (1).

**Температурные волны**

Рассмотрим предыдущую задачу о распространении тепла, однако, будем предполагать, что во времени температурные возмущения передаются среде не в виде прямоугольной ступеньки высотой $T_0 - T_1$ как в задаче Томсона, но в виде бегущей волны. Тогда переменные $x, t, \omega = \frac{2\pi}{T}, k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - координату, время и угловую частоту, волновое число можно связать одной безразмерной переменной $kx \pm \omega t$. Рассмотрим возможность теплопередачи в виде бегущей волны, используя модельное уравнение теплопроводности из задачи Томсона:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p}\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \Leftrightarrow \frac{\partial T(kx \pm \omega t)}{\partial t} = \chi\frac{\partial^2 T(kx \pm \omega t)}{\partial x^2}, T(kx \pm \omega t) = T_0 \exp i(kx \pm \omega t)$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \pm i\omega T_0 \exp i(kx \pm \omega t) = \chi\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = i^2\chi k^2 T_0 \exp i(kx \pm \omega t)$$

Для определённости выберем волну бегущей в положительном направлении оси x.

$T_0 \exp i(kx-\omega t)$. Мнимая единица в аргументе экспоненты выбрана из следующих соображений – температурная одномерная волна вне сплошной среды может распространяться сколь угодно долго и сколь угодно далеко, не изменяя своей амплитуды $|T_0 \exp i(kx \pm \omega t)| = T_0$. Сокращая на один и тот же множитель $T_0 \exp i(kx-\omega t)$, получим дисперсионное уравнение

$$-\omega = i\chi k^2 \Leftrightarrow k_{1,2} = \sqrt{\frac{i\omega}{\chi}} = \left\{\frac{1+i}{\sqrt{2}}, -\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\right\}\sqrt{\frac{\omega}{\chi}} \qquad (6)$$

Из дисперсионного уравнения (6) получаем две бегущие волны

$$T_1(x,t) = T_0 \exp i(k_1 x - \omega t) = T_0 \exp(-i\omega t)\exp\left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)i\sqrt{\frac{\omega}{\chi}}x\right) = T_0 \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\chi}}x\right)\exp\left(i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\chi}}x - \omega t\right)\right)$$

$$T_2(x,t) = T_0 \exp i(k_2 x - \omega t) = T_0 \exp(-i\omega t)\exp\left(-\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)i\sqrt{\frac{\omega}{\chi}}x\right) = T_0 \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\chi}}x\right)\exp\left(i\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\chi}}x - \omega t\right)\right)$$

Вторая волновая функция не является физически приемлемой, так как стремится к бесконечности при $x \to \infty$. Поэтому выбираем единственное решение

$$T_1(x,t) = T_0 \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\chi}}x\right)\exp\left(i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\chi}}x - \omega t\right)\right) \qquad (7)$$

В формуле (7) множитель $\exp\left(i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\chi}}x - \omega t\right)\right)$ с единичным модулем имеет аргументом фазу бегущей волны, а множитель $T_0 \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\chi}}x\right)$ представляет амплитуду волны, затухающую с глубиной (координатой x). Определим эффективную глубину температурных возмущений, т.е. координату x, при которой температурные возмущения уменьшаются в $e \approx 2{,}71$ раз:

$$T_0 \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\chi}}\, l\right) = T_0 e^{-1} \Leftrightarrow l = \sqrt{2\frac{\chi}{\omega}} = \sqrt{\frac{2}{\omega}\frac{k}{\rho c_p}} \qquad (8)$$

Используя формулу(8), коэффициент теплопроводности для грунта $k = 1.16\frac{Вт}{мК}$.

Теплоёмкость грунта $c_p = 1.1\frac{КДж}{кгК}$, плотность грунта $\rho = 1200\frac{кг}{м^3}$, для средних широт с зимним сезоном $T$ =3месяца $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3 \cdot 30 \cdot 24 \cdot 3600с}$ получим эффективную глубину промерзания грунта $l = \sqrt{\frac{2}{\omega}\frac{k}{\rho c_p}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi}\frac{3 \cdot 30 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 1.16}{2000 \cdot 1100}} \approx 1.14м$

В то время как для полярных широт с коротким летним периодом зимний сезон можно оценить в $T$ =10 месяцев с $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10 \cdot 30 \cdot 24 \cdot 3600с}$ получим эффективную глубину проникновения холода в грунт $l = \sqrt{\frac{2}{\omega}\frac{k}{\rho c_p}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi}\frac{10 \cdot 30 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 1.16}{2000 \cdot 1100}} \approx 2.08м$.

Литература

1) Сивухин Д.В. Общий курс физики. В 5т. Т.2. Термодинамика и молекулярная физика. – 5-ое изд., испр. – М.: Физ. мат. Лит, 2005.- 544с.

## Лабораторная работа №7 Решение неявного уравнения теплопроводности методом прогонки

Уравнение теплопроводности является уравнением в частных производных второго порядка с первой частной производной по времени и содержит оператор $div(grad(u))$, применяемый к неизвестной скалярной функции $u$:

$\frac{\partial u}{\partial t} = div(k\, grad(u))$, где $k$ - коэффициент температурной проводимости.

В одномерном случае получим уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(k(x)\frac{\partial}{\partial x}(u(x,t)))$$

Наиболее просто записывается уравнение теплопроводности для однородной среды

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad (1)$$

Уравнение теплопроводности описывает распространение тепла в сплошной среде.

***Метод прогонки***

Решается уравнение вида

$$A_k x_{k-1} - C_k x_k + B_k x_{k+1} = F_k, k = \overline{1, n-1} \qquad (2)$$

Предположим, что на границах справедливы формулы

$$x_0 = \lambda_0 x_1 + \nu_0, x_n = \lambda_n x_{n-1} + \nu_n \qquad (3)$$

И справедлива итерационная формула решающая (2)

$$x_k = \lambda_k x_{k+1} + \nu_k, k = \overline{0, n-1} \qquad (4)$$

Из (4) получим $x_{k-1} = \lambda_{k-1} x_k + \nu_{k-1}, k = \overline{1, n}$, которое подставим в (2), имеем

$A_k(\lambda_{k-1}x_k + \nu_{k-1}) - C_k x_k + B_k x_{k+1} = F_k$, откуда $x_k = \frac{-B_k x_{k+1}}{A_k \lambda_{k-1} - C_k} + \frac{F_k - A_k \nu_{k-1}}{A_k \lambda_{k-1} - C_k}, k = \overline{1, n-1}$

Т.е. $\lambda_k = \frac{B_k}{C_k - A_k \lambda_{k-1}}, \nu_k = \frac{F_k - A_k \nu_{k-1}}{A_k \lambda_{k-1} - C_k} = \frac{A_k \nu_{k-1} - F_k}{C_k - A_k \lambda_{k-1}}, k = \overline{1, n-1}$ - формулы вперёд (5)

Где $\lambda_0, \nu_0$ определяются формулой(3)(из начальных условий).

По формуле(4)и (3) $x_{n-1} = \lambda_{n-1} x_n + \nu_{n-1}, x_n = \lambda_n x_{n-1} + \nu_n \Leftrightarrow x_n = \lambda_n(\lambda_{n-1}x_n + \nu_{n-1}) + \nu_n$

Откуда $x_n = \frac{\lambda_n \nu_{n-1} + \nu_n}{1 - \lambda_{n-1}\lambda_n}$, $\lambda_n, \nu_n$ определяют из начальных условий (3)

$$x_k = \lambda_k x_{k+1} + \nu_k, k = \overline{0, n-1} \qquad (6)$$

Формулы (6) называются прогонкой назад

Запишем для численной схемы (2) (достаточное условие корректности по И.В.Красикову)

$$|C_k| \ge |A_k| + |B_k|,\ |B_k| > 0, |A_k| > 0, k = \overline{1, n-1}, |\lambda_0| < 1, |\lambda_n| < 1 \qquad (7)$$

Докажем утверждение (7):

**Теорема.** Пусть выполнено условие (7), тогда:

(1) $\lambda_k \le 1, k = \overline{1, n-1}$

(2) формулы прогонки (5), (6) корректны, т.е. знаменатели формул (5),(6) знакопостоянны и не обращаются в 0.

**Доказательство** первой части теоремы проведём по индукции:

1)Для базы индукции $k = 1$ получим

$$\lambda_1 = \frac{B_1}{C_1 - A_1\lambda_0}, |\lambda_1| = \frac{|B_1|}{|C_1 - A_1\lambda_0|} \le \frac{|B_1|}{|C_1| - |A_1||\lambda_0|} \le \frac{|B_1|}{|C_1| - |A_1|}\left(|C_1| - |A_1| \ge |B_1|\right) \le 1$$

2)Пусть при $k > 1$ $|\lambda_k| \le 1$, тогда согласно формуле(7)

$$\lambda_{k+1} = \frac{B_{k+1}}{C_{k+1} - A_{k+1}\lambda_k}, |\lambda_{k+1}| = \frac{|B_{k+1}|}{|C_{k+1} - A_{k+1}\lambda_k|} \le \frac{|B_{k+1}|}{|C_{k+1}| - |A_{k+1}||\lambda_k|} \le$$

$$\le \frac{|B_{k+1}|}{|C_{k+1}| - |A_{k+1}|}\left(|C_{k+1}| - |A_{k+1}| \ge |B_{k+1}|\right) \le 1, k = \overline{1, n-2}, \text{ т.е. } \lambda_k \le 1, k = \overline{2, n-1}$$

Объединяя 1) и 2), получим, $\lambda_k \le 1, k = \overline{1, n-1}$ - первая часть теоремы доказана

Для формулы(6) получим её корректность, т.к., $|\lambda_{n-1}| \le 1$и если $|\lambda_n| < 1$, то

$1 - \lambda_{n-1}\lambda_n > 0$ и формула $x_n = \dfrac{\lambda_n \nu_{n-1} + \nu_n}{1 - \lambda_{n-1}\lambda_n}$ корректна (знаменатель больше нуля)

(2) $\nu_k = \dfrac{A_k \nu_{k-1} - F_k}{C_k - A_k\lambda_{k-1}}, k = \overline{1, n-1}, |C_k - A_k\lambda_{k-1}| \ge |C_k| - |A_k||\lambda_{k-1}| \ge |C_k| - |A_k| \ge |B_k| > 0$

Теперь формулы $\nu_k = \dfrac{A_k \nu_{k-1} - F_k}{C_k - A_k\lambda_{k-1}}, k = \overline{1, n-1}$ также корректны.

Теорема доказана.

Рассмотрим пример в качестве теста к программе:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, x \in (0, \pi) \\ u(x,0) = \sin(3x), x \in [0, \pi] \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0, t \ge 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Разделим переменные $u(x,t) = X(x)T(t)$ и подставим в первое уравнение (8)

$T' X = T X'' \Leftrightarrow \dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$, в силу независимости переменных последнее уравнение возможно тогда и только тогда, если $\lambda = const$, решаем каждое уравнение порознь, сначала задачу Штурма – Лиувилля (для функции $X(x)$):

$$\begin{cases} X_n'' + \lambda_n X_n = 0 \\ X_n(0) = X_n(\pi) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X_n(x) = A_n \cos\left(\sqrt{\lambda_n} x\right) + B_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n} x\right) \Rightarrow A_n = 0, \sqrt{\lambda_n}\pi = n\pi \Leftrightarrow \lambda_n = n^2, n = 0,1,2,...$$

$X_n(x) = B_n \sin(nx), n = 0,1,2,...$ Решаем второе ОДУ:

$$T' + n^2 T = 0 \Leftrightarrow T(t) = C_n \exp\left(-n^2 t\right), u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \exp\left(-n^2 t\right)\sin(nx).$$

Используя начальное условие (второе уравнение (7)), получим решение задачи (7) $u(x,t) = \exp(-9t)\sin(3x)$ (9)

Составим численную схему задачи с полностью неявной схемой уравнения теплопроводности (явная и неявная схемы уравнения отличаются лишь ориентацией шаблона и соответственно верхним индексом координатной части дифференциального оператора).

$\dfrac{\left(u_m^{n+1}-u_m^n\right)}{\tau}=\alpha\dfrac{\left(u_{m-1}^{n+1}+u_{m+1}^{n+1}-2u_m^{n+1}\right)}{h^2}$, $где: \tau, h, \alpha -$ шаг времени, шаг координаты и коэффициент температуропроводности соответственно. Обозначим параметр $z=\dfrac{\alpha\tau}{h^2}$ и перепишем уравнение в канонической для прогонки форме:

$$zu_{m-1}^{n+1}-(2z+1)u_m^{n+1}+zu_{m+1}^{n+1}=-u_m^n, m=\overline{0,N}, n=\overline{0,N1}, h=\pi/N, \tau=t1/N1 \quad (10)$$

Сравнивая (1) и (9), имеем $A_m^{n+1}=z, B_m^{n+1}=z, C_m^{n+1}=1+2z, F_m^{n+1}=-u_m^n$ (11)

Заметим, что условие устойчивости (7) выполняется автоматически $1+2z>z+z=2z(0<1)$.

Исследуем спектральную устойчивость численной схемы (10) относительно ошибки округления, выбирая функцию ошибки в виде $u_m^n=\lambda^n e^{im\varphi}$, подставим её в (10):

$$z\lambda\left(e^{-i\varphi}-2+e^{i\varphi}\right)=\lambda-1\Leftrightarrow z\lambda 2(\cos\varphi-1)=-4z\lambda\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)=\lambda-1\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{1+4z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \quad (12)$$

Из формулы (12) видно, что численная схема(10) безусловно устойчива, т.к.

$$|\lambda|=\frac{1}{\left|1+4z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right|}\le\frac{1}{1}=1\ \ \forall\, 0\le z,\ \ \forall\varphi\in[0,2\pi]$$

Исследуем также аппроксимацию неявной численной схемы (10), для чего разложим узловые значения функций $u_{m-1}^{n+1}, u_m^{n+1}, u_{m+1}^{n+1}$ относительно узлового значения $u_m^n$:

$$u_{m+1}^{n+1}=u_m^n+\tau u_t+hu_x+\frac{1}{2}\left(\tau^2u_{tt}+2\tau hu_{tx}+h^2u_{xx}\right)+\frac{1}{6}\left(\tau^3u_{ttt}+3\tau^2hu_{ttx}+3\tau h^2u_{txx}+h^3u_{xxx}\right)+$$
$$+\frac{1}{24}\left(\tau^4u_{tttt}+4\tau^3hu_{tttx}+6\tau^2h^2u_{ttxx}+4\tau h^3u_{txxx}+h^4u_{xxxx}\right)+O\left(\tau^5+h^5\right)$$

$$u_{m-1}^{n+1}=u_m^n+\tau u_t-hu_x+\frac{1}{2}\left(\tau^2u_{tt}-2\tau hu_{tx}+h^2u_{xx}\right)+\frac{1}{6}\left(\tau^3u_{ttt}-3\tau^2hu_{ttx}+3\tau h^2u_{txx}-h^3u_{xxx}\right)+$$
$$+\frac{1}{24}\left(\tau^4u_{tttt}-4\tau^3hu_{tttx}+6\tau^2h^2u_{ttxx}-4\tau h^3u_{txxx}+h^4u_{xxxx}\right)+O\left(\tau^5+h^5\right)$$

$$2u_m^{n+1}=2u_m^n+2\tau u_t+\tau^2u_{tt}+\frac{1}{3}\tau^3u_{ttt}+\frac{1}{12}\tau^4u_{tttt}+O\left(\tau^5\right)$$

$$u_m^{n+1}-u_m^n=\tau u_t+\frac{1}{2}\tau^2u_{tt}+\frac{1}{6}\tau^3u_{ttt}+\frac{1}{24}\tau^4u_{tttt}+O\left(\tau^5\right)$$

Тогда, приравнивая обе части уравнения, получим:

$$z\left(u_{m+1}^{n+1}+u_{m-1}^{n+1}-2u_m^{n+1}\right)=z\left(2\tau u_t+\tau^2u_{tt}+h^2u_{xx}+\frac{\tau^3}{3}u_{ttt}+\tau h^2u_{txx}+\frac{\tau^4}{12}u_{tttt}+\frac{\tau^2h^2}{2}u_{ttxx}+\frac{h^4}{12}u_{xxxx}-\right.$$
$$\left.-\left(2\tau u_t+\tau^2u_{tt}+\frac{1}{3}\tau^3u_{ttt}+\frac{1}{12}\tau^4u_{tttt}\right)\right)=u_m^{n+1}-u_m^n=\tau u_t+\frac{1}{2}\tau^2u_{tt}+\frac{1}{6}\tau^3u_{ttt}+\frac{1}{24}\tau^4u_{tttt}$$

$$z\left(h^2u_{xx}+\tau h^2u_{txx}+\frac{\tau^2h^2}{2}u_{ttxx}+\frac{h^4}{12}u_{xxxx}\right)=\tau u_t+\frac{1}{2}\tau^2u_{tt}+\frac{1}{6}\tau^3u_{ttt}+\frac{1}{24}\tau^4u_{tttt}+O\left(\tau^5\right) \quad (13)$$

Упростим формулу (13), учитывая, что $z=\dfrac{\alpha\tau}{h^2}, u_t=\alpha u_{xx}, u_{tt}=\alpha^2u_{xxxx}, u_{txч}=\dfrac{u_{tt}}{\alpha}$

Скомпенсируем слагаемые в правой и левой частях уравнения (13) по степеням малости

$$zh^2u_{xx} = \tau u_t = \tau\alpha u_{xx} \Leftrightarrow z = \frac{\alpha\tau}{h^2},\ z\tau h^2 u_{txx} = \frac{z\tau h^2}{\alpha}u_{tt} = \frac{1}{2}\tau^2 u_{tt} \Leftrightarrow z = \frac{\alpha\tau}{2h^2} \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2}\ .$$

Полученное противоречие показывает, что неявная численная схема (10) аппроксимирует уравнение $u_t = \alpha u_{xx}$ с погрешностью $O(h^2 + \tau)$ (делим уравнение(13) на $\tau$ ).

Программа позволяет не только получить таблицу численного решения задачи (8), но и геометрически построить неизвестную функцию двух переменных на прямоугольнике, используя цифровые символы. Таким образом, мы получаем трёхмерное описание функции (её численное значение в виде цифры от 0 до 4 в момент времени $t$ с координатой $x$). Отметим, что в языке C++ нет графических приложений, и символьное описание функции является единственным возможным её графическим представлением. Для удобства колебания функции (разность $\max - \min$ ) разбивается на интервалы, разделённые пустыми промежутками для удобного зрительного восприятия волновой поверхности.

В программе число nx равно числу символов "1" в 1 строке экрана монитора, и зависит от разрешения экрана монитора, операционной системы. Число nx определяется экспериментально участком программы

```
for(i=1;i<=80;i++)
{
printf("1");
}
```

до тех пор, пока первая строка экрана заполнится единицами без пробелов.

Выбираем $N = 80$ (которое определяется экспериментально с учётом разрешения монитора для правильного отображения графики), $t1 \approx 0.1$с. Учитываем формулу связи $\dfrac{t1}{N1} = \tau = \dfrac{zh^2}{\alpha}$ .

Параметры $l1, l2$ служат для масштабирования графики (с не очень большими значениями).

Рекомендации для программы

1) Подобрать параметр $N$ для правильного отображения графики
2) Написать программу для задачи (7) в соответствии с формулами (1) – (6),(9) – (11)
3) Получить тестовую таблицу

Один из возможных вариантов программы

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
 int const nx=80, ny=15, l1=10,N=nx,N1=ny*l1;
 void main()
{
int k,k1,j,i,g1,l2,n3;
double x0[N],x[N],y[N],l[N],nu[N],a[N],b[N],c[N],f[N],pro[N],res[N][N1],res1[N][N1];
double z,alfa,t1,delta[N1];
double pi,h,dt,min,max,period,g,g2;
for(i=1;i<=nx;i++)
{
//printf("1");
}
pi=2.0*asin(1.0);
h=pi/double(N);
```

```
alfa=1.0;
max=-1000.0;min=1000.0;
z=0.5;
t1=double(N1)*h*h*z/alfa;
l2=2;
printf("t1=%lf\n",t1);
// boundary condition
 l[0] =0.0;
l[N]=0.0;
nu[0]=0.0;
nu[N]=0.0;
 // first condition
  //===========================
for( k=0;k<=N;++k)
{
  res[k][0]=sin(3.0*k*h) ;
 x[k]=exp(-9.0*t1)*res[k][0];

}
//================================

 for( k=0;k<=N;++k)
{
 b[k]=z;
a[k]=z;
c[k]=2.0*z+1.0;
}
for (j=1;j<=N1;++j)
{
for(k=0;k<=N;++k)
{
f[k]=-res[k][j-1];
}
for(k=0;k<=N;k++)
{
l[k]=0.0;
nu[k]=0.0;
}
for( k=1;k<=N-1;++k)
{
l[k]=b[k]/(c[k]-a[k]*l[k-1]);
nu[k]=(a[k]*nu[k-1]-f[k])/(c[k]-a[k]*l[k-1]);
 }
y[N]=(nu[N]+l[N]*nu[N-1])/(1.0-l[N-1]*l[N]);
 res[N][j]=y[N];
for( k=N-1;k>=0;--k)
{
 y[k]=l[k]*y[k+1]+nu[k];
 res[k][j]=y[k];
}
}
 for(j=0;j<=N1;++j)
```

```
{
for(k=0;k<=N;++k)
{
if(res[k][j]<=min)
{
min=res[k][j];
}
 else
 {
min=min;
 }
 if(res[k][j]>=max)
 {
 max=res[k][j];
 }
 else
{
max=max;
}
 }
}
 for(j=0;j<=N1;++j)
{
 if(j%l2==0)
{
for(k=0;k<=N;++k)
{
res1[k][j/l2]=res[k][j];
}
}
}
period=max-min;
 for(i=1;i<=(N1/l2)*(N);i++)
{
 k=i%N;j=(i-i%N)/N;
if(k<N)
 {
g=10.0*((res1[k][j]+res1[k+1][j])/2.0-min)/period;
}
 g1=int(g);
 g2=g-double(g1);
if(g1%2==1 && g2>=0.0)
{
printf("%d",(g1-1)/2);
}
else
{
printf(" ");
}
}
for(k1=0;k1<=N;k1++)
{
```

```
 printf("ax(%d)=%lf res(%d %d)=%lf delta(%d)=%lf \n",k1,x[k1],k1,N1,res[k1][N1],k1,x[k1]-res[k1][N1]);
}
for(k1=0;k1<=N;k1++)
{
delta[k1]=sqrt((x[k1]-res[k1][N1])*(x[k1]-res[k1][N1]));
}
for(i=0;i<=N;i++)
{
 if(M<=delta[i])
{
M=delta[i];
 }
 }
  printf("delta=%lf\n",M);
}
```

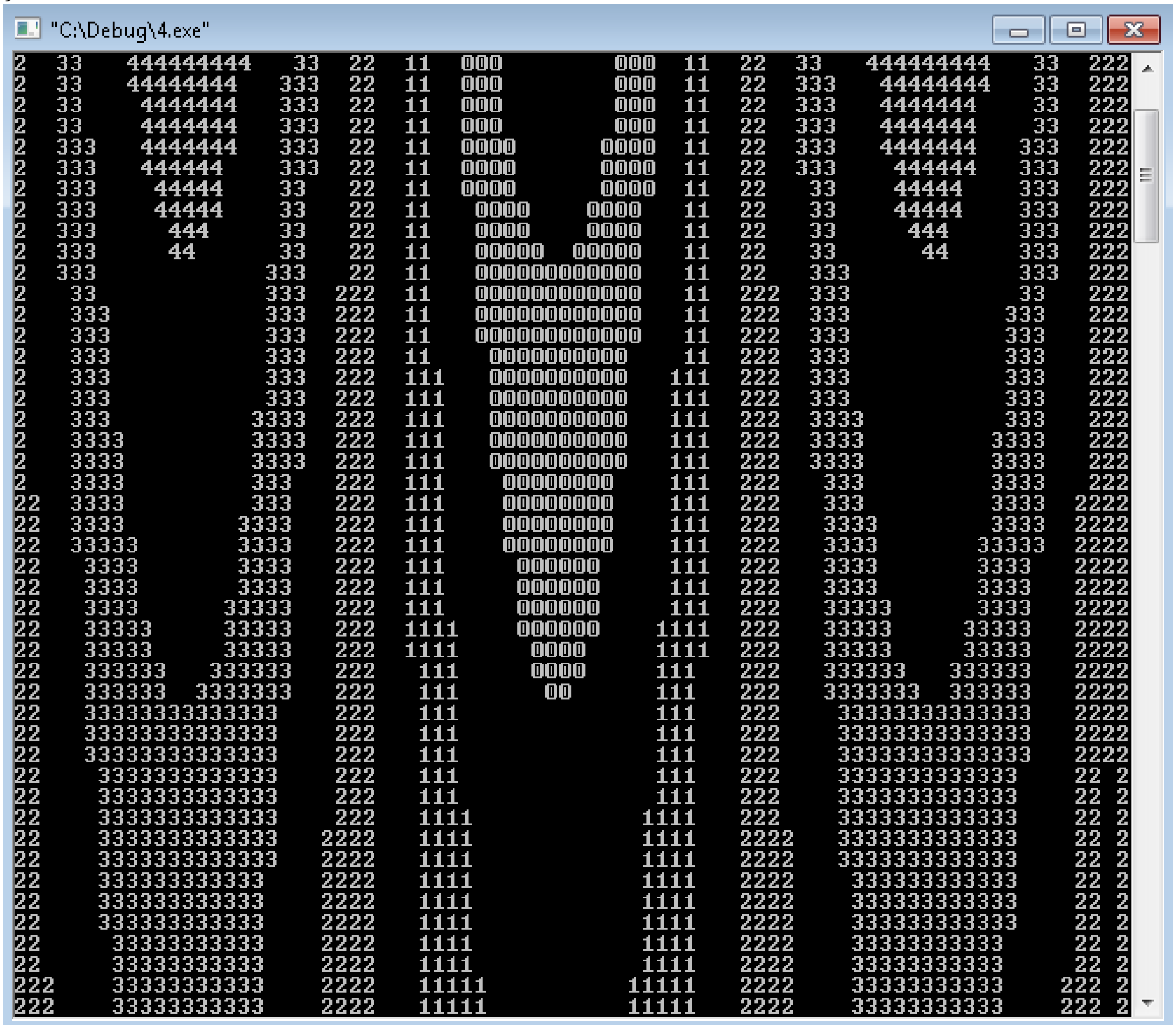



Рис.1 Распределение температуры на стержне длиной $\pi$ со временем (с краевым условием Дирихле).

Тест – таблица (точное решение, численное решение, абсолютная ошибка)

exact(0)=0.000000 res(0 150)=0.000000 delta(0)=0.000000
exact(1)=0.041505 res(1 150)=0.041705 delta(1)=-0.000199

exact(2)=0.082435 res(2 150)=0.082831 delta(2)=-0.000396
exact(3)=0.122222 res(3 150)=0.122809 delta(3)=-0.000587
exact(4)=0.160315 res(4 150)=0.161085 delta(4)=-0.000770
exact(5)=0.196185 res(5 150)=0.197127 delta(5)=-0.000942
exact(6)=0.229336 res(6 150)=0.230437 delta(6)=-0.001101
exact(7)=0.259307 res(7 150)=0.260552 delta(7)=-0.001245
exact(8)=0.285684 res(8 150)=0.287055 delta(8)=-0.001372
exact(9)=0.308100 res(9 150)=0.309579 delta(9)=-0.001479
exact(10)=0.326244 res(10 150)=0.327811 delta(10)=-0.001567
exact(11)=0.339866 res(11 150)=0.341498 delta(11)=-0.001632
exact(12)=0.348777 res(12 150)=0.350452 delta(12)=-0.001675
exact(13)=0.352852 res(13 150)=0.354546 delta(13)=-0.001694
exact(14)=0.352036 res(14 150)=0.353726 delta(14)=-0.001690
exact(15)=0.346339 res(15 150)=0.348002 delta(15)=-0.001663
exact(16)=0.335841 res(16 150)=0.337454 delta(16)=-0.001613
exact(17)=0.320688 res(17 150)=0.322227 delta(17)=-0.001540
exact(18)=0.301088 res(18 150)=0.302534 delta(18)=-0.001446
exact(19)=0.277315 res(19 150)=0.278646 delta(19)=-0.001332
exact(20)=0.249697 res(20 150)=0.250896 delta(20)=-0.001199
exact(21)=0.218617 res(21 150)=0.219667 delta(21)=-0.001050
exact(22)=0.184507 res(22 150)=0.185393 delta(22)=-0.000886
exact(23)=0.147839 res(23 150)=0.148549 delta(23)=-0.000710
exact(24)=0.109121 res(24 150)=0.109645 delta(24)=-0.000524
exact(25)=0.068891 res(25 150)=0.069222 delta(25)=-0.000331
exact(26)=0.027706 res(26 150)=0.027839 delta(26)=-0.000133
exact(27)=-0.013864 res(27 150)=-0.013930 delta(27)=0.000067
exact(28)=-0.055241 res(28 150)=-0.055506 delta(28)=0.000265
exact(29)=-0.095852 res(29 150)=-0.096313 delta(29)=0.000460
exact(30)=-0.135135 res(30 150)=-0.135784 delta(30)=0.000649
exact(31)=-0.172544 res(31 150)=-0.173373 delta(31)=0.000829
exact(32)=-0.207561 res(32 150)=-0.208558 delta(32)=0.000997
exact(33)=-0.239701 res(33 150)=-0.240852 delta(33)=0.001151
exact(34)=-0.268518 res(34 150)=-0.269807 delta(34)=0.001289
exact(35)=-0.293612 res(35 150)=-0.295022 delta(35)=0.001410
exact(36)=-0.314636 res(36 150)=-0.316147 delta(36)=0.001511
exact(37)=-0.331298 res(37 150)=-0.332889 delta(37)=0.001591
exact(38)=-0.343368 res(38 150)=-0.345016 delta(38)=0.001649
exact(39)=-0.350677 res(39 150)=-0.352361 delta(39)=0.001684
exact(40)=-0.353124 res(40 150)=-0.354820 delta(40)=0.001696
exact(41)=-0.350677 res(41 150)=-0.352361 delta(41)=0.001684
exact(42)=-0.343368 res(42 150)=-0.345016 delta(42)=0.001649
exact(43)=-0.331298 res(43 150)=-0.332889 delta(43)=0.001591
exact(44)=-0.314636 res(44 150)=-0.316147 delta(44)=0.001511
exact(45)=-0.293612 res(45 150)=-0.295022 delta(45)=0.001410
exact(46)=-0.268518 res(46 150)=-0.269807 delta(46)=0.001289
exact(47)=-0.239701 res(47 150)=-0.240852 delta(47)=0.001151
exact(48)=-0.207561 res(48 150)=-0.208558 delta(48)=0.000997
exact(49)=-0.172544 res(49 150)=-0.173373 delta(49)=0.000829
exact(50)=-0.135135 res(50 150)=-0.135784 delta(50)=0.000649
exact(51)=-0.095852 res(51 150)=-0.096313 delta(51)=0.000460
exact(52)=-0.055241 res(52 150)=-0.055506 delta(52)=0.000265
exact(53)=-0.013864 res(53 150)=-0.013930 delta(53)=0.000067

exact(54)=0.027706 res(54 150)=0.027839 delta(54)=-0.000133
exact(55)=0.068891 res(55 150)=0.069222 delta(55)=-0.000331
exact(56)=0.109121 res(56 150)=0.109645 delta(56)=-0.000524
exact(57)=0.147839 res(57 150)=0.148549 delta(57)=-0.000710
exact(58)=0.184507 res(58 150)=0.185393 delta(58)=-0.000886
exact(59)=0.218617 res(59 150)=0.219667 delta(59)=-0.001050
exact(60)=0.249697 res(60 150)=0.250896 delta(60)=-0.001199
exact(61)=0.277315 res(61 150)=0.278646 delta(61)=-0.001332
exact(62)=0.301088 res(62 150)=0.302534 delta(62)=-0.001446
exact(63)=0.320688 res(63 150)=0.322227 delta(63)=-0.001540
exact(64)=0.335841 res(64 150)=0.337454 delta(64)=-0.001613
exact(65)=0.346339 res(65 150)=0.348002 delta(65)=-0.001663
exact(66)=0.352036 res(66 150)=0.353726 delta(66)=-0.001690
exact(67)=0.352852 res(67 150)=0.354546 delta(67)=-0.001694
exact(68)=0.348777 res(68 150)=0.350452 delta(68)=-0.001675
exact(69)=0.339866 res(69 150)=0.341498 delta(69)=-0.001632
exact(70)=0.326244 res(70 150)=0.327811 delta(70)=-0.001567
exact(71)=0.308100 res(71 150)=0.309579 delta(71)=-0.001479
exact(72)=0.285684 res(72 150)=0.287055 delta(72)=-0.001372
exact(73)=0.259307 res(73 150)=0.260552 delta(73)=-0.001245
exact(74)=0.229336 res(74 150)=0.230437 delta(74)=-0.001101
exact(75)=0.196185 res(75 150)=0.197127 delta(75)=-0.000942
exact(76)=0.160315 res(76 150)=0.161085 delta(76)=-0.000770
exact(77)=0.122222 res(77 150)=0.122809 delta(77)=-0.000587
exact(78)=0.082435 res(78 150)=0.082831 delta(78)=-0.000396
exact(79)=0.041505 res(79 150)=0.041705 delta(79)=-0.000199
exact(80)=0.000000 res(80 150)=0.000000 delta(80)=0.000000
delta=0.001696
Press any key to continue

Обратим внимание, что диффузия с течением времени приводит к выравниванию первоначально неоднородных по температуре областей к средней температуре для всей рассматриваемой области (исчезают области 0,3,4).

Delta=0.001696, N=80, N1=150 (норма Чебышева для невязки точного и приближённого решений)

Delta=0.000232, N=160, N1=150

Delta= 0.000018, N=320, N1=150

Оценим порядок погрешности

$$\frac{\mathrm{Delta}(80)}{\mathrm{Delta}(160)} = \frac{0.001696}{0.000232} = 2^2 \le 7{,}3 \le 2^3 \quad \frac{\mathrm{Delta}(160)}{\mathrm{Delta}(320)} = \frac{0.000232}{0.000018} = 2^3 \le 12{,}8 \le 2^4$$

Порядок аппроксимации имеет смысл в данном случае при определённом законе (связи) $h, \tau$ и их одновременном стремлении к нулю. Очевидно, что во всех приведенных примерах порядок погрешности численной схемы не менее 2 $\|u\|_C \sim h^2$,так как $\tau \sim h^2, z = \dfrac{\alpha\tau}{h^2} = const, O(\tau + h^2) = O(h^2)$.

Литература:


1) А.А.Самарский, П.Н.Вабищевич. Численные методы. Решения обратных задач математической физики. – М.: ЛКИ . 2013. – 478 с.
2) И.В. Красиков, И.Е. Красикова. Алгоритмы просто как дважды два. – М.:Эксмо, 2007. – 2007ю – 256 с.
3) В.П.Пикулин, С.И.Похожаев. Практический курс по уравнениям математической физики. – М.: Наука. – 1995. – 223 с.

## Лабораторная работа №8 Решение волнового уравнения с помощью явной разностной схемой

Волновое уравнение описывает колебания струны или упругой мембраны.

В качестве теста для программы рассмотрим пример колебаний струны закреплённой на концах.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, x \in (0,\pi), t > 0 \\ u(x,0) = \sin(2x), u_t(x,0) = 0, x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, t \ge 0 \end{cases} \qquad (1)$$

В уравнении (1) c – скорость волнового фронта. Неизвестную функцию найдём методом разделения переменных $u(x,t) = X(x)T(t)$, которую подставим в первое уравнение(1)

$$T''X = c^2 X''T \Leftrightarrow \frac{T''}{T} = c^2 \frac{X''}{X} = -\lambda$$

В силу независимости переменных $x,t$ последнее равенство возможно тогда и только тогда, если $\lambda = const$. Для функции $X(x)$ получаем задачу Штурма – Лиувилля

$$\begin{cases} X_n'' + \frac{\lambda_n}{c^2} X_n = 0 \\ X_n(0) = X_n(\pi) = 0, n = 0,1,2,... \end{cases} \qquad (2)$$

Задача (2) имеет общее решение $X_n(x) = A_n \cos\left(x\frac{\sqrt{\lambda_n}}{c}\right) + B_n \sin\left(x\frac{\sqrt{\lambda_n}}{c}\right), X_n(0) = 0 \Leftrightarrow A_n = 0, X_n(\pi) = 0, \frac{\sqrt{\lambda_n}}{c}\pi = n\pi \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\lambda_n}}{c} = n$

$$\lambda_n = c^2 n^2, n = 0,1,2,... \Leftrightarrow X_n(x) = B_n \sin(nx) \qquad (3)$$

Для функции $T_n(t)$ получаем уравнение $T_n'' + c^2 n^2 T_n = 0$, общее решение последнего уравнения есть:

$$T_n(t) = C_n \cos(cnt) + D_n \sin(cnt), T'_n(t) = -cnC_n \sin(cnt) + cnD_n \cos(cnt) \qquad (4)$$

Используем начальные условия – второе уравнение задачи(1):

$$D_n = 0, n = 0,1,2,...$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{C_n} \sin(nx)\cos(cnt) \text{ - общее решение задачи (1)} \qquad (5)$$

Из начальных условий(1) получаем единственный ненулевой коэффициент разложения

$$\overline{C_2} = 1, u(x,t) = \sin(2x)\cos(2ct) \text{ - решение задачи (1)} \qquad (6)$$

Построим разностную схему для уравнения (1)

$$\frac{u_m^{n+1} + u_m^{n-1} - 2u_m^n}{\tau^2} = c^2 \frac{u_{m-1}^n + u_{m+1}^n - 2u_m^n}{h^2} \qquad (7)$$

Введём параметр $z = \frac{c^2\tau^2}{h^2}, \Leftrightarrow u_m^{n+1} + u_m^{n-1} - 2u_m^n = z\left(u_{m-1}^n + u_{m+1}^n - 2u_m^n\right) \Leftrightarrow$

$$u_m^{n+1} = zu_{m-1}^n + zu_{m+1}^n + 2u_m^n(1-z) - u_m^{n-1} \qquad (8)$$

Поскольку уравнения (7),(8) эквивалентны, то исследуем устойчивость (7) относительно ошибки округления, в качестве функций возмущения возьмём $u_m^n = \lambda^n(\varphi)e^{im\varphi}, \varphi \in [0,2\pi]$ и подставим в (7)

$$\lambda^n(\varphi)e^{im\varphi}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}-2\right)=\lambda^n(\varphi)e^{im\varphi}z\left(e^{-i\varphi}+e^{i\varphi}-2\right)\Leftrightarrow\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}-2\right)=-4z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$\lambda^2+2\lambda\left(-1+2z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)+1=0, \varphi\in[0,2\pi]$, находим корни последнего уравнения, разностная схема(6) устойчива если $|\lambda|\le 1\forall\varphi\in[0,2\pi]$.

$$D=16z^2\sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)+4-16z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)-4=16z^2\sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)-16z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\lambda_{1,2}=1-2z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\pm 2\sqrt{z^2\sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)-z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}. \quad (9)$$

Если $0\le z\le 1$, то дискриминант $D\le 0\forall\varphi\in[0,2\pi]$ и

$$\lambda_{1,2}=1-2z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\pm 2i\sqrt{-z^2\sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)+z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$|\lambda_{1,2}|^2=\left(1-2z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2+4\left(-z^2\sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)+z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)=1-4z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)+4z^2\sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)+4\left(-z^2\sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)+z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)=1.$$

Т.е. мы показали, что при $z\in[0,1]$ разностная схема волнового уравнения устойчива.

При $|z|>1$ разностная схема расходится, т.е. $|\lambda_{1,2}|^2>1$, например, при $\varphi=\frac{\pi}{2}$ (рассмотрим случай с положительным дискриминантом):

$$|\lambda_{1,2}|^2=\left(1-2z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2+4\left(z^2\sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)-z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\pm 4\left(1-2z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\sqrt{z^2\sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)-z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\le 1\Leftrightarrow$$

$$8\left(z^2\sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)-z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\pm 4\left(1-2z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\sqrt{z^2\sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)-z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\le 0\Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{z^2\sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)-z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\pm\left(1-2z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\le 0\left(\varphi\to\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{z^2\sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)-z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\le\pm\left(1-2z\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)$$

что невозможно одновременно для знаков плюс и минус.

Рассмотрим аппроксимацию уравнения(8), для чего разложим узловые значения функции в ряд Тейлора относительно центрального значения $u_m^n$:

$$u_m^{n+1}=zu_{m-1}^n+zu_{m+1}^n+2u_m^n(1-z)-u_m^{n-1}$$

$$u_m^{n+1}+u_m^{n-1}-2u_m^n=2u_m^n+\tau u_t+\frac{\tau^2}{2}u_{tt}+\frac{\tau^3}{6}u_{ttt}+\frac{\tau^4}{24}u_{tttt}+\frac{\tau^5}{120}u_{ttttt}+o\left(\tau^6\right)$$

$$-\tau u_t+\frac{\tau^2}{2}u_{tt}-\frac{\tau^3}{6}u_{ttt}+\frac{\tau^4}{24}u_{tttt}-\frac{\tau^5}{120}u_{ttttt}+o\left(\tau^6\right)-2u_m^n=\tau^2u_{tt}+\frac{\tau^4}{12}u_{tttt}+o\left(\tau^6\right)$$

Аналогично, заменяя временную переменную $t$ пространственной переменной $x$ получим:

$$z\left(u_{m-1}^n+u_{m+1}^n-2u_m^n\right)=z\left(h^2u_{xx}+\frac{h^4}{12}u_{xxxx}+O\left(h^6\right)\right)$$

Используя волновое уравнение $u_{tt}=c^2u_{xx}, u_{tttt}=c^2\left(u_{xx}\right)_{tt}=c^2\left(u_{tt}\right)_{xx}=c^4u_{xxxx}$, получим:

$$\tau^2 u_{tt} + \frac{\tau^4}{12} u_{tttt} + O(\tau^6) = \tau^2 c^2 u_{xx} + \frac{\tau^4}{12} c^4 u_{xxxx} + O(\tau^6) = z\left(h^2 u_{xx} + \frac{h^4}{12} u_{xxxx} + O(h^6)\right)$$

Но $\frac{zh^2}{\tau^2} = 1 \Rightarrow \tau^2 u_{tt} = zh^2 u_{xx}$ попробуем компенсировать члены более высокого порядка малости в разложении $\frac{\tau^4}{12} c^4 u_{xxxx} + O(\tau^6) = z\frac{h^4}{12} u_{xxxx} + O(h^6) \Leftrightarrow \frac{\tau^4}{12} c^4 = z\frac{h^4}{12} = c^2 \frac{\tau^2}{h^2} \frac{h^4}{12} = \frac{\tau^2 h^2}{12} \Leftrightarrow c^2 \tau^2 = h^2 \Leftrightarrow$

$\frac{c^2 \tau^2}{h^2} = 1 = z$. В этом случае порядок погрешности $O(\tau^4 + h^4)$. Если $z \neq 1$ порядок аппроксимации волнового уравнения $O(\tau^2 + h^2)$. (*)

Оказывается, что в случае $z = \frac{c^2 \tau^2}{h^2} = 1$ разностная схема (7),(8) имеет *бесконечный порядок аппроксимации.* Действительно, при $z = 1$ операторы

$\frac{u_m^{n+1} + u_m^{n-1} - 2u_m^n}{\tau^2}$ и $\frac{u_{m-1}^n + u_{m+1}^n - 2u_m^n}{h^2}$ имеют одинаковые коэффициенты разложения в ряд Тейлора соответственно (по чётным степеням шага сетки $\tau, h$ в силу симметрии операторов) и справедливо уравнение $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Кроме того

$$u_\tau^{(2k)} = u_x^{(2k)} c^{2k} \Leftrightarrow \tau^{2k-2} u_\tau^{(2k)} = \tau^{2k-2} u_x^{(2k)} c^{2k} = c^2 (\tau^2 c^2)^{k-1} u_x^{(2k)} = c^2 (h^2)^{k-1} u_x^{(2k)} = c^2 h^{2k-2} u_x^{(2k)} \quad (10)$$

Что справедливо для любого целого неотрицательного числа $k = 0,1,2,...$ Т.е. в разложении в ряд Тейлора слагаемое со степенью $\tau^{2k-2}$ в левой её части компенсирует слагаемое со степенью $h^{2k-2}$ в правой её части. В итоге можно выбрать параметр $z = 1$. так как он кроме того удовлетворяет условию спектральной устойчивости численной схемы относительно ошибок округления.

Волновое уравнение (уравнение колебаний) содержит вторую частную производную по времени и вторые частные производные по координатам. Следовательно, для однозначного описания задачи кроме двух граничных условий задачи(1) необходимо два начальных условий (начальные значения координат $u_m^0$ струны и начальные значения скорости всех точек струны $u_t\big|_m^0$). Эти начальные условия эквиваленты заданию 2 первых слоёв по времени узловых значений неизвестной функции. Если использовать начальные условия задачи (1) для аппроксимации второго временного слоя, то получим

$$u_m^1 = u_m^0 + \tau u_t\big|_m^0 \quad (11)$$

- аппроксимация с первым порядком погрешности второго временного слоя по начальной скорости всех узлов $u_t\big|_m^0$. Следовательно, ошибка с первым порядком погрешности по $\tau$ согласно формуле(11) переносится со второго временного слоя решения на конечный временной слой $u_m^{N1}$.

Примерный код программы приведём ниже.

*Рекомендации к программе*

Первым шагом после написания программы для наблюдений волновой поверхности необходимо отладить графический параметр N равный числу символов, заполняющих строку экрана монитора. Он зависит как от разрешения операционной системы, так и от настроек экрана. Подбирается экспериментально таким образом, чтобы строка символов, состоящая из единиц начиная с левого края, была полностью заполнена единицами. В нашем случае N=80. В программе используются параметры
pi=2.0*asin(1.0);

```
z=1.0;
h=pi/double(N);
c=velocity=1.0;
dt=(h/velocity)*sqrt(z);// dt= h
t2=pi*p*sqrt(z)/velocity;// конечный момент времени
```

Начало программы

```
#include <cstdio>
#include <cmath>
main()
{
const   int  N=80, p=5, N1=p*N;
int k,j,i,ll,nx,ny,g1,l2;
double x0[N+1],x[N+1],pro[N+1],res[N+1][N1+1],res1[N+1][N1+1];
double z,velocity,t2,delta[N+1][N1+1],res0[N+1][N1+1];
double pi,h,dt,min,max,period,g,g2,M;
for(i=1;i<=80;i++)
{
printf("1");
}
pi=2.0*asin(1.0);
z=1.0;
h=pi/double(N);
velocity=1.0;
dt=(h/velocity)*sqrt(z);
t2=pi*double(p)*sqrt(z)/velocity;
max=-1000.0;
min=1000.0;
printf("h=%.16lf\n ",t2);
//return 0;
for(j=0;j<=N1;j++)
for(k=0;k<=N;k++)
{
res0[k][j]=sin(2.0*h*double(k))*cos(2.0*velocity*dt*double(j));
printf("res(%d %d)=%.16lf\n",k,j,res0[k][j] );
}
for(j=0;j<=N1;j++)
{
 res[0][j]=0.0;
 res[N][j]=0.0;
}

for( i=1;i<=N-1;i++)
{
 x0[i]=sin(2.0*double(i)*h);
// res[i][0]=res0[i][0];
 res[i][0]=x0[i];
// pro[i]=0.0;
res[i][1]=res0[i][1];
//res[i][1]=res[i][0]+pro[i]*dt;
 //x[k]=res[k][0]*cos(2.0*velocity*t2);
 printf("i=%d,x=%.16lf y=%.16lf \n",i,  res[i][1] , res0[i][1]);
```

```
}
for (j=2;j<=N1;++j)
{
for( k=1;k<N;++k)
{
res[k][j]=z*res[k-1][j-1]+z*res[k+1][j-1]+2.0*res[k][j-1]*(1.0-z)-res[k][j-2];
printf(" res0(%d %d)=%.16lf res(%d %d)=%.16lf \n",k,j,res0[k][j],k,j,res[k][j]);
delta[k][j]=sqrt((res[k][j]-res0[k][j])*(res[k][j]-res0[k][j]));
printf("delta(%d %d)=%.16lf\n",k,j,delta[k][j] );

 if(M<=delta[k][j] )
{
M=delta[k][j];
 }
}
 res[0][j]=0.0;
res[N][j]=0.0;
 }
printf(" N=%d\n",N);
}
printf("Norma Chebisheva=%.16lf\n",M);
//return 0;
for(k=0;k<=N;k++)
{
printf("res(%d)=%.16lf x(%d)=%.16lf delta[%d]=%.16lf\n",k,res[k][N1],k,x[k],k,delta[k]);
}
printf("Norma Chebisheva=%.16lf\n",M);
//return 0;
for(j=0;j<=N1;++j)
{
for(k=0;k<=N;++k)
{
if(res[k][j]<=min)
{
min=res[k][j];
 }
else
{
 min=min;
}
 if(res[k][j]>=max)
 {
 max=res[k][j];
}
else
{
 max=max;
 }
}
}
for(j=0;j<=N1;++j)
{
```

```
if(j%l2==0)
{
for(k=0;k<=N;++k)
{
res1[k][j/l2]=res[k][j];
//printf("%d    %d    %d    %lf\n",k,j,(j/l2),res1[k][j/l2]);
}
}
 }
  printf("l2=%d\n",l2);
 period=max-min;
for(i=1;i<=(N1/l2)*(N);i++)
 {
k=i%N;j=(i-i%N)/N;
if(k<N)
{
 g=10.0*((res1[k][j]+res1[k+1][j])/2.0-min)/period;
}
g1=int(g);
g2=g-double(g1);
 if(g1%2==1 && g2>=0.0)
{
printf("%d",(g1-1)/2);
 }
 else
{
printf(" ");
 }
 }
}
```

Конец программы.

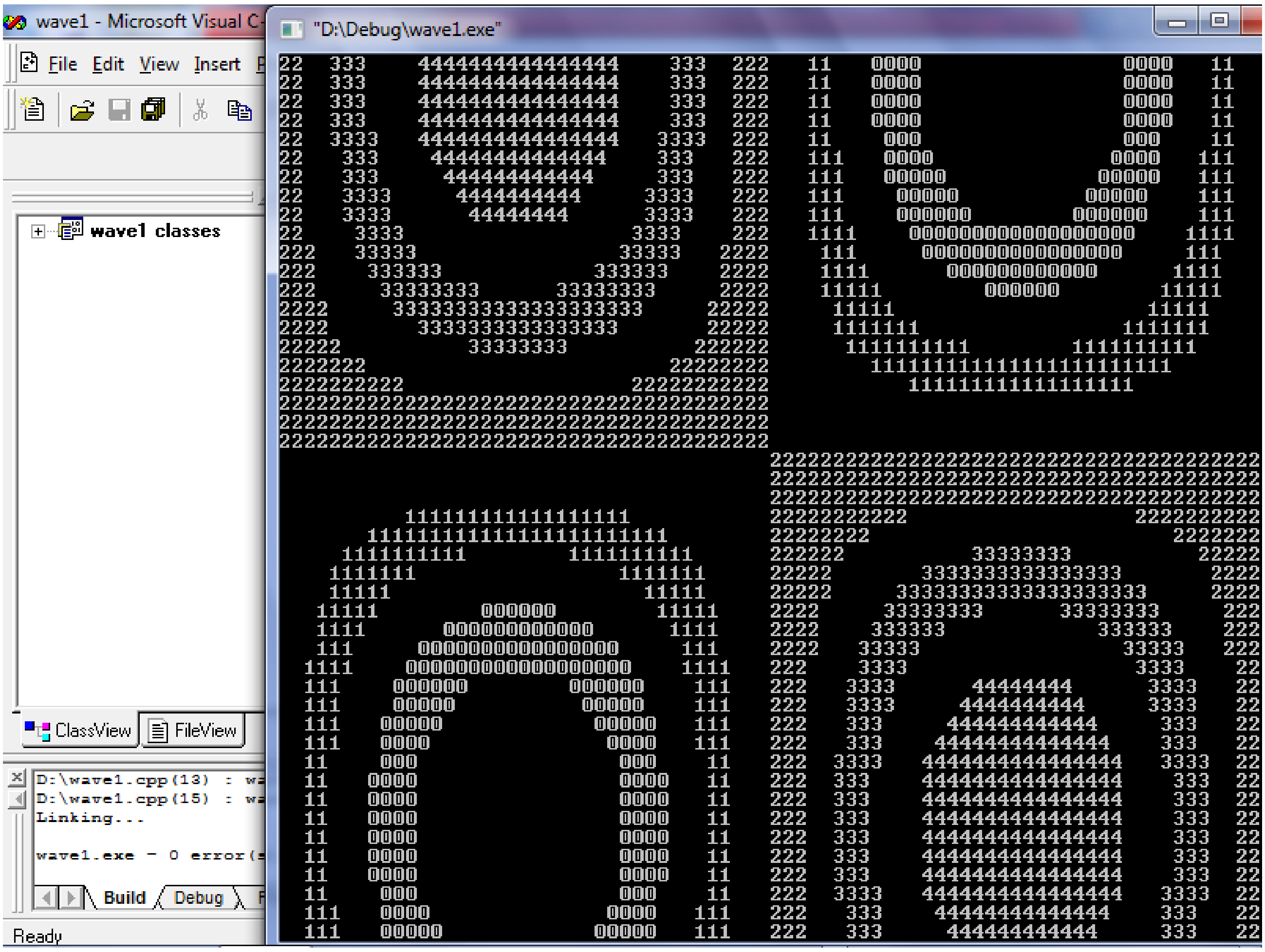
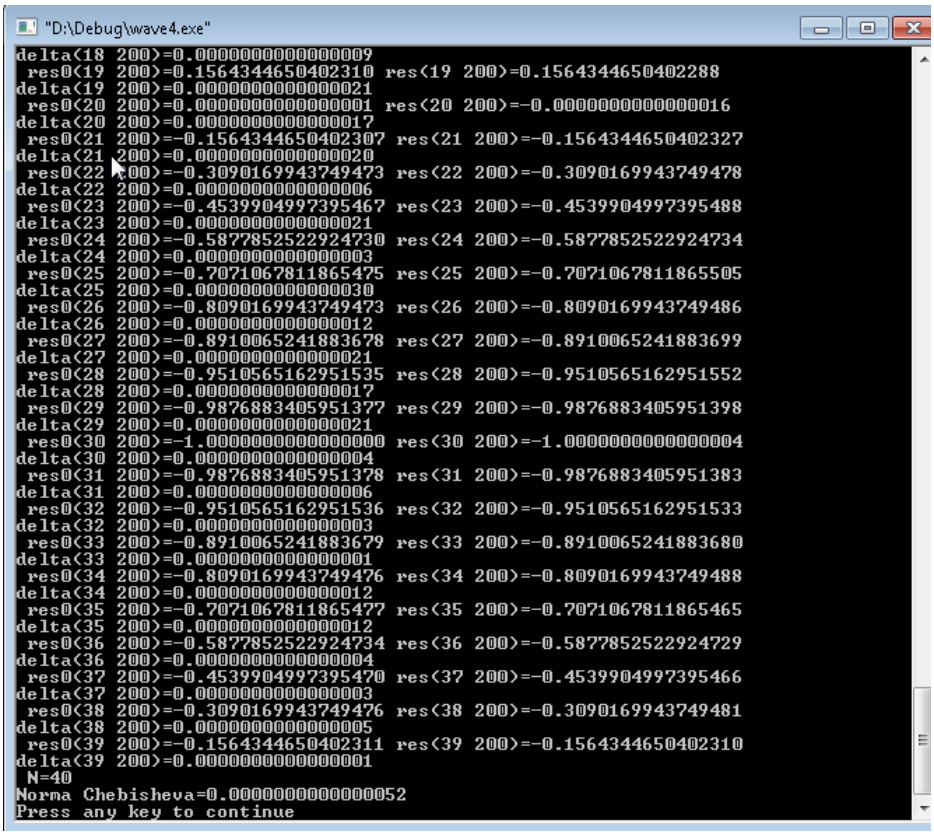



Рис.1

Из приведенного графического решения видно, что пространственно – временная зависимость смещения $u(x,t)$ точек струны с координатой $x$ в момент времени $t$ представляет собой колебания и является стоячими волнами. Действительно, левый верхний фрагмент волновой поверхности становится правым нижним в следующем временном ряду, и наоборот – правый верхний фрагмент волновой поверхности становится левым нижним в следующем временном ряду. Это свидетельствует об одновременном распространении бегущих волн слева – направо и справа – налево, которые, как известно, и образуют стоячую волну.

В программе массив res[i][j] заполняется значениями численного решения, $u_i^j$, а массив res0[i][j] заполняется точными значениями аналитического решения $u(x_i,t_j)$ на общих узлах цело численной решётки.

Используем абсолютно точное значение второго временного слоя
res[i][1]=res0[i][1]; N=40, p=5, N1=p*N; z=1.0



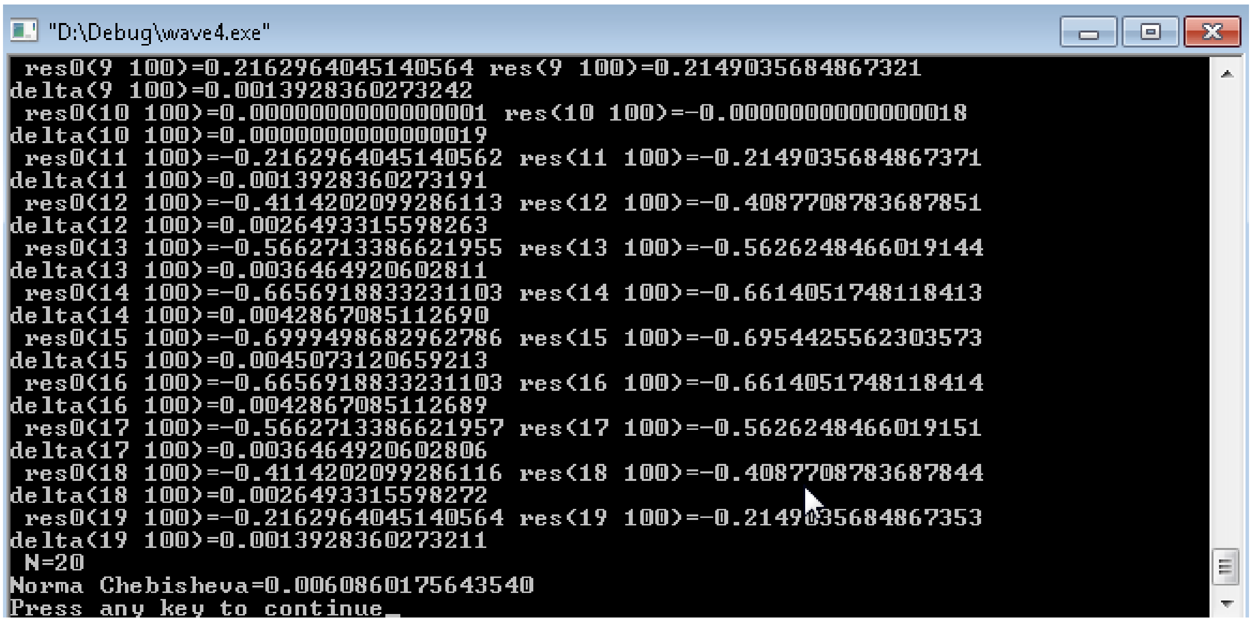
```
"D:\Debug\wave4.exe"
delta(18 200)=0.0000000000000009
 res0(19 200)=0.1564344650402310 res(19 200)=0.1564344650402288
delta(19 200)=0.0000000000000021
 res0(20 200)=0.0000000000000001 res(20 200)=-0.0000000000000016
delta(20 200)=0.0000000000000017
 res0(21 200)=-0.1564344650402307 res(21 200)=-0.1564344650402327
delta(21 200)=0.0000000000000020
 res0(22 200)=-0.3090169943749473 res(22 200)=-0.3090169943749478
delta(22 200)=0.0000000000000006
 res0(23 200)=-0.4539904997395467 res(23 200)=-0.4539904997395488
delta(23 200)=0.0000000000000021
 res0(24 200)=-0.5877852522924730 res(24 200)=-0.5877852522924734
delta(24 200)=0.0000000000000003
 res0(25 200)=-0.7071067811865475 res(25 200)=-0.7071067811865505
delta(25 200)=0.0000000000000030
 res0(26 200)=-0.8090169943749473 res(26 200)=-0.8090169943749486
delta(26 200)=0.0000000000000012
 res0(27 200)=-0.8910065241883678 res(27 200)=-0.8910065241883699
delta(27 200)=0.0000000000000021
 res0(28 200)=-0.9510565162951535 res(28 200)=-0.9510565162951552
delta(28 200)=0.0000000000000017
 res0(29 200)=-0.9876883405951377 res(29 200)=-0.9876883405951398
delta(29 200)=0.0000000000000021
 res0(30 200)=-1.0000000000000000 res(30 200)=-1.0000000000000004
delta(30 200)=0.0000000000000004
 res0(31 200)=-0.9876883405951378 res(31 200)=-0.9876883405951383
delta(31 200)=0.0000000000000006
 res0(32 200)=-0.9510565162951536 res(32 200)=-0.9510565162951533
delta(32 200)=0.0000000000000003
 res0(33 200)=-0.8910065241883679 res(33 200)=-0.8910065241883680
delta(33 200)=0.0000000000000001
 res0(34 200)=-0.8090169943749476 res(34 200)=-0.8090169943749488
delta(34 200)=0.0000000000000012
 res0(35 200)=-0.7071067811865477 res(35 200)=-0.7071067811865465
delta(35 200)=0.0000000000000012
 res0(36 200)=-0.5877852522924734 res(36 200)=-0.5877852522924729
delta(36 200)=0.0000000000000004
 res0(37 200)=-0.4539904997395470 res(37 200)=-0.4539904997395466
delta(37 200)=0.0000000000000003
 res0(38 200)=-0.3090169943749476 res(38 200)=-0.3090169943749481
delta(38 200)=0.0000000000000005
 res0(39 200)=-0.1564344650402311 res(39 200)=-0.1564344650402310
delta(39 200)=0.0000000000000001
 N=40
Norma Chebisheva=0.0000000000000052
Press any key to continue
```

Рис.2

Как видно из Рис.2 норма невязки равна $\|u\|_C = 5.2\ 10^{-15}$, что близко к нулю для чисел с двойной точностью (учитывая то, что ошибка занимает 15 и 16 позиции набора значащих цифр после запятой) и служит численным подтверждением формулы (10). Рис.2 приведен в виде скриншота преднамеренно, для проверки, что массивы численного и точного решений отличны от нуля и близки друг другу по норме Чебышева, т.е. нет тривиального совпадения 0-0=0.

Проверим, что в случае $z<1$ порядок погрешности $O\left(\tau^2+h^2\right)$

res[i][1]=res0[i][1]; N=20, p=5, N1=p*N; z=0.95(Рис.3)



```
"D:\Debug\wave4.exe"
 res0(9 100)=0.2162964045140564 res(9 100)=0.2149035684867321
delta(9 100)=0.0013928360273242
 res0(10 100)=0.0000000000000001 res(10 100)=-0.0000000000000018
delta(10 100)=0.0000000000000019
 res0(11 100)=-0.2162964045140562 res(11 100)=-0.2149035684867371
delta(11 100)=0.0013928360273191
 res0(12 100)=-0.4114202099286113 res(12 100)=-0.4087708783687851
delta(12 100)=0.0026493315598263
 res0(13 100)=-0.5662713386621955 res(13 100)=-0.5626248466019144
delta(13 100)=0.0036464920602811
 res0(14 100)=-0.6656918833231103 res(14 100)=-0.6614051748118413
delta(14 100)=0.0042867085112690
 res0(15 100)=-0.6999498682962786 res(15 100)=-0.6954425562303573
delta(15 100)=0.0045073120659213
 res0(16 100)=-0.6656918833231103 res(16 100)=-0.6614051748118414
delta(16 100)=0.0042867085112689
 res0(17 100)=-0.5662713386621957 res(17 100)=-0.5626248466019151
delta(17 100)=0.0036464920602806
 res0(18 100)=-0.4114202099286116 res(18 100)=-0.4087708783687844
delta(18 100)=0.0026493315598272
 res0(19 100)=-0.2162964045140564 res(19 100)=-0.2149035684867353
delta(19 100)=0.0013928360273211
 N=20
Norma Chebisheva=0.0060860175643540
Press any key to continue_
```

Рис.3

Уменьшим шаг сетки в 2 раза, увеличивая N в 2 раза, оставляя прочие параметры без изменения
res[i][1]=res0[i][1]; N=40, p=5, N1=p*N; z=0.95(Рис.4)

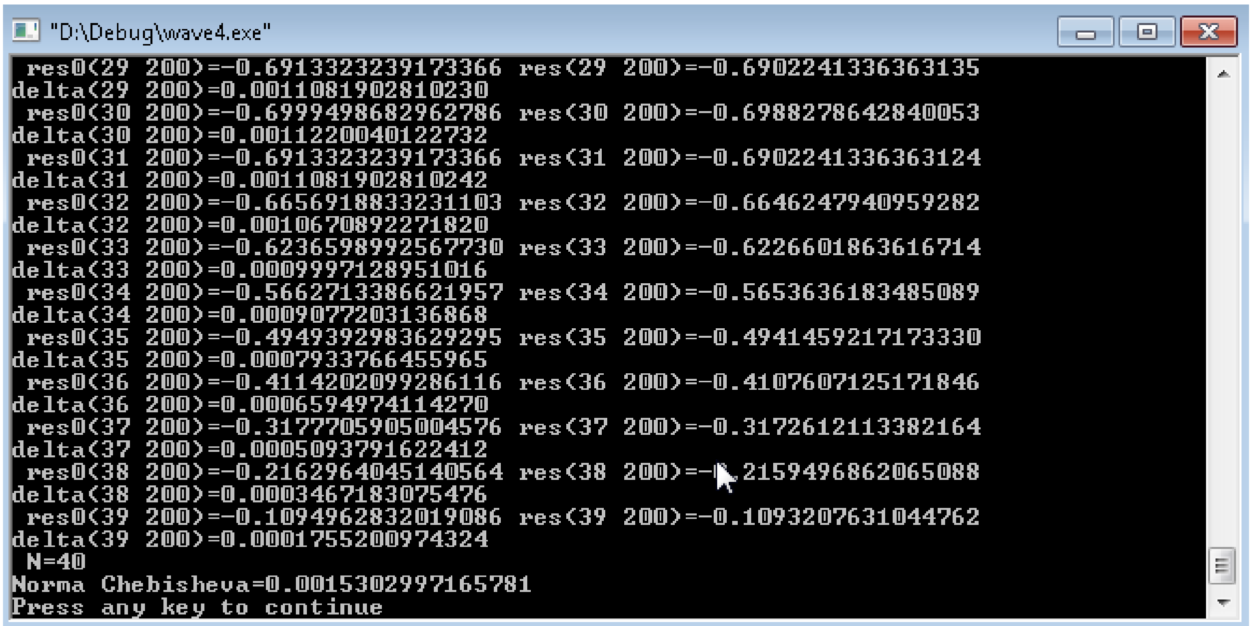



Рис.4

Из Рис.3, Рис.4 видно $\dfrac{\|u(20)\|_C}{\|u(40)\|_C} = \dfrac{0.00609}{0.00153} = 3.98 \approx 2^2$, что с точностью до 3 значащих цифр подтверждает второй порядок погрешности $O(h^2)$ формула(*).

В программе используются следующие начальные формулы, определяющие координатный и временной шаг сетки h, dt:
res[i][1]=res0[i][1]; N=40, p=5, N1=p*N;
h=pi/double(N);
velocity=1.0;
dt=(h/velocity)*sqrt(z);// $\tau = dt$ - временной шаг (12)

Из формулы (12) следует, что при фиксированном параметре z и скорости velocity временной шаг $\tau$ прямо пропорционален координатному шагу $h = c\tau/\sqrt{z}$. Следовательно, для случая $0 < z < 1$, поскольку выполняется асимптотика погрешности $O(h^2)$, то так же верна оценка $O(h^2) = O\left(\left(c\tau/\sqrt{z}\right)^2\right) = O(\tau^2)$. Таким образом, полная погрешность численной схемы при изменении временного и пространственного шага изменяется как $O(h^2) = 2O(h^2) = O(h^2) + O(\tau^2) = O(h^2 + \tau^2)$, т.е. численно подтверждена справедливость формулы(*) $O(\tau^2 + h^2)$, $0 < z < 1$

Приблизим второй временной слой, используя значение первого временного слоя и временную производную на первом слое формулой res[i][1]=res[i][0]+pro[i]*dt (что является достаточно грубым приближением с первым порядком погрешности по dt). Тогда конечное решение также имеет погрешность с первым порядком по dt . (Точным приближением второго временного слоя является формула res[i][1]=res0[i][1]).

Можно проверить численно, что для параметра $z > 1$ численная схема расходится даже в случае точного задания второго временного слоя:
res[i][1]=res0[i][1]; N=20, p=2, N1=p*N; z=1.01(Рис.5)(норма Чебышева превышает $10^{100}$ ,хотя решение задачи ограничено по норме $\|u\|_C = 1$ - формула(6)).

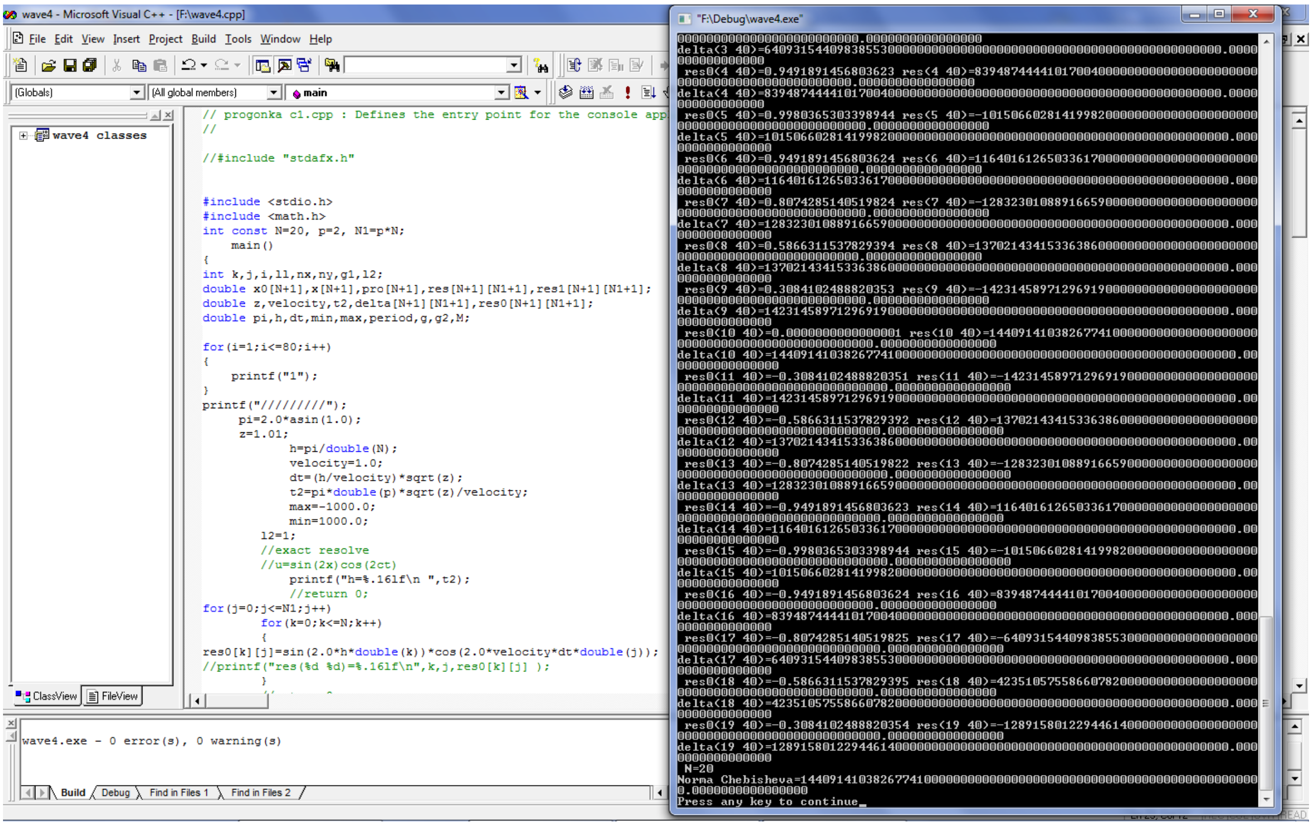



Рис.5

В итоге численно подтверждены все выводы о порядке погрешности численной схемы – формулы (10), (11), (12), (*).

**Литература**


1) Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В.Численные методы в задачах и упражнениях. – М.:БИНОМ, Лаборатория знаний, 2010.
2) Пикулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики. – М: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1995.
3) Самарский А.А., Вабишевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. Учебное пособие. – М.: Издательство ЛКИ, 2014 – 480 с.

## Лабораторная работа №9 Интегрирование уравнения Пуассона на прямоугольнике

Рассмотрим линейную двухмерную задачу математической физики второго порядка - уравнение Пуассона на прямоугольнике (по классификации уравнение эллиптического типа):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin(x), \ 0 < x, y < \pi \\ u(0, y) = u(\pi, y) = \sin(y) \\ u(x, 0) = u(x, \pi) = \sin(x) \\ 0 \le x, y \le \pi \end{cases} \tag{1}$$

Условие данной задачи принадлежит авторам практикума.

Проведём редукцию линейной задачи (1). Действительно, если $L[u(x, y)]$ - линейный дифференциальный оператор, то общая дифференциальная задача(2)

$$\begin{cases} L[u] = F(x, y), \ (x, y) \in D \\ u(x, y)\big|_{(x,y)\in C_1} = f_1(x, y) \\ u(x, y)\big|_{(x,y)\in C_2} = f_2(x, y) \\ (x, y) \in C_1, C_2 \end{cases} \tag{2}$$

где: $C_1, C_2$ - 2 части границы замкнутой области $\overline{D}$,

эквивалентна трём простейшим задачам, каждая из которых в системе содержит только одно уравнение с неоднородной правой частью:

$$\begin{cases} L[u_1] = F(x, y), \ (x, y) \in D \\ u_1(x, y)\big|_{(x,y)\in C_1} = 0 \\ u_1(x, y)\big|_{(x,y)\in C_2} = 0 \\ (x, y) \in C_1, C_2 \end{cases} \quad \begin{cases} L[u_2] = 0, \ (x, y) \in D \\ u_2(x, y)\big|_{(x,y)\in C_1} = f_1(x, y); \\ u_2(x, y)\big|_{(x,y)\in C_2} = 0 \\ (x, y) \in C_1, C_2 \end{cases} \quad \begin{cases} L[u_3] = 0, \ (x, y) \in D \\ u_3(x, y)\big|_{(x,y)\in C_1} = 0 \\ u_3(x, y)\big|_{(x,y)\in C_2} = f_2(x, y) \\ (x, y) \in C_1, C_2 \end{cases} \tag{3}$$

Тогда складывая все три системы (3), учитывая их линейность, получим, что

$$\begin{cases} L[u_1 + u_2 + u_3] = F(x, y) + 0 + 0, \ (x, y) \in D \\ u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y)\big|_{(x,y)\in C_1} = 0 + f_1(x, y) + 0 \\ u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y)\big|_{(x,y)\in C_2} = 0 + 0 + f_2(x, y) \\ (x, y) \in C_1, C_2 \end{cases}$$

решением исходной системы линейных уравнений (2) является сумма решений 3 частных систем (3).

$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y)$.

Пользуясь редукцией линейной задачи, решим пример (1).

$$1) \ \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, \ 0 < x, y < \pi \\ u_1(0, y) = u_1(\pi, y) = \sin(y) \\ u_1(x, 0) = u_1(x, \pi) = 0 \\ 0 \le x, y \le \pi \end{cases}$$

Решаем задачу методом разделения переменных $u(x, y) = X(x)Y(y), X''Y + XY'' = 0$

Выберем в решении функцию $Y(y)=\sin(y)$, совпадающую с граничным условием на первой части границы и автоматически обращающее в 0 решение на второй части границы. Получим уравнение и граничные условия для функции $X(x)$

$$X''\sin(y)-X\sin(y)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X''-X=0 \\ X(0)=X(\pi)=1 \end{cases} \tag{4}$$

Общее решение последней краевой задачи находим на множестве гиперболических функций $X(x)=Ash(x)+Bch(x), sh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}, ch(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Используя граничные условия:

$$X(0)=Ash(0)+Bch(0)=B=1;\ X(\pi)=Ash(\pi)+ch(\pi)=1 \Leftrightarrow A=\frac{1-ch(\pi)}{sh(\pi)}$$

Запишем решение частной задачи 1) $u_1(x,y)=\left(\left(\dfrac{1-ch(\pi)}{sh(\pi)}\right)sh(x)+ch(x)\right)\sin(y)$

Ищем решение второй частной задачи

$$2)\ \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0,\ 0<x,y<\pi \\ u_2(0,y)=u_2(\pi,y)=0 \\ u_2(x,0)=u_2(x,\pi)=\sin(x) \\ 0\le x,y\le\pi \end{cases}$$

Аналогично, разделяя переменные, выбираем функцию $X(x)=\sin(x)$, автоматически удовлетворяющую первому граничному условию 2) и совпадающую со вторым граничным условием.

$$Y''\sin(x)-Y\sin(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} Y''-Y=0 \\ Y(0)=Y(\pi)=1 \end{cases} \tag{5}$$

Краевые задачи (4) и (5) совпадают с точностью до замены переменных $X\to Y, x\to y$. Поэтому выписываем ответ для второй частной задачи 2)

$$u_2(x,y)=\left(\left(\frac{1-ch(\pi)}{sh(\pi)}\right)sh(y)+ch(y)\right)\sin(x)$$

Находим решение третьей частной задачи с уравнением Пуассона

$$3)\ \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}=\sin(x),\ 0<x,y<\pi \\ u_3(0,y)=u_3(\pi,y)=0 \\ u_3(x,0)=u_3(x,\pi)=0 \\ 0\le x,y\le\pi \end{cases}$$

Разделяя переменные, выбираем функцию, зависящую от аргумента $x$ и повторяющую неоднородность уравнения Пуассона $X(x)=\sin(x), u(x,y)=\sin(x)Y(y)$. При этом автоматически выполняется первое краевое условие задачи 3), решение подставим в уравнение Пуассона:

$$-\sin(x)Y+Y''\sin(x)=\sin(x)\Leftrightarrow Y''-Y=1$$

$$\begin{cases} Y''-Y=1 \\ Y(0)=Y(\pi)=0 \end{cases} \tag{6}$$

Находим частное решение дифференциального уравнения краевой задачи (6).

$Y_{part}(y) = -1$

Общее решение однородного уравнения  следующее:

$Y(y) = Ash(y) + Bch(y)$

Общее решение неоднородного уравнения есть сумма частного неоднородного и общего однородного уравнений.

$Y_н(y) = -1 + Ash(y) + Bch(y)$

Теперь нужно выполнить краевые условия задачи (6)

$Y_н(0) = -1 + Ash(0) + Bch(0) = B - 1 = 0 \Leftrightarrow B = 1$

$$Y_н(\pi) = -1 + Ash(\pi) + ch(\pi) = 0 \Leftrightarrow A = \left(\frac{1 - ch(\pi)}{sh(\pi)}\right)$$

Тогда решение краевой задачи (6) есть

$$u_3(x, y) = \left(-1 + \left(\frac{1 - ch(\pi)}{sh(\pi)}\right) sh(y) + ch(y)\right)\sin(x)$$

Решение исходной задачи 1) есть сумма решений 3 частных задач:

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) = \left(\left(\frac{1 - ch(\pi)}{sh(\pi)}\right) sh(x) + ch(x)\right)\sin(y) +$$

$$+\left(\left(\frac{1 - ch(\pi)}{sh(\pi)}\right) sh(y) + ch(y)\right)\sin(x) + \left(-1 + \left(\frac{1 - ch(\pi)}{sh(\pi)}\right) sh(y) + ch(y)\right)\sin(x) \qquad (7)$$

Формулу (7) – решение краевой задачи для уравнения Пуассона на прямоугольнике используем в качестве теста при составлении программы.

Для численного решения уравнения Пуассона составим схему. Для аппроксимации выберем два шаблона  максимального порядка симметрии и наименьшего диаметра:

шаблон “крест”

$$\begin{array}{ccccc} & & u_{0,1} & & \\ & & \bullet & & \\ u_{-1,0} & \bullet & \bullet & \bullet & u_{1,0} \\ & & \bullet & & \\ & & u_{0,-1} & & \end{array}$$

девяти точечный шаблон

$$\begin{array}{ccccc} & u_{-1,1} & u_{0,1} & u_{1,1} & \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \\ u_{-1,0} & \bullet & \bullet & \bullet & u_{1,0} \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \\ & u_{-1,-1} & u_{0,-1} & u_{1,-1} & \end{array}$$

Центральная точка в обоих шаблонах имеет значение $u_{0,0}$. Поскольку задача (1) рассматривается на квадрате, то можно выбрать одинаковый  шаг сетки по обоим переменным. В силу симметрии шаблона относительно центрального узла равноудалённые узлы входят в лапласиан (уравнение Пуассона) с одинаковым весом:

Разложим все узловые значения функций в последней формуле относительно центрального узла, с точностью до $o(h^7)$:

$$u_{1,1} = u_{0,0} + h\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) + \frac{h^3}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right) +$$

$$+\frac{h^4}{24}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 4\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + 6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 4\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) + \frac{h^5}{120}\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + 5\frac{\partial^5 u}{\partial x^4 \partial y} + 10\frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2} + 10\frac{\partial^5 u}{\partial x^2 \partial y^3} +\right.$$

$$\left.+5\frac{\partial^5 u}{\partial y^4 \partial x} + \frac{\partial^5 u}{\partial y^5}\right) + \frac{h^6}{720}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + 6\frac{\partial^6 u}{\partial x^5 \partial y} + 15\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 20\frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3} + 15\frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + 6\frac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^5} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)$$

$$u_{1,-1}=u_{0,0}+h\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+\frac{h^3}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+3\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}-\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)+$$

$$+\frac{h^4}{24}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-4\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}+6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}-4\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y^3}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)+\frac{h^5}{120}\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}-5\frac{\partial^5 u}{\partial x^4\partial y}+10\frac{\partial^5 u}{\partial x^3\partial y^2}-10\frac{\partial^5 u}{\partial x^2\partial y^3}+\right.$$

$$\left.+5\frac{\partial^5 u}{\partial y^4\partial x}-\frac{\partial^5 u}{\partial y^5}\right)+\frac{h^6}{720}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}-6\frac{\partial^6 u}{\partial x^5\partial y}+15\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial y^2}-20\frac{\partial^6 u}{\partial x^3\partial y^3}+15\frac{\partial^6 u}{\partial x^2\partial y^4}-6\frac{\partial^6 u}{\partial x\partial y^5}+\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)$$

$$u_{-1,-1}=u_{0,0}-h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)-\frac{h^3}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+3\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)+$$

$$+\frac{h^4}{24}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+4\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}+6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+4\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y^3}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)-\frac{h^5}{120}\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}+5\frac{\partial^5 u}{\partial x^4\partial y}+10\frac{\partial^5 u}{\partial x^3\partial y^2}+10\frac{\partial^5 u}{\partial x^2\partial y^3}+\right.$$

$$\left.+5\frac{\partial^5 u}{\partial y^4\partial x}+\frac{\partial^5 u}{\partial y^5}\right)+\frac{h^6}{720}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+6\frac{\partial^6 u}{\partial x^5\partial y}+15\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial y^2}+20\frac{\partial^6 u}{\partial x^3\partial y^3}+15\frac{\partial^6 u}{\partial x^2\partial y^4}+6\frac{\partial^6 u}{\partial x\partial y^5}+\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)$$

$$u_{-1,1}=u_{0,0}+h\left(-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+\frac{h^3}{6}\left(-\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}-3\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)+$$

$$+\frac{h^4}{24}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-4\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}+6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}-4\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y^3}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)+\frac{h^5}{120}\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}-5\frac{\partial^5 u}{\partial x^4\partial y}+10\frac{\partial^5 u}{\partial x^3\partial y^2}-10\frac{\partial^5 u}{\partial x^2\partial y^3}+\right.$$

$$\left.+5\frac{\partial^5 u}{\partial y^4\partial x}-\frac{\partial^5 u}{\partial y^5}\right)+\frac{h^6}{720}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}-6\frac{\partial^6 u}{\partial x^5\partial y}+15\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial y^2}-20\frac{\partial^6 u}{\partial x^3\partial y^3}+15\frac{\partial^6 u}{\partial x^2\partial y^4}-6\frac{\partial^6 u}{\partial x\partial y^5}+\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)$$

В сумме получим:

$$u_{1,1}+u_{1,1}+u_{1,1}+u_{1,1}=4u_{0,0}+2h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{h^4}{6}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)+$$

$$+\frac{h^6}{180}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+15\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial y^2}+15\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial y^2}+\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)+o\left(h^7\right)$$

Аналогично,

$$u_{0,1}+u_{0,-1}+u_{1,0}+u_{-1,0}=4u_{0,0}+h\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{h^5}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}+\frac{h^6}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+$$

$$-h\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\frac{h^5}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}+\frac{h^6}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+h\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}+\frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}+$$

$$+\frac{h^5}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial y^5}+\frac{h^6}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}-h\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}+\frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}-\frac{h^5}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial y^5}+\frac{h^6}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}=4u_{0,0}+$$

$$+h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{h^4}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)+\frac{h^6}{360}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)+o\left(h^7\right)$$

***1) 5 точечный шаблон "крест"***

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)=\frac{1}{h^2}\left(C_0u_{0,0}+C_1\left(u_{0,1}+u_{0,-1}+u_{1,0}+u_{-1,0}\right)\right)=\frac{1}{h^2}\left(C_0u_{0,0}+\right.$$

$$\left.+C_1\left(4u_{0,0}+h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{h^4}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)+\frac{h^6}{360}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)\right)+o\left(h^7\right)\right)$$

Методом неопределённых коэффициентов получаем систему уравнений

$\begin{cases} C_0 + 4C_1 = 0 \\ C_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_0 = -4$ с главным членом погрешности $-\frac{h^2}{3}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)$, выразим из последней формулы центральное узловое значение $u_{0,0} = \frac{1}{4}\left(\left(u_{0,1} + u_{0,-1} + u_{1,0} + u_{-1,0}\right)\right) - \frac{h^2 f_{0,0}}{4}$.

Методом простой итерации получаем рекуррентную последовательность

$$u^{k+1}{}_{0,0} = \frac{1}{4}\left(\left(u^k{}_{0,1} + u^k{}_{0,-1} + u^k{}_{1,0} + u^k{}_{-1,0}\right)\right) - \frac{h^2 f_{0,0}}{4}, k = 0,1,2,... \quad (8)$$

Используя формулу (8), напишем программу для решения задачи (1) на C++. Программа определяет норму погрешности (максимальное значение модуля разности между численным и точным значениями по всем узлам сетки на прямоугольнике) после, m=2000 простых итераций. Начальное значение потенциала определяется с учетом принципа максимума для эллиптического уравнения (в данном внутреннем узле потенциал равен арифметическому среднему от граничных узловых значений, имеющих ту же строку либо тот же столбец, что и рассматриваемый узел).

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
int const n=20, m=2000;
double ch(double x);
double sh(double x);
double a1(double x,double y);
double a2(double x,double y);
double b1(double x,double y);
double b2(double x,double y);
double f(double x,double y);
int main()
{
int i,j,k;
double u[m+2][n+2][n+2],a,b,c,d,pi,h1,h2,x,y;
double  res[n+2][n+2],delta[n+2][n+2],max,sum;
max=-1000.0;
pi=2.0*asin(1.0);
a=0.0;
b=pi;
c=0.0;
d=pi;
h1=(b-a)/double(n);
h2=(d-c)/double(n);
///////////boundary condition
for(j=0;j<=m;j++)
{
for(i=0;i<=n;i++)
{
x=a+h1*double(i);
 y=c+h2*double(i);
u[j][0][i]=b1(x,c);
u[j][n][i]=b2(x,d);
u[j][i][0]=a1(a,y);
u[j][i][n]=a2(b,y);
//sum =sum+ b1(x,c)+ b2(x,d)+ a1(a,y)+ a2(b,y) ;
}
```

```
}
////////////////////initial condition
for(j=1;j<=n-1;j++)
{
for(i=1;i<=n-1;i++)
{
x=a+h1*double(i);
 y=c+h2*double(j);
u[0][j][i]=( b1(x,c)+ b2(x,d)+ a1(a,y)+ a2(b,y))/4.0 ;
}
}
for (k=0;k<=m;k++)
{
 for (j=1;j<=n-1;j++)
 {
for( i=1;i<=n-1;i++)
{
 y=c+h1*double(j);
x=a+h1*double(i);
u[k+1][j][i]=0.25*(u[k][j-1][i]+u[k][j+1][i]+u[k][j][i-1]+u[k][j][i+1]) - (0.25)*h1*h1* f(x,y);
 }
}
}
for(j=0;j<=n;j++)
for(i=0;i<=n;i++)
{
 x=a+h1*double(i);
 y=c+h2*double(j);

res[j][i]=(ch(x)+sh(x)*(1.0-ch(pi))/sh(pi))*sin(y)+sin(x)*(ch(y)+sh(y)*(1.0-
ch(pi))/sh(pi))+sin(x)*(ch(y)-1.0+sh(y)*(1.0-ch(pi))/sh(pi));
 delta[j][i]= u[m][j][i]- res[j][i];
if( delta[j][i]<=0.0 )
{
delta[j][i]=- delta[j][i];
 }
 printf("i=%d j=%d delta=%.16lf\n",j,i, delta[j][i]);
if( delta[j][i]>=max)
{
max=delta[j][i];
}
printf("i=%d j=%d delta=%.16lf\n",j,i, delta[j][i]);
}
printf("norma C =%.16lf\n",max);
remove("101.txt");
FILE*file;
file=fopen("101.txt","w");
for(j=0;j<=n;j++)
{
for(i=0;i<=n;i++)
{
x=a+h1*double(i);
```

```
 y=c+h2*double(j);
fprintf(file,"%.16lf  %.16lf  %.16lf \n",x,y,u[m][j][i]);
}
}
fclose(file);
remove("102.txt");
file=fopen("102.txt","w");
for(j=0;j<=n;j++)
{
for(i=0;i<=n;i++)
{
x=a+h1*double(i);
 y=c+h2*double(j);
fprintf(file,"%.16lf  %.16lf  %.16lf \n",x,y ,res[j][i] );
}
}
fclose(file);
}
double ch(double x)
{
return (exp(x)+exp(-x))/2.0;
}
double sh(double x)
{
return (exp(x)-exp(-x))/2.0;
}
double a1(double x,double y)
{
return sin(y);
}
double a2(double x,double y)
{
 return sin(y);
}
double b1(double x,double y)
{
 return sin(x);
}
double b2(double x,double y)
{
 return sin(x);
}
double f(double x,double y)
{
 return  sin(x);
}
```

При n=10 программа возвращает Чебышева норму погрешности: $delta(10) = 0.00912$

При n=20 программа возвращает норму погрешности: $delta(20) = 0.00223$

$\frac{delta(10)}{delta(20)} = \frac{0.00912}{0.00223} = 4.089 \approx 2^2$. Следовательно, у итерации (8) второй порядок погрешности.

2) девяти точеный шаблон

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}= f(x,y)=\frac{1}{h^2}\left(C_0u_{0,0}+C_1\left(u_{0,1}+u_{0,-1}+u_{1,0}+u_{-1,0}\right)+C_2\left(u_{1,1}+u_{1,-1}+u_{1,-1}+u_{-1,-1}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{h^2}\left(C_0u_{0,0}+C_1\left(4u_{0,0}+h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{h^4}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)+\frac{h^6}{360}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)\right)+\right.$$

$$\left.C_2\left(4u_{0,0}+2h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{h^4}{6}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)+\frac{h^6}{180}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+15\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial y^2}+15\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial y^2}+\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)\right)\right)$$

Учитывая операторное равенство $\Delta^2 u=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 u=\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)u$, выразим производные старшего порядка потенциала $u$ через производные функции $f(x,y)$:

$$\begin{cases} C_0+4C_1+4C_2=0\\ C_1+2C_2=1\\ \frac{C_1}{12}+\frac{C_2}{6}=\frac{1}{2}(C_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} C_0+4C_1+4C_2=0\\ C_1+2C_2=1\\ C_1=4C_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} C_0=-10/3\\ C_1=2/3\\ C_2=1/6\end{cases}$$

Итого $\left(\Delta^2 u=\Delta f\right)$

$$\frac{1}{h^2}\left(C_0u_{0,0}+C_1\left(u_{0,1}+u_{0,-1}+u_{1,0}+u_{-1,0}\right)+C_2\left(u_{1,1}+u_{1,-1}+u_{1,-1}+u_{-1,-1}\right)\right)=$$

$$\frac{1}{h^2}\left(-\frac{10}{3}u_{0,0}+\frac{2}{3}\left(u_{0,1}+u_{0,-1}+u_{1,0}+u_{-1,0}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{1,1}+u_{1,-1}+u_{1,-1}+u_{-1,-1}\right)\right)=$$

$$=\Delta u+h^2\left(\frac{C_1}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)+\frac{C_2}{6}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)\right)= f+\frac{h^2}{12}\Delta f$$

Выражаем центральное узловое значение

$$u_{0,0}=\frac{3}{10}\left(\frac{2}{3}\left(u_{0,1}+u_{0,-1}+u_{1,0}+u_{-1,0}\right)+\frac{1}{6}\left(u_{1,1}+u_{1,-1}+u_{1,-1}+u_{-1,-1}\right)-h^2\left(f+\frac{h^2}{12}\Delta f\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(u_{0,1}+u_{0,-1}+u_{1,0}+u_{-1,0}\right)+\frac{1}{20}\left(u_{1,1}+u_{1,-1}+u_{1,-1}+u_{-1,-1}\right)-\frac{3}{10}h^2\left(f+\frac{h^2}{12}\Delta f\right)=$$

$$\frac{1}{5}\left(u_{0,1}+u_{0,-1}+u_{1,0}+u_{-1,0}\right)+\frac{1}{20}\left(u_{1,1}+u_{1,-1}+u_{1,-1}+u_{-1,-1}\right)-$$

$$-\frac{3}{10}h^2\left(f_{0,0}+\frac{h^2}{12h^2}\left(f_{0,1}+f_{0,-1}+f_{1,0}+f_{-1,0}-4f_{0,0}\right)\right)=\frac{1}{5}\left(u_{0,1}+u_{0,-1}+u_{1,0}+u_{-1,0}\right)+$$

$$+\frac{1}{20}\left(u_{1,1}+u_{1,-1}+u_{1,-1}+u_{-1,-1}\right)-\frac{3}{10}h^2\left(\frac{2}{3}f_{0,0}+\frac{1}{12}\left(f_{0,1}+f_{0,-1}+f_{1,0}+f_{-1,0}\right)\right)=\frac{1}{5}\left(u_{0,1}+u_{0,-1}+u_{1,0}+u_{-1,0}\right)$$

$$+\frac{1}{20}\left(u_{1,1}+u_{1,-1}+u_{1,-1}+u_{-1,-1}\right)-\frac{1}{40}h^2\left(8f_{0,0}+f_{0,1}+f_{0,-1}+f_{1,0}+f_{-1,0}\right)\qquad(9)$$

Из формулы (9) получим простую итерацию

$$u^{k+1}{}_{0,0}=\frac{1}{5}\left(u^k{}_{0,1}+u^k{}_{0,-1}+u^k{}_{1,0}+u^k{}_{-1,0}\right)+\frac{1}{20}\left(u^k{}_{1,1}+u^k{}_{1,-1}+u^k{}_{1,-1}+u^k{}_{-1,-1}\right)-$$

$$-\frac{1}{40}h^2\left(8f_{0,0}+f_{0,1}+f_{0,-1}+f_{1,0}+f_{-1,0}\right)\qquad(10)$$

Используя формулу (10) составим программу для задачи (1)

```
#include<stdio.h>
```

```
#include<math.h>
int const n=20, m=2000;
double ch(double x);
double sh(double x);
double a1(double x,double y);
double a2(double x,double y);
double b1(double x,double y);
double b2(double x,double y);
double f(double x,double y);
//int const n=100, m=10,ll=10;
int main()
{
int i,j,k;
double u[m+2][n+2][n+2],a,b,c,d,pi,h1,h2,x,y;
double  res[n+2][n+2],delta[n+2][n+2],max,sum;
max=-1000.0;
pi=2.0*asin(1.0);
a=0.0;
b=pi;
c=0.0;
d=pi;
h1=(b-a)/double(n);
h2=(d-c)/double(n);
////////////boundary condition
for(j=0;j<=m;j++)
{
for(i=0;i<=n;i++)
{
x=a+h1*double(i);
y=c+h2*double(i);
u[j][0][i]=b1(x,c);
u[j][n][i]=b2(x,d);
u[j][i][0]=a1(a,y);
u[j][i][n]=a2(b,y);
}
}
////////////////////initial condition
for(j=1;j<=n-1;j++)
{
for(i=1;i<=n-1;i++)
{
x=a+h1*double(i);
y=c+h2*double(j);
u[0][j][i]=( b1(x,c)+ b2(x,d)+ a1(a,y)+ a2(b,y))/4.0 ;
}
}
////////////////////
for (k=0;k<=m;k++)
{
 for (j=1;j<=n-1;j++)
{
 for( i=1;i<=n-1;i++)
```

```
{

y=c+h1*double(j);
 x=a+h1*double(i);
 u[k+1][j][i]=0.2*(u[k][j-1][i]+u[k][j+1][i]+u[k][j][i-1]+u[k][j][i+1])+
0.05*(u[k][j+1][i+1]+u[k][j+1][i-1]+u[k][j-1][i-1]+u[k][j-1][i+1])-
(1.0/40.0)*h1*h1*(8.0*f(x,y)+ f(x-h1,y)+ f(x+h1,y) +f(x,y-h1) + f(x,y+h1) );
}
}
}
 for(j=0;j<=n;j++)
for(i=0;i<=n;i++)
{
x=a+h1*double(i);
 y=c+h2*double(j);
 res[j][i]=(ch(x)+sh(x)*(1.0-ch(pi))/sh(pi))*sin(y)+sin(x)*(ch(y)+sh(y)*(1.0-
ch(pi))/sh(pi))+sin(x)*(ch(y)-1.0+sh(y)*(1.0-ch(pi))/sh(pi));
delta[j][i]= u[m][j][i]- res[j][i];
if( delta[j][i]<=0.0 )
{
delta[j][i]=- delta[j][i];
}
printf("i=%d j=%d delta=%.16lf\n",j,i, delta[j][i]);
 if( delta[j][i]>=max)
{
 max=delta[j][i];
}
 printf("i=%d j=%d delta=%.16lf\n",j,i, delta[j][i]);
}
 printf("norma C =%.16lf\n",max);
remove("101.txt");
FILE*file;
file=fopen("101.txt","w");
for(j=0;j<=n;j++)
{
for(i=0;i<=n;i++)
{
x=a+h1*double(i);
 y=c+h2*double(j);
fprintf(file,"%.16lf  %.16lf  %.16lf \n",x,y,u[m][j][i]);
}
}
fclose(file);
remove("102.txt");
file=fopen("102.txt","w");
for(j=0;j<=n;j++)
{
for(i=0;i<=n;i++)
{
x=a+h1*double(i);
            y=c+h2*double(j);
fprintf(file,"%.16lf  %.16lf  %.16lf \n",x,y ,res[j][i] );
```

```
}
}
fclose(file);
}
double ch(double x)
{
return (exp(x)+exp(-x))/2.0;
}
double sh(double x)
{
return (exp(x)-exp(-x))/2.0;
}
double a1(double x,double y)
{
return sin(y);
}
double a2(double x,double y)
{
 return sin(y);
}
double b1(double x,double y)
{
 return sin(x);
}
double b2(double x,double y)
{
 return sin(x);
}
double f(double x,double y)
{
 return  sin(x);
}
```

При n=10 программа возвращает Чебышева норму погрешности: $delta(10) = 0.0000242$

При n=20 программа возвращает норму погрешности: $delta(20) = 0.00000152$

$\frac{delta(10)}{delta(20)} = \frac{0.0000242}{0.00000152} = 15.92 \approx 2^4$. Следовательно, у итерации (10) четвёртый порядок погрешности.

## Приложение 1

## Метод подобия в однопараметрических задачах линейного программирования

### Введение

В предлагаемой работе рассматривается задача максимального ослабления гамма – радиации в зависимости от стоимости $1\,м^2$ многослойной стены жилого помещения. Обеспечить защиту от радиации необходимо различным рода укрытиям, армейским бункерам, расположенным в предполагаемых точках дислокации во время военных действий. Среди всех видов радиации наибольшей проникающей способностью является гамма – излучение [3]. Данная задача является особенно актуальной в последнее время в связи с увеличением в мире источников радиации. Одним из основных принципов нормативного документа НРБ – 2000 является принцип оптимальности, который требует максимальной защиты населения и окружающей среды от проникающей радиации при строительстве жилых помещений с учётом экономических факторов. В жилых помещениях наиболее незащищённой от радиации частью является оконный проём. Источники радиации направленного действия, расположенные на земле, не оказывают влияния на верхние этажи, начиная со второго, при достаточной защите стен и межэтажных перекрытий. Действие излучения диффузного типа, проникающего хаотично через окно от общего радиационного фона и из космоса, требует оценки. Рассмотрим окно в комнате максимальной площади $dS = 2*2 = 4м^2$. Человек, удалённый от окна на расстояние $r = 2$м, получит долю радиации от окружающего радиационного фона $\alpha = \frac{1}{4\pi}\frac{dS}{r^2} \approx 0.08 < 0.1(10\%)$. Поэтому, стены жилого помещения должны ослаблять излучение более чем в 10 раз. То есть ослаблять до 10 % общий фон диффузно направленной радиации, действующей на человека, удалённого на 2м от окна. Во – вторых, исходная задача сводится к однопараметрической нормальной форме задачи линейного программирования с ограничениями типа неравенств и решается численно симплекс – методом. В работе доказана лемма (метод подобия в задаче линейного программирования). Лемма позволяет графически по формулам (5),(6),(7) получить решение задачи с произвольной максимальной толщиной стены по решению с максимальной толщиной в 1м. В – третьих, справедливость леммы проверена численными методами, т.е. данная задача представляет собой типичный пример математического моделирования.

### Постановка задачи и свойства решений задачи

Рассмотрим задачу максимального ослабления гамма-излучения стены некоторого жилого помещения, содержащего несколько слоёв строительных материалов. Самыми распространёнными из них являются, например, кирпич, сосна и бетон. Коэффициент ослабления гамма – радиации стеной из трёх слоёв в любой последовательности материалов даётся формулой[3]:

$$k(x_1, x_2, x_3) = 2^{-\left(\frac{x_1}{\Delta_1}+\frac{x_2}{\Delta_2}+\frac{x_3}{\Delta_3}\right)} \to min \qquad (1)$$

Где: $x_1, x_2, x_3$- толщины слоёв из кирпича, сосны и бетона соответственно в м. Очевидно, что эти величины неотрицательны $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$. Толщины половинного ослабления $\Delta_1 = 0.14м, \Delta_2 = 0.3м, \Delta_3 = 0.16м$ - кирпича, древесины и бетона соответственно. Учитывая сложный компонентный состав бетона, его прочности (марки

M50-M300), рыхлости, добавления щебня, керамзита и др. компонентов, $\Delta_3$ меняется в пределах (10-20)см – мы выбрали [4]значение $\Delta_3 = 0.16м$ в задаче(1). Обычно толщина стены не превосходит 1м. $x_1 + x_2 + x_3 \le x_0 = 1$м. Тогда стоимость 1 $м^2$ стенки равна
$C(млн.\,руб / м^2) = (C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3)$

На период 01.12.2015 среднюю стоимость кубометра кирпича, сосны и бетона на строительных рынках Минской области находим $C_1 = 1.7 млн.р./ м^3, C_2 = 2.5 млн.р./ м^3, C_3 = 0.8 млн.р./ м^3$.
Получаем задачу на **условный** экстремум:

$$\begin{cases} k(x_1, x_2, x_3) = 2^{-\left(\frac{x_1}{\Delta_1} + \frac{x_2}{\Delta_2} + \frac{x_3}{\Delta_3}\right)} \to min(inf) \\ C = (C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3) \le C_{\mathrm{var}} \\ x_1 + x_2 + x_3 \le x_0 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Отметим, что в постановке задачи (2) величина $C_{\mathrm{var}}$ является параметром, в отличие от стоимости 1 $м^2$ стенки $C$ при фиксированных толщинах $(C \le C_{\mathrm{var}})$. Поэтому мы назвали задачи (2) и (3) однопараметрическими ЗЛП.

Напомним, что в задаче (3) максимальная толщина стенки $x_0$ составляет 1м, данное ограничение возникает при проектировании одного или нескольких расположенных близко друг к другу зданий. Задача (2) равносильна задаче линейного программирования (3):

$$\begin{cases} d(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{\Delta_1} + \frac{x_2}{\Delta_2} + \frac{x_3}{\Delta_3}\right) \to max(sup) \\ (C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3) \le C_{\mathrm{var}} \\ x_1 + x_2 + x_3 \le x_0 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \\ C_{\mathrm{var}} \in [0, \max\{C_1, C_2, C_3\}] \equiv [0, C^0_{\mathrm{var}}] \end{cases} \qquad (3)$$

Задача (3) представляет собой нормальную форму постановки задачи линейного программирования и решается симплекс – методом, для этого нормальную форму необходимо привести к канонической форме введением дополнительных переменных[1]. Мы не будем сводить (3) к каноническому ввиду численного её решения, где параметр $C_{\mathrm{var}}$ в программе принимает до 250 различных эквидистантных значений (это число равно максимальному числу точек на графиках).

Предположим, что задача (3) имеет решение при $x_0 = 1$м, но мы хотим получить решение при максимальной толщине стенки $m x_0$ м ($m -$безразмерная величина, $m > 1 либо (m < 1)$). Докажем следующее утверждение:

**Лемма (метод подобия в ЗЛП).** Пусть существует однопараметрическое решение семейства задачи линейного программирования (ЗЛП) (3) $\bar{x}_1(\overline{C_{\mathrm{var}}}), \bar{x}_2(\overline{C_{\mathrm{var}}}), \bar{x}_3(\overline{C_{\mathrm{var}}})$ (при $x_0 = 1м$). Тогда решение задачи(4)(при допустимой толщине стены $m x_0$) получаем из решения(3) методом подобия – однородным растяжением масштабов координатных осей в $m$ раз, т.е.:

$$\bar{x}_1^{(4)}(\overline{C'_{\mathrm{var}}}) = m\bar{x}_1^{(3)}(m\overline{C_{\mathrm{var}}}), \bar{x}_2^{(4)}(\overline{C'_{\mathrm{var}}}) = m\bar{x}_2^{(3)}(m\overline{C_{\mathrm{var}}}), \bar{x}_3^{(4)}(\overline{C'_{\mathrm{var}}}) = m\bar{x}_3^{(3)}(m\overline{C_{\mathrm{var}}})$$

**Доказательство**:

Умножим каждое уравнение системы(3) на положительное число $m$, получим:

$$\begin{cases} D(x_1,x_2,x_3)=md(x_1,x_2,x_3)=\left(\dfrac{mx_1}{\Delta_1}+\dfrac{mx_2}{\Delta_2}+\dfrac{mx_3}{\Delta_3}\right)\to max(sup) \\ (C_1mx_1+C_2mx_2+C_3mx_3)\le mC_{\mathrm{var}} \\ mx_1+mx_2+mx_3\le mx_0 \\ mx_1\ge 0, mx_2\ge 0, mx_3\ge 0 \\ mC_{\mathrm{var}}\in[0,m\max\{C_1,C_2,C_3\}]=[0,mC^0_{\mathrm{var}}] \end{cases}$$

Введём переменные $y_1=mx_1, y_2=mx_2, y_3=mx_3$. Обозначим $X_0=mx_0, C'_{\mathrm{var}}=mC_{\mathrm{var}}$, в новых переменных получим задачу (4):

$$\begin{cases} D(y_1,y_2,y_3)=\left(\dfrac{y_1}{\Delta_1}+\dfrac{y_2}{\Delta_2}+\dfrac{y_3}{\Delta_3}\right)\to max(sup) \\ (C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3)\le C'_{\mathrm{var}} \\ y_1+y_2+y_3\le X_0 \\ y_1\ge 0, y_2\ge 0, y_3\ge 0 \\ C'_{\mathrm{var}}=mC_{\mathrm{var}}\in[0,m\max\{C_1,C_2,C_3\}]=[0,mC^0_{\mathrm{var}}] \end{cases} \tag{4}$$

Сравнивая задачи (3) и (4), мы видим, что (3) и (4) отличаются только обозначением переменных $x_1,x_2,x_3$ и $y_1,y_2,y_3$, причём $y_1=mx_1, y_2=mx_2, y_3=mx_3$

$0\le y_1\le mx_0, 0\le y_2\le mx_0, 0\le y_3\le mx_0$, а также $C'_{\mathrm{var}}=mC_{\mathrm{var}}, 0\le C'_{\mathrm{var}}\le mC^0_{\mathrm{var}}$, что соответствует растяжению масштабов параметра $C_{\mathrm{var}}$ координатных осей $x_1,x_2,x_3$, и областей изменения переменных $C^0_{\mathrm{var}}, x_0$ в $m$ раз.

Следовательно, если существует решение задачи (3), то существует и решение задачи(4), а решения связаны между собой соотношением подобия (ведь постановки (3) и (4) отличаются только буквенным обозначением):

$$\bar{x}_1^{(4)}(\overline{C'_{\mathrm{var}}})=m\bar{x}_1^{(3)}(\overline{mC_{\mathrm{var}}}), \bar{x}_2^{(4)}(\overline{C'_{\mathrm{var}}})=m\bar{x}_2^{(3)}(\overline{mC_{\mathrm{var}}}), \bar{x}_3^{(4)}(\overline{C'_{\mathrm{var}}})=m\bar{x}_3^{(3)}(\overline{mC_{\mathrm{var}}})$$

(5)

Что и требовалось доказать.

Отметим также, что коэффициент ослабления радиации в задаче (2) согласно полученной лемме

$$D(\bar{y}_1,\bar{y}_2,\bar{y}_3)=md(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)=\left(\frac{\overline{mx_1}}{\Delta_1}+\frac{\overline{mx_2}}{\Delta_2}+\frac{\overline{mx_3}}{\Delta_3}\right)$$

$$K(\bar{y}_1,\bar{y}_2,\bar{y}_3,)=K(\overline{mx_1},\overline{mx_2},\overline{mx_3})=2^{-m\left(\frac{\bar{x}_1}{\Delta_1}+\frac{\bar{x}_2}{\Delta_2}+\frac{\bar{x}_3}{\Delta_3}\right)}=\left(2^{-\left(\frac{\bar{x}_1}{\Delta_1}+\frac{\bar{x}_2}{\Delta_2}+\frac{\bar{x}_3}{\Delta_3}\right)}\right)^m=\left(k(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)\right)^m \tag{6}$$

**Описание программы**

Программа написана на языке Fortran(Compaq Visual Fortran Professional Edition 6.6.0). Подпрограмма Dlprs решает задачу линейного программирования[2]: $min(C^T x), x\in R^n$ с ограничениями $bl\le Ax\le bu, xlb\le x\le xub$. Для решения системы уравнений (3)используем библиотеку imsl с вызовом *use imsl*.

call Ddlprs(m,nvar,a,Lda,b,b,c,irtipe,xlb,xub,obj,xsol,dsol) – вызов подпрограммы,

$m = 2$ - число ограничений, $nvar = 3$ - число переменных. $a$ - массив формы $(Lda, nvar)$ с матрицей системы уравнений (3) - $m*nvar, Lda \geq m, bl -$ вектор размера $m$, содержащий нижние границы ограничений общего вида; $bu -$ содержит верхние границы ограничений общего вида. $c -$ вектор размера $nvar$, содержащий коэффициенты целевой функции, $irtipe$ - вектор размера $m$, указывающий тип ограничений. $xlb$ *и* $xub -$ левые и правые ограничения значений переменных; $obj -$ значение целевой функции; $xsol -$ вектор решений размера $nvar$; $dsol -$ вектор решений двойственной задачи линейного программирования. В программе по циклу выводится 250 точек при различных значениях $C_{\text{var}} = 0 \div 2.5(\text{млн.р.}/\text{м}^2)$ *с шагом* $-0.01$, $a = /17.0,1.0,25.0,1.0,8.0,1.0/; irtype = /1,1/$, целевой вектор - $c = \backslash 1.0/14.0,1.0/30.0,1.0/16.0\backslash; xlb = /3*0.0/; xub = /3*\text{-}1e30/$ . Значение параметра $irtype = 0$ - соответствует ограничению типа равенства, если $irtype = 1$ (имеем ограничение типа $\leq 0$), если $irtype = 2$ (то ограничение вида $\geq 0$). В нашей задаче (3) второе и третье уравнения соответствуют вектору $irtype = /1,1/$ . Большая часть(3/4) написанной программы относится к записи массивов и к графике, решение ЗЛП - собственно 2 выделенные строки в программе. Строки $c = \text{-}c, obj = \text{-}obj, dsol = \text{-}dsol$ необходимы для сведения задачи ЗЛП в нормальной форме на *max* к подпрограмме *Ddlprs* на *min* [2] .Для графики используется приложение Compaq Array Viewer(Version 1.6.0) Решаем задачу для частного случая $x_0 = 1\text{м}$, затем воспользуемся леммой для получения произвольного решения.

```
program dlprsTest
use dfimsl
integer(8),parameter::m=2,nvar=3,n=2500,hn=10,Lda=m,mm=int(n/hn)+1
 integer(4)::irtype(m)
real(4)::a(Lda,nvar),b(m),c(nvar),dsol(m),obj,xlb(nvar),xsol(nvar),xub(nvar),mas(5,mm)
  real(4),allocatable::vrz(:,:)
!dec$attributes array_visualizer::vrz
data xlb/3*0.0/,xub/3*-1e30/,a / 17.0,1.0,25.0,1.0,8.0,1.0/,irtype/1,1/
 c(1)=1.0/14.0
c(2)=1.0/30.0
c(3)=1.0/16.0
 c=-c
do i=1,mm
b(1)=dfloat(i*hn)
 b(2)=100.0
mas(1,i)=b(1)
call dlprs(m,nvar,a,Lda,b,b,c,irtype,xlb,xub,obj,xsol,dsol)
obj=-obj;dsol=-dsol
mas(2,i)=obj
mas(3,i)=xsol(1)
mas(4,i)=xsol(2)
mas(5,i)=xsol(3)
print*,'objective=',obj
 print*,'primal solution',xsol
enddo
allocate(vrz(2,mm))
do i=1,mm
vrz(1,i)=mas(1,i)*1d-3
vrz(2,i)=mas(3,i)
end do
call vGraph(vrz,mm)
```

```
deallocate(vrz)
allocate(vrz(2,mm))
do i=1,mm
vrz(1,i)=mas(1,i)*1d-3
vrz(2,i)=mas(5,i)
end do
call vGraph(vrz,mm)
deallocate(vrz)
allocate(vrz(2,mm))
do i=1,mm
vrz(1,i)=mas(1,i)*1d-3
if(exp(-log(2.0)*mas(2,i))<=(1e-1))then
vrz(2,i)=(exp(-log(2.0)*(mas(2,i))))
else
vrz(1,i)=0
vrz(2,i)=0
endif
end do
call vGraph(vrz,mm)
deallocate(vrz)
end program dlprsTest
 subroutine vGraph(fun,nvalues) ! графический вывод 2-мерных изображений
use avdef
use avviewer
use dflib
integer(4)::nvalues
real(4)::fun(2,nvalues)
integer(4)::hv,status,nError
character(2)::key
character(av_max_label_len)::ylabel='x,sm'
character(av_max_label_len)::xlabel='C'
call faglStartWatch(fun,status)
print*,"Starting Array Viewer"
call favStartViewer(hv,status)
if (status/=0)then
call favGetErrorNo(hv,nError,status)
 if(nError/=0)then
 print*,"Array Viewer reports error",nError
stop
end if
end if
call favSetArray(hv,fun,status)
call favSetArrayName(hv,"Wind stream",status)
call favSetGraphType(hv,VectorGraph,status)
call favSetUseAxisLabel(hv,x_axis,1,status)
call favSetUseAxisLabel(hv,y_axis,2,status)
call favSetAxisLabel(hv,x_axis,xLabel,status)
call favSetAxisLabel(hv,y_axis,yLabel,status)
call favShowWindow(hv,av_true,status)
print*,"Press any key to close down the viewer"
key=getcharqq()
call favEndViewer(hv,status)
```

call faglEndWatch(fun,status)
end subroutine vGraph

**Анализ полученных результатов**

1) Численные решения, полученные программой для слоя кирпича (рис.1 и рис.4) и слоя бетона (рис.2 и рис.5) не содержат слоя древесины. Другими словами, древесина не может быть использована для защиты от гамма радиации (разве что только в качестве декоративного и утеплительного материала) $\bar{x}_2^{(3)}(\overline{C_{\text{var}}}) \equiv 0$, $\bar{x}_2^{(4)}(\overline{C'_{\text{var}}}) \equiv 0$. Для простоты на графиках $\overline{C_{\text{var}}}$ обозначается буквой C(верхние индексы (3) и(4) соответствуют исходному и решению полученному преобразованием подобия соответственно).

2) Все графики рис.1 – рис.6 соответствуют непрерывным и кусочно дифференцируемым функциям. После второго излома на всех графиках в точке $\left(C'_{\text{var}}\right)_{2point} = \left(mC_{\text{var}}\right)_{2point} = C_1 m$ все решения и коэффициент ослабления гамма радиации стабилизируются, и дальнейший рост денежных ресурсов не улучшают ослабления радиации $k$ (рис.3,рис.6). В данной постановке задач (3) и (4) существенно ограничение в виде неравенства $\left(C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3\right) \le C_{\text{var}}$, содержащие параметр $C_{\text{var}}$.

3) Пары графиков рис.1 и рис.4, а также рис.2 и рис.5 совпадают при совмещении координатных осей. Рис.1 и рис.2 получены программой с параметрами $C^0_{var} = max\{C_1, C_2, C_3\} = 2500(тыс.р./м^2), b(2) = x_0 = 1(м)$, а рис.4 и рис.5 получены программой с параметрами $mC^0_{var} = 1250(тыс.р./м^2), b(2) = mx_0 = 0.5(м)$. Другими словами, рис.4 и рис.5 можно получить однородным по двум осям растяжением соответственно рис.1 и рис.2 в $m = 1/2$ раз. Т.е. мы численно убедились в справедливости формулы (5)при $m = \frac{1}{2}$

$$\bar{x}_1^{(4)}(\overline{C'_{\text{var}}}) = \frac{1}{2}\bar{x}_1^{(3)}(\frac{1}{2}\overline{C_{\text{var}}}), \bar{x}_2^{(4)}(\overline{C'_{\text{var}}}) = \frac{1}{2}\bar{x}_2^{(3)}(\frac{1}{2}\overline{C_{\text{var}}}), \bar{x}_3^{(4)}(\overline{C'_{\text{var}}}) = \frac{1}{2}\bar{x}_3^{(3)}(\frac{1}{2}\overline{C_{\text{var}}})$$

И косвенно в справедливости доказанной леммы (верхние индексы (3) и (4) имеют исходное решение и преобразованное графически с масштабом $m$ соответственно).

4) Просмотр точек излома графика (коэффициента поглощения радиации $k$ - рис.3) с большим увеличением требует введения дополнительного условия:

$k\left(\overline{x^{(3)}{}_1\left(\overline{C_{\text{var}}}\right)}, \overline{x^{(3)}{}_2\left(\overline{C_{\text{var}}}\right)}, \overline{x^{(3)}{}_3\left(\overline{C_{\text{var}}}\right)}\right) = k\left(\overline{C_{\text{var}}}\right) \le 0.1$( $K^2\left(\overline{C'_{\text{var}}}\right) \le 0.1$), обозначим $\overline{C^{in}{}_{\text{var}}} : k\left(\overline{C^{in}{}_{\text{var}}}\right) = 0.1$. (7)

Согласно формуле (6)

$$k\left(\overline{x^{(3)}{}_1}, \overline{x^{(3)}{}_2}, \overline{x^{(3)}{}_3}\right) = \left(K\left(\overline{x^{(4)}{}_1}, \overline{x^{(4)}{}_2}, \overline{x^{(4)}{}_3}\right)\right)^{1/m}, k\left(\overline{x^{(3)}{}_1}, \overline{x^{(3)}{}_2}, \overline{x^{(3)}{}_3}\right) = K^2\left(\overline{x^{(4)}{}_1}, \overline{x^{(4)}{}_2}, \overline{x^{(4)}{}_3}\right).$$

Связь между графиками рис.3 и рис.6 найдём, используя формулу:

$$K^2\left(\overline{x^{(4)}{}_1\left(\overline{C'_{\text{var}}}\right)}, \overline{x^{(4)}{}_2\left(\overline{C'_{\text{var}}}\right)}, \overline{x^{(4)}{}_3\left(\overline{C'_{\text{var}}}\right)}\right) = K^2\left(\frac{\overline{x^{(3)}{}_1}}{2}, \frac{\overline{x^{(3)}{}_2}}{2}, \frac{\overline{x^{(3)}{}_3}}{2}\right) = k\left(\overline{x^{(3)}{}_1\left(C_{\text{var}}\right)}, \overline{x^{(3)}{}_2\left(C_{\text{var}}\right)}, \overline{x^{(3)}{}_3\left(C_{\text{var}}\right)}\right).$$

Последняя формула связывает график квадрата коэффициента ослабления $K^2$ рис.6(левая часть) преобразованного решения с графиком коэффициента ослабления $k$ рис3 (правая часть) исходного решения.

Поскольку:

$K^2\left(\frac{\overline{C^{in}}_{\mathrm{var}}}{2}\right)=0.1=k\left(\overline{\left(C^{'}\right)^{in}}_{\mathrm{var}}\right)$, Т.е. из крайней левой точки $\left(\overline{C^{in}}_{\mathrm{var}},0.1\right)$ рисунка 3 мы получаем крайнюю левую точку $\left(\frac{\overline{C^{in}}_{\mathrm{var}}}{2},0.1\right)$ рис.6 сжатием горизонтальной оси в $m$ раз. $\left(C^{'}\right)^{in}{}_{\mathrm{var}}=mC^{in}{}_{\mathrm{var}}$

5) Таким образом, нами указан **алгоритм графического решения** (формулы (5),(6),(7)) задачи максимального ослабления гамма – радиации с произвольной максимальной толщиной стены **по единственному численному решению** с максимальной толщиной стены жилого помещения 1м.

6) Утверждения леммы для задач (2), (3) остаются справедливыми для любого конечного числа переменных. Задача ЗЛП решается численно библиотекой imsl с любым числом переменных (числом слоёв многокомпонентной конструкции стены).

7) Задача имеет один важный инвариант. Как видно из рисунков, при условии, что $C_{var}\geq min\{C_1,C_2,C_3\}=C^{00}_{var}$ ($C^{'}_{var}=mC_{var}\geq m*min\{C_1,C_2,C_3\}=mC^{00}_{var}$),толщина стены равна максимальному значению $x_0$ ($mx_0$), т.е. сохраняется. Этот инвариант даёт дискретную поправку задачи (целочисленное программирование). Действительно, число кирпичей в слое может быть только целым. Пользуясь формулами (5), (6), (7), мы получаем непрерывное решение слоёв кирпича и бетона от стоимости 1 $м^2$ стены $\overline{x_1}\left(\overline{C_{\mathrm{var}}}\right),\overline{x_3}\left(\overline{C_{\mathrm{var}}}\right)$. Округлим число кирпичей до целого числа в меньшую сторону (знак [] – означает целую часть числа), $h$ - толщина 1 кирпича.

$n_1^{diskr}=\left[\overline{x_1}\left(\overline{C_{\mathrm{var}}}\right)/h\right]$ ,

$x_3^{diskr}=x_0-h\left[\overline{x_1}\left(\overline{C_{\mathrm{var}}}\right)/h\right].(x_1^{diskr}=h\left[\overline{mx_1}\left(\overline{C_{\mathrm{var}}}\right)/h\right],x_3^{diskr}=mx_0-h\left[\overline{mx_1}\left(\overline{C_{\mathrm{var}}}\right)/h\right])$

Учитывая большую стоимость кубометра кирпичей, чем бетона, мы заменяем дробную часть слоя одного кирпича, на такую же часть бетона, при этом стоимость слоя стенки может только уменьшится, неравенство $\left(C_1x_1+C_3x_3\right)\leq C_{\mathrm{var}}$ заменяется на неравенство $\left(C_1x_1^{diskr}+C_3x_3^{diskr}\right)\leq C_{\mathrm{var}}$, что не противоречит второму неравенству системы(4). Замена слоя кирпичей с избытком приведёт к неравенству $\left(C_1x_1^{diskr}+C_3x_3^{diskr}\right)>C_{\mathrm{var}}$, которое принципиально изменит постановку задачи (4), что недопустимо.

Метод подобия часто использовали академик Андрей Николаевич Колмогоров, профессоры МГУ Анастасия Алексеевна Сперанская, Елена Петровна Анисимова в работах по гидродинамики и теории турбулентности.

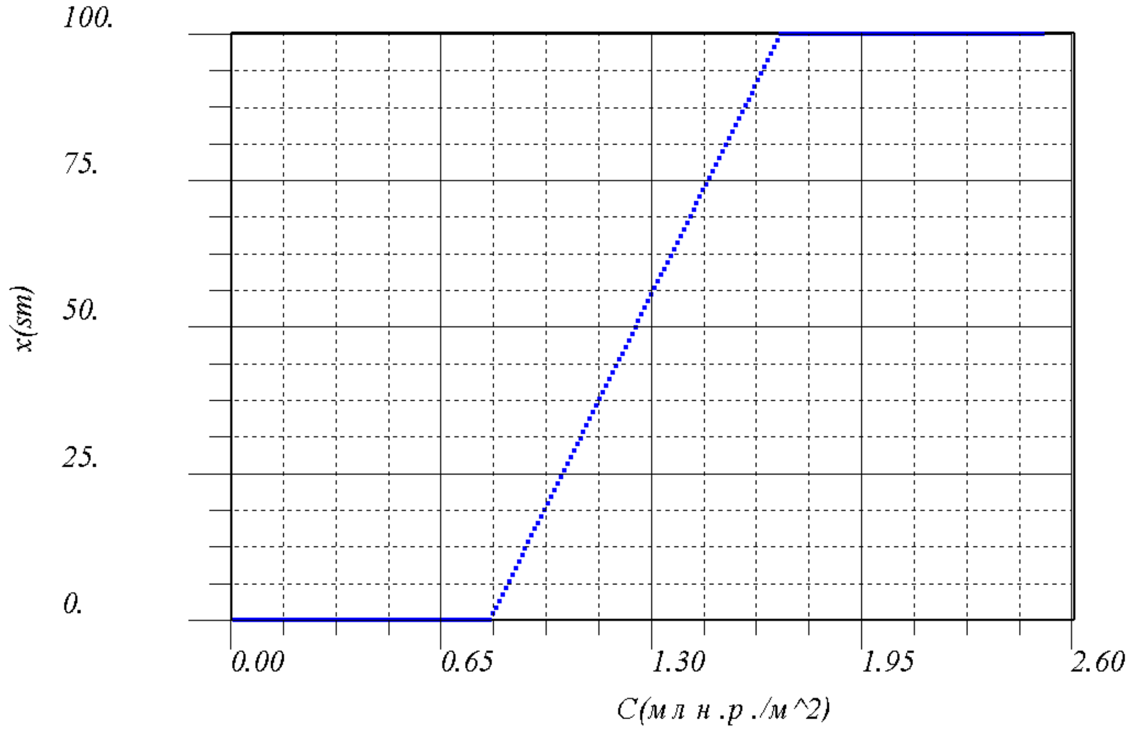



Рис.1 Зависимость толщины слоя кирпича $(m=1) \Leftrightarrow x_0 = 1м$ от стоимости 1 $м^2$ стенки $C(млн.р./м^2)$

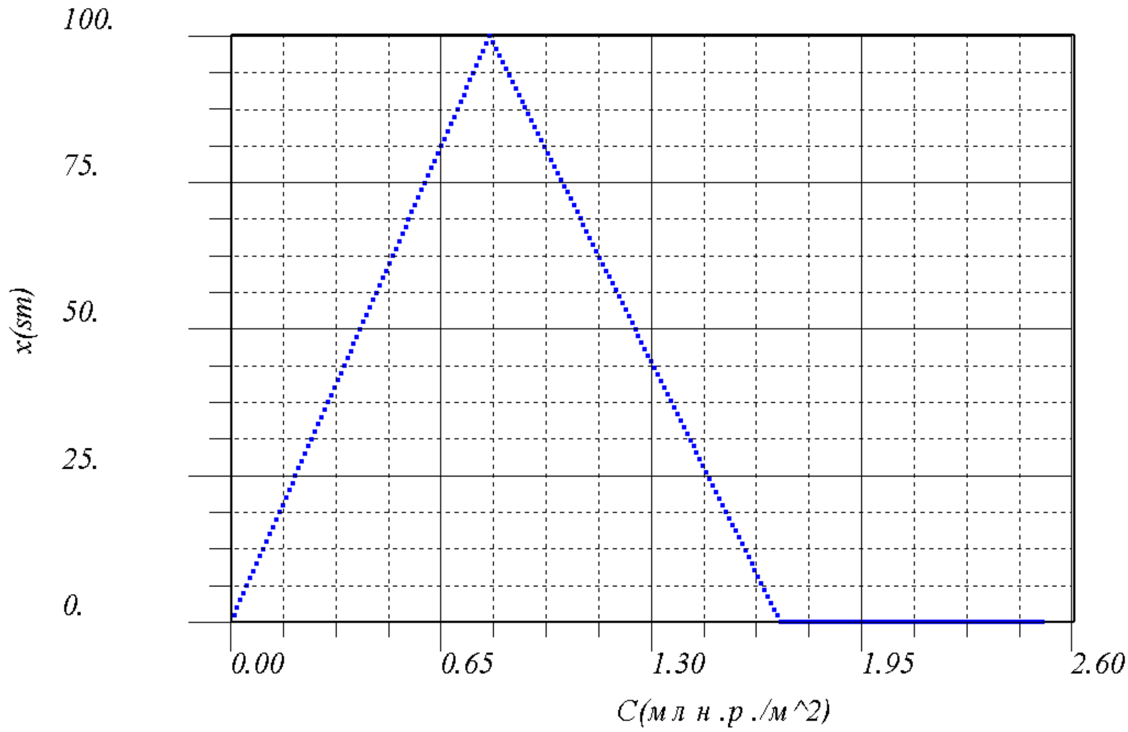



Рис.2.Зависимость толщины слоя бетона $(m=1) \Leftrightarrow x_0 = 1м$ от стоимости 1 $м^2$ стенки $C(млн.р./м^2)$

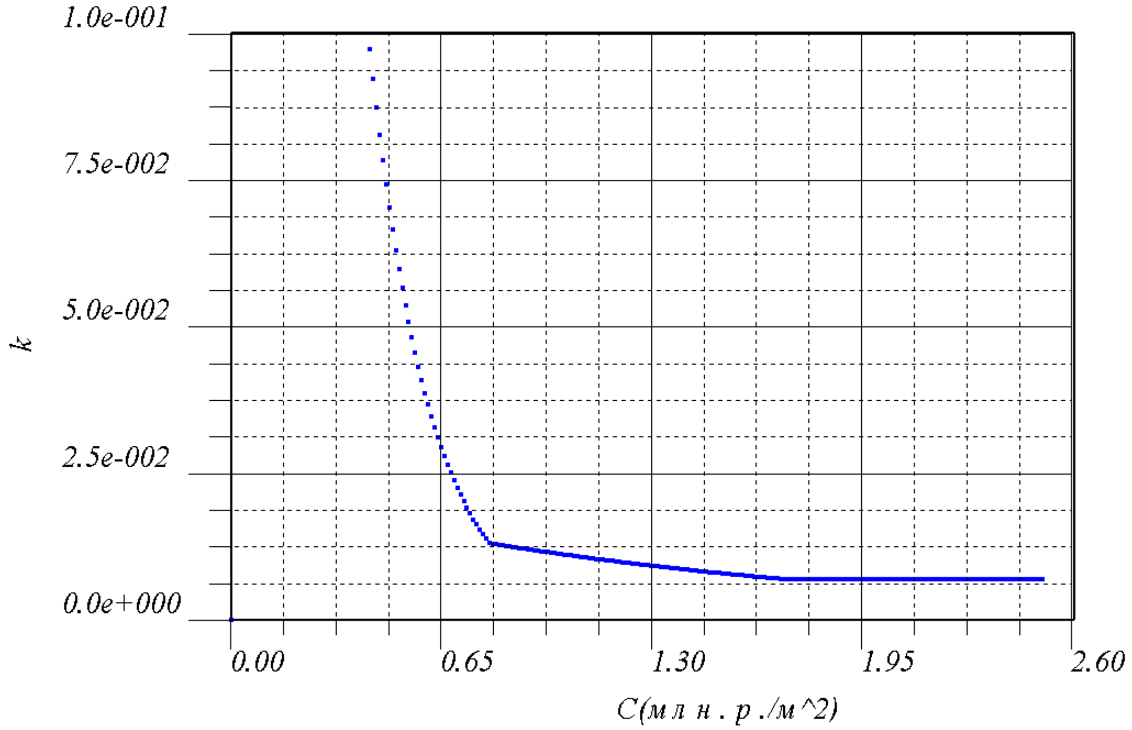



Рис.3 Зависимость коэффициента поглощения гамма – излучения $k \ (m=1) \Leftrightarrow x_0 = 1м$ от стоимости 1 $м^2$ стенки $C(млн.р./м^2)$ с ограничением $k \le 0.1$.

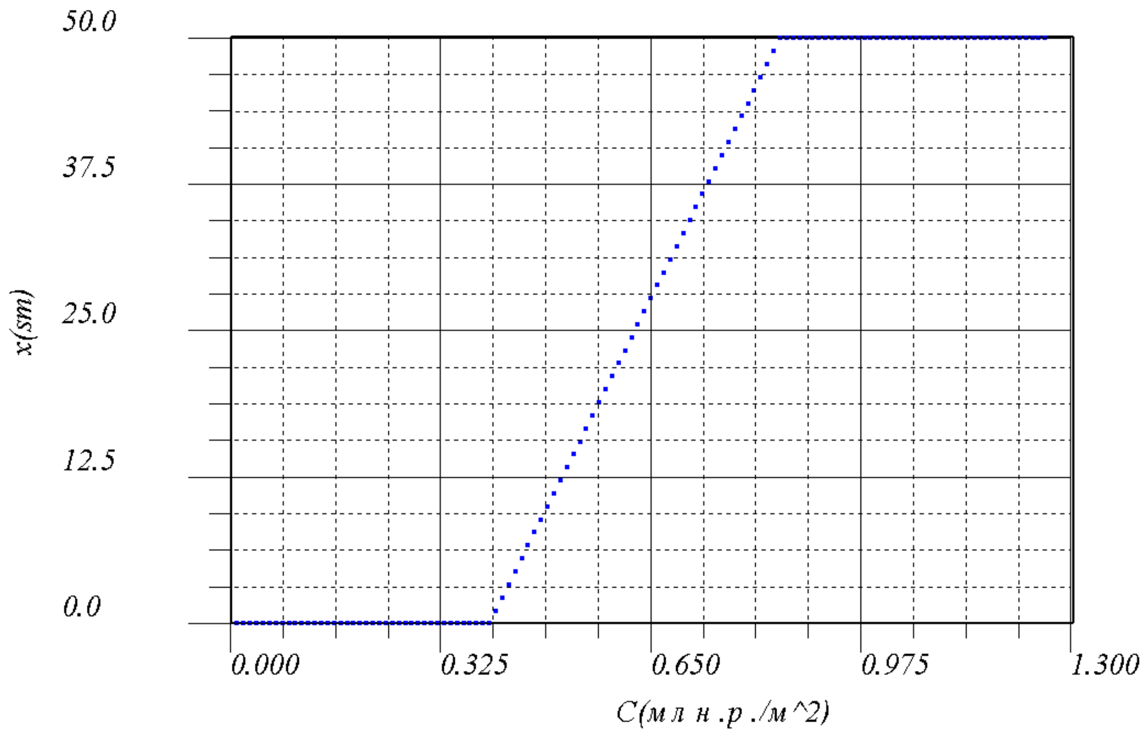



Рис.4.Зависимость толщины слоя кирпича $\left(m=\frac{1}{2}\right)$ от стоимости 1 $м^2$ стенки $C(млн.р./м^2)$

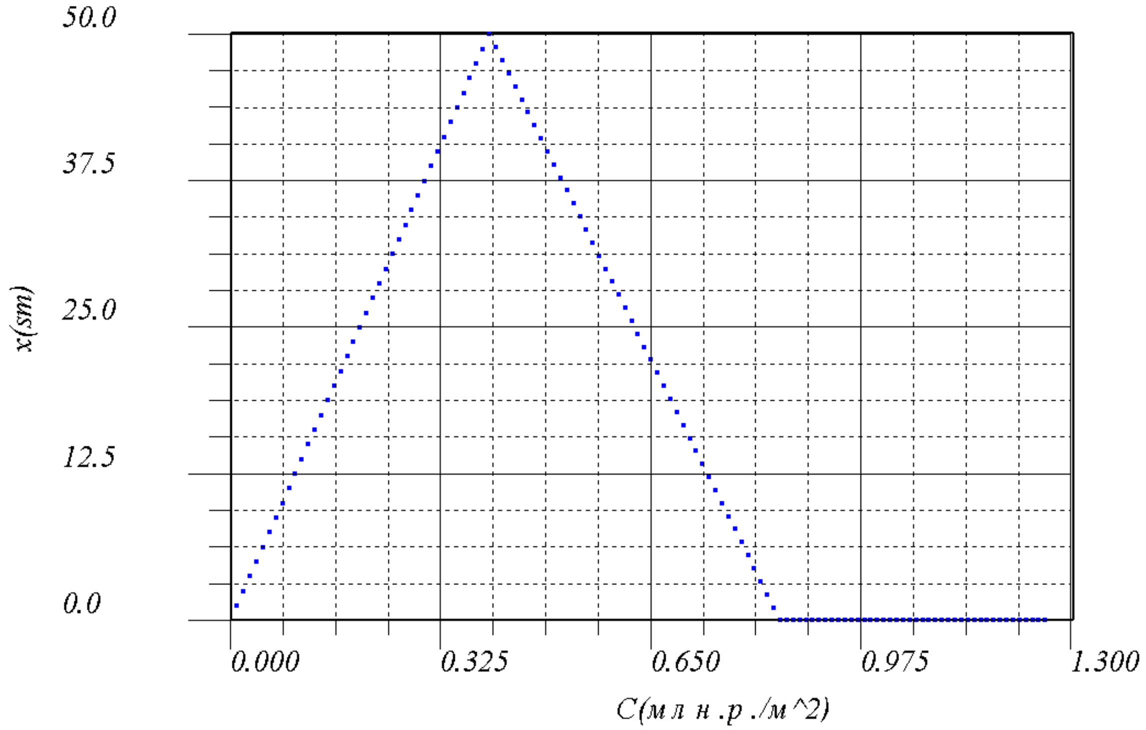



Рис.5 Зависимость толщины слоя бетона $\left(m = \frac{1}{2}\right)$ от стоимости 1 $м^2$ стенки $C(млн.р./м^2)$

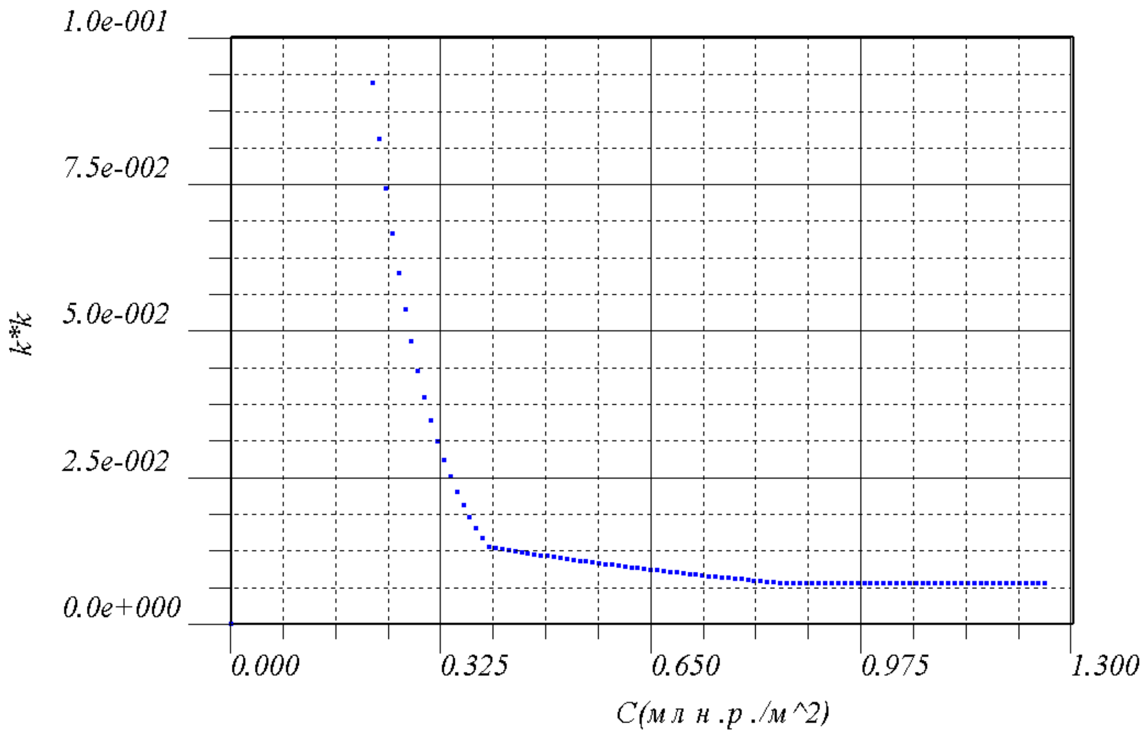



Рис.6 Зависимость квадрата поглощения гамма излучения $k^2$ $\left(m = \frac{1}{2}\right)$ от стоимости 1 $м^2$ стенки $C(млн.р./м^2)$ с ограничением $k^2 \le 0.1$.

8) Рассмотрим пример. Пусть к стене здания предъявлены ограничения – максимальная толщина $X_0 = 0.5м$ при максимальной допустимой стоимости $C_{\text{var}}' = 0.65(млн.р./м^2)$. Вычисляем масштабный коэффициент $m = X_0 / x_0 = 0.5/1 = 0.5$. Для максимальной толщины 1м допустимая стоимость составит $C_{\text{var}} = C_{\text{var}}' / m = 0.65/0.5 = 1.3(млн.р./м^2)$. По рис.1 и рис.2 находим толщины слоёв кирпича и бетона соответственно $x_1 = 50 + 25/4 = 56.25см, x_3 = 50 - 25/4 = 43.75см$. Тогда толщины слоёв кирпича и бетона для $X_0 = 0.5м$ будут $y_1 = mx_1 = 28.125см, y_3 = mx_3 = 21.875см$. С учётом поправки на целое число единиц кирпича (берём с недостатком, т.к. $C_1 = 1.7млн\,р/м^2 > C_3 = 0.8млн\,р/м^2$), например, 5 кирпичей толщиной 5см(25<28.125см). Тогда $y_1 = 25см, y_3 = X_0 - y_1 = 50 - 25 = 25см$. Получим, что остаточная стоимость $\Delta C = C_{\text{var}}' - y_1 C_1 - y_3 C_3 = 0.65 - 0.25(1.7 + 0.8) = 0.025млнр/м^2 > 0$. Что согласуется со вторым неравенством системы(4). Коэффициент ослабления для рис.3 для $C_{\text{var}}$ $k = (3/8) * 0.025 = 0.009375$. Тогда по формуле (6) $K = k^m = 0.009375^{0.5} = 0.0968$. Из-за поправки слоёв на целочисленность сохранилась 1 значащая цифра(25 и 28.125см). Поэтому округляем значение ослабления до 1 верного знака $K \approx 0.1$. Полученная оптимальная конструкция стены ослабит радиацию в 10 раз.

Выводы

1) Решена задача максимального ослабления проникающего излучения многослойной стены жилого помещения (укрытия).
2) Задача линейного программирования в нормальной форме решена симплекс – методом.
3) Доказана лемма о подобии решения ЗЛП. Утверждения леммы проверены численно программой.
4) На основе леммы предложен графический алгоритм нахождения решения с произвольной толщиной стены по решению с максимальной толщиной стены 1м (в том числе с дополнительными условиями).
5) Сделана поправка на случай целочисленного программирования.
6) Задача учёта влияния радиации через оконный блок имеет смысл с оптимальной конструкцией стены, если её толщина не меньше 1м.

**Литература**

1) Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. – Изд. – во Моск. Ун – та, 1989. – 204с.: ил.

2)Бартеньев О.В. “Математическая библиотека IMSL”.:(Ч3). – М.:Диалог МИФИ,2001. – 368 с.

3)Сивухин Д.В.”Атомная и ядерная физика”. В 2 – х ч. Ч.2. Ядерная физика. – Наука. Гл. ред. Физ. – мат. лит. 1989. – 416с. – (Общий курс физики. Т.5)

4) Ковчур С.Г. и др. “Радиационная безопасность”. – Витебск: УО ”ВГТУ”,2006.-175 с.

## Приложение 2

### Программная среда ANSYS

ANSYS Workbench – является одной из основных оболочек программного инженерного комплекса ANSYS. Инструментарий выбора задач Toolbox оболочки Workbench решает следующие задачи:

1) Статический анализ на прочность твердотельных конструкций Static Structural
2) Динамический анализ на прочность твердотельных конструкций Transient Structural
3) Steady State Thermal для решения стационарных задач распределения поля температуры
4) Transient Thermal для решения динамических задач распределения поля температуры
5) Fluid Flow (Fluent) решатель произвольных гидродинамических задач
6) Electric решатель электродинамических задач. И т.д.

Мы рассмотрим два примера в решателе Static Structural для статического анализа прочности горизонтально нагруженной балки и Fluid Flow (Fluent) для определения гидродинамических и технических параметров потока жидкости.

Кроме инструментария Toolbox интерфейс оболочки ANSYS Workbench содержит линейку меню(file, view, tools, units, extensions, help), основное поле проекта Project Schematic, messages – поле сообщений, Properties of Project Schematic – свойства поля проекта.

Введём сокращения - ЛКМ, ПКМ – нажатие левой и правой клавиши мыши соответственно. Технические требования: оперативная система, например, Windows 2007, 2 – х ядерный процессор по 3 ГГц, оперативная память 2 Гб.

После открытия оболочки ANSYS Workbench можно создать проект. Файл проекта ANSYS Workbench имеет расширение (*.wbpj). File(ЛКМ)→ *Save as*(ЛКМ). Имя файла – balka, тип файла *.wbpj, сохранить (ЛКМ), например, на диск D(рис.1). После чего название проекта balka - Workbench появляется над линейкой меню.

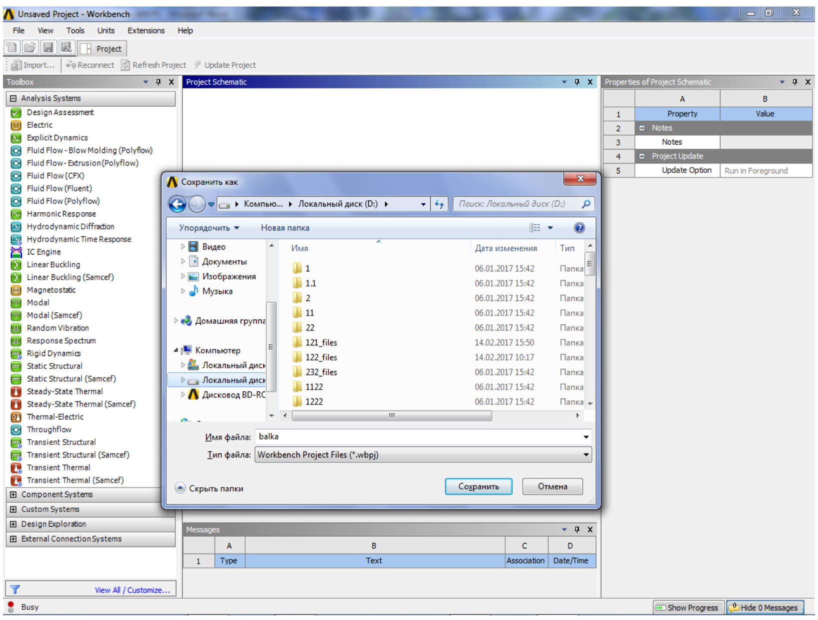
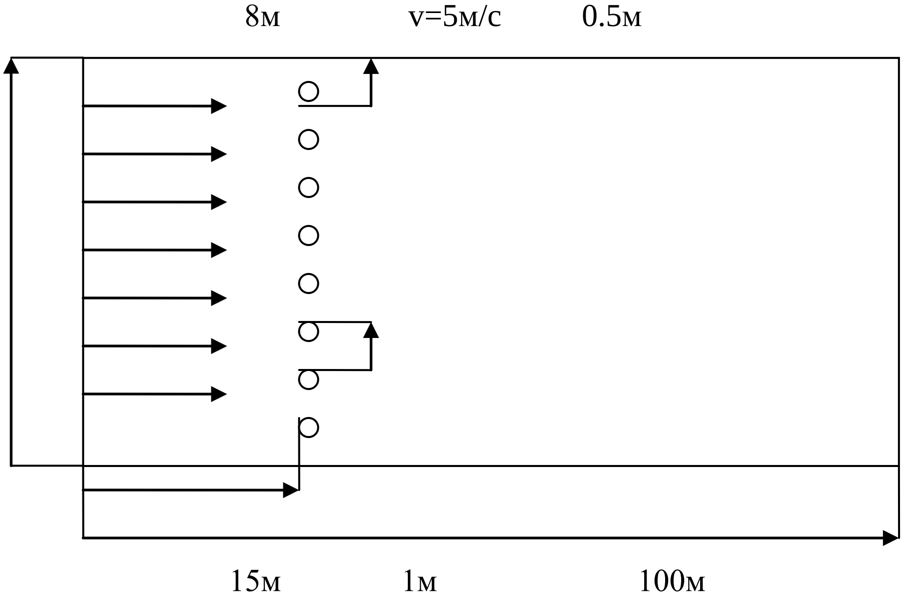



Рис.1

## Лабораторная работа 10. Определение спектра турбулентной кинетической энергии горизонтального развитого потока жидкости за периодической структурой

### Постановка задачи

Двумерный поток жидкости движется между двумя параллельными бесконечно широкими горизонтальными плоскостями длиной 100м. Расстояние между плоскостями 8м. Входная скорость потока 5м/с при атмосферном давлении и температурой 20 С. На выходе системы задано избыточное давление 1 атмосфера. Поток воды встречает преграду из 8 горизонтальных длинных стержней, расположенных поперёк потока. Диаметр стержней 40см, расстояние между ними 1 м. Определить поле распределения скорости жидких частиц в потоке и поле распределения кинетической турбулентной энергии.




**1.Открываем оболочку ANSYS WORKBENCH** и сохраняем будущий проект под именем Fluent. Toolbox→(ЛКМ)Fluid Flow(Fluent) → с нажатой(ЛКМ) перетаскиваем в свободный зелёный прямоугольник на поле Project Schematic, пока цвет прямоугольника не изменится на красный, отпускаем(ЛКМ). Попутно для проекта A Fluid Flow(Fluent) устанавливаем имя Fluent (Рис.1). В окне свойств Properties of Schematic в строке с номером 22 Analysis Type указываем размерность потока 2D(Рис.1).

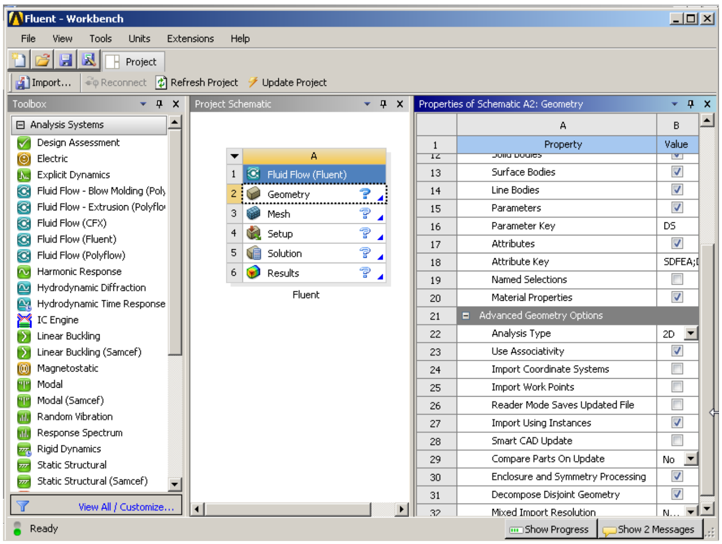



Рис.1

**2. Создание геометрии потока. Шаг 1.** Запускаем систему 3 мерного моделирования Design Modeler(Рис.2). **Шаг 2.** В открывшемся интерфейсе DM выбираем единицу измерения. (ЛКМ)Units→Meter (ЛКМ) Рис.3

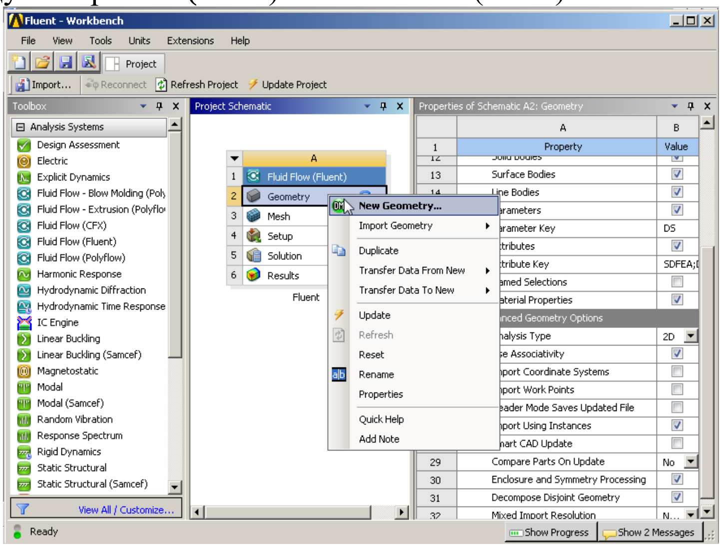



Рис.2

Design Modeler сокращённо DM имеет основные части сверху вниз: верхняя линейка меню, панель инструментов, дерево проекта (Tree Outline), окно детализации(Details View), справа расположен графический визуализатор проекта Model View(Рис.3).

**Шаг 3**. Создаём эскиз модели. Необходимо выбрать плоскость XY, Tree Outline→XY Plain(ЛКМ), развернуть рабочую плоскость к пользователю с помощью знака на пенели инструментов  (ЛКМ). Открываем Редактор рисования Sketching(ЛКМ). Создаём рисунок, соответствующий условию задачи.

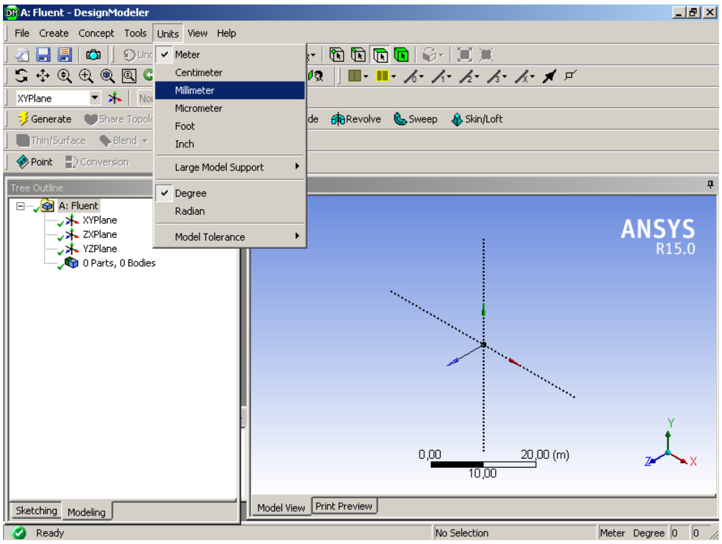



Рис.3

**Шаг 4**. Выбираем прямоугольник (ЛКМ)Draw→Rectangle(ЛКМ). Рисуем в поле симметричный прямоугольник относительно начала координат по рисунку к задаче.

(ЛКМ) Dimensions→Vertical на рисунке (ЛКМ) выделяем ось OX и верхнюю плоскость (ЛКМ) →образуется стрелка с карандашом (Рис.4) →(ЛКМ) →размерной стрелке присваивается наименование V1 и зелёный цвет (Рис.5).

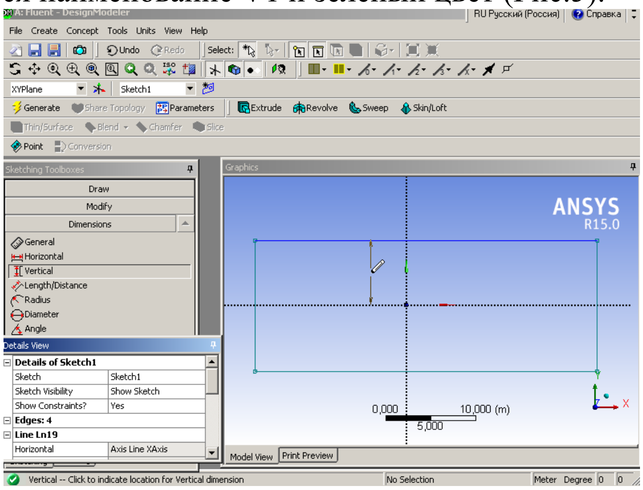



Рис.4

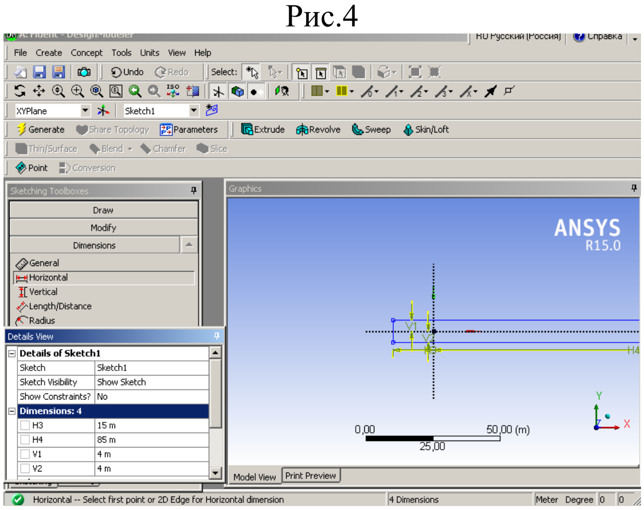



Рис.5

Переходим к окну детализации Details View→V1 = 4m. Аналогично выставляем V2 = 4m,H3=85m, H4=15m.

**Шаг 5**. Рисуем 8 цилиндров на оси OY с Y координатами центров 0.5m;1.5m; 2.5m; 3.5m симметрично выше и ниже горизонтальной оси и радиусом 0.1m. Выбираем X координаты центров окружностей H=5m(так как их необходимо задать ненулевыми), одновременно смещаем положение плоскостей относительно координатной системы H3=80m, H4=20m

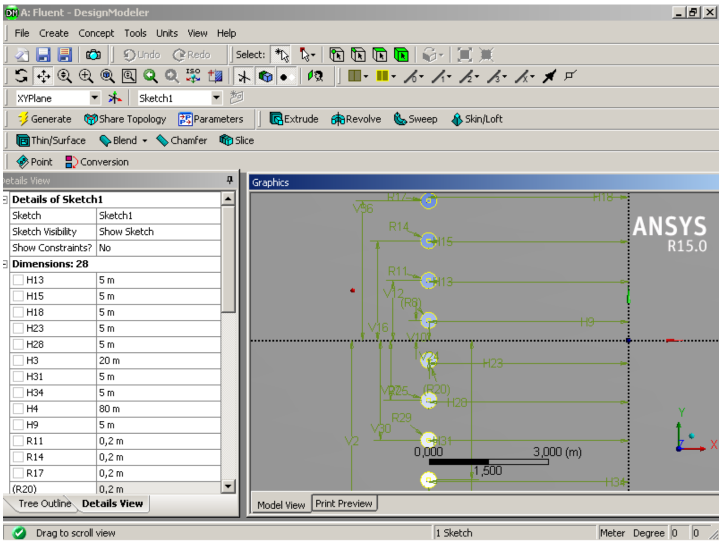



Рис.6

**Шаг 6.** Создаём поверхность на основании созданного эскиза. В линейке меню Concept выбрать создание поверхности по эскизу (ЛКМ). Переходим в окно Modeling, выбираем

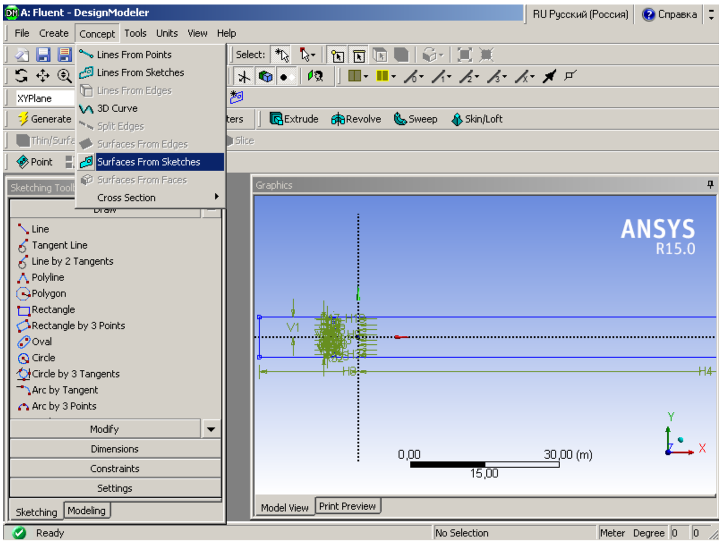



Рис.7

Tree Outline→Surfacek1. Выделяем контуры всех объектов на чертеже 4 линии прямоугольника и 8 окружностей(всё время удерживая нажатой Ctrl при добавлении новой детали контура). Переходим в окно детализации, выбираем напротив Base Object→ Apply(ЛКМ). В результате текущее состояние окон Tree Outline, детализации и Model View как на Рис.8.

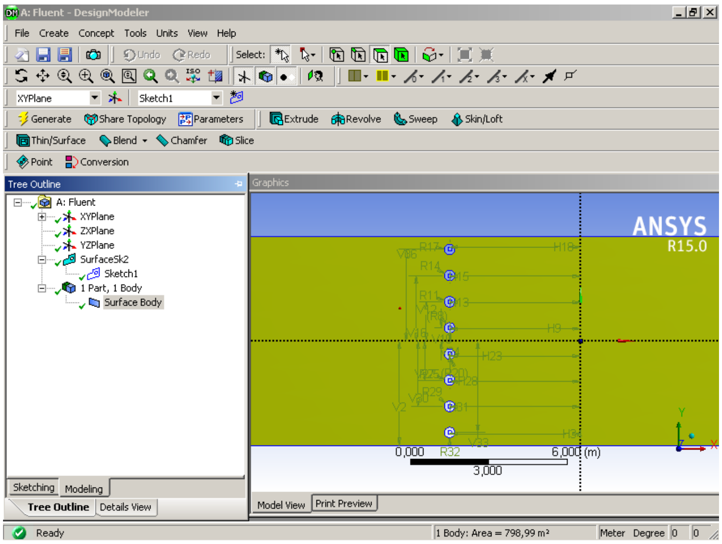



Рис.8

**Шаг 7**. После окончания построения модели можно закрыть design Modeler и вернуться в Workbench. При этом строка DM Geometry активизирована зелёным ок, а Mesh готов к началу работы – 2 зелёные стрелки (Рис.9). Чтобы открыть сеткогенератор, достаточно дважды кликнуть (ЛКМ)Mesh. При этом созданная нами ранее геометрическая модель автоматически загружается в сеткогенератор.

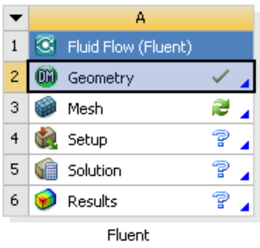



Рис.9

**3. Создание сетки. Шаг 1.** Необходимо границы модели, на которые будут наложены различные граничные условия. На панели инструментов выбирая фильтр  для выделения линий. В окне Geometry выделяем левую границу области (Рис.10).

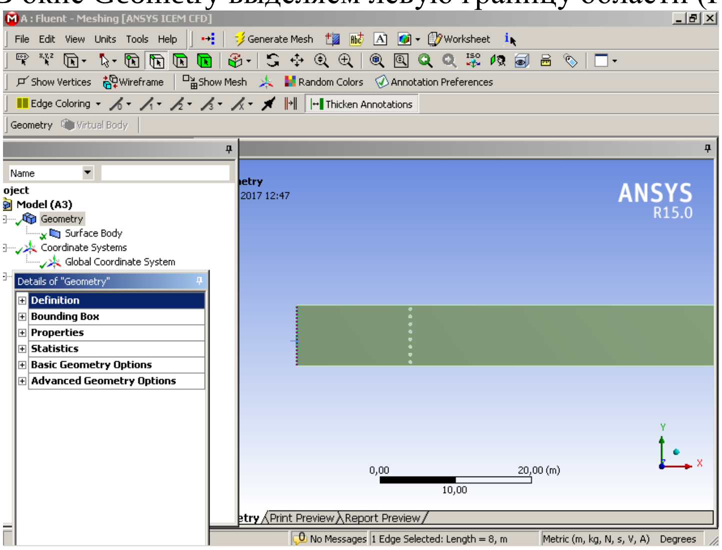



Рис.10

После нажатия (ЛКМ) граница становится зелёной. Далее необходимо нажать (ПКМ), в контекстном меню выбрать пункт Create Named Selection(ЛКМ) Рис.11.

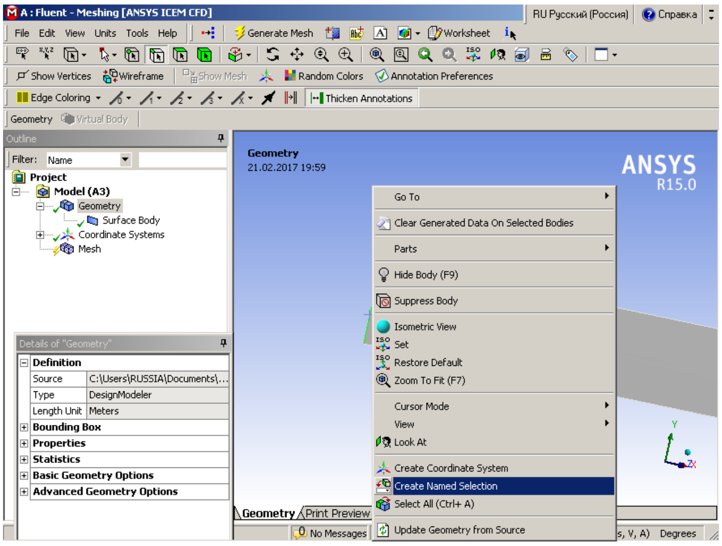



Рис.11

Ввести название границы – вход(Inlet). Название не должно содержать пробелов, может содержать латинские буквы, цифры и должно начинаться с буквы (Рис.12).Нажать ок.

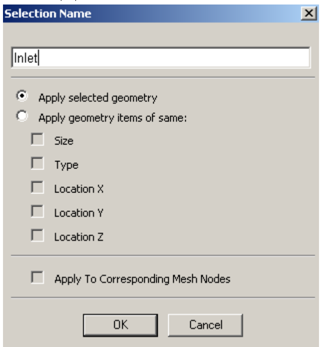



Рис.12

После чего наименование входной границы завершено. В Outlet →Named Selected→Inlet отмечено зелёным знаком ок, при выделении Inlet в окне геометрии(Geometry) стрелкой указана граница и её название.

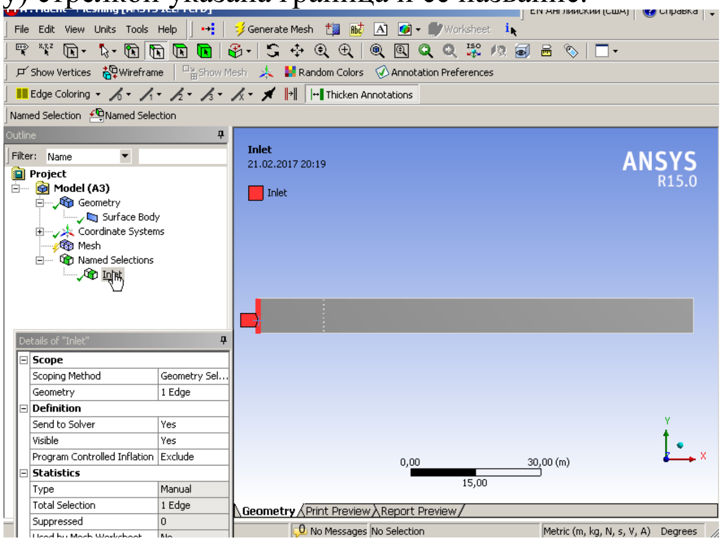



Рис.13

**Шаг 2.** Аналогичным образом создаём выходную границу Outlet(Рис.14). Создаём плоскость Symmetry – нижняя и верхняя стороны прямоугольника (Рис.15).

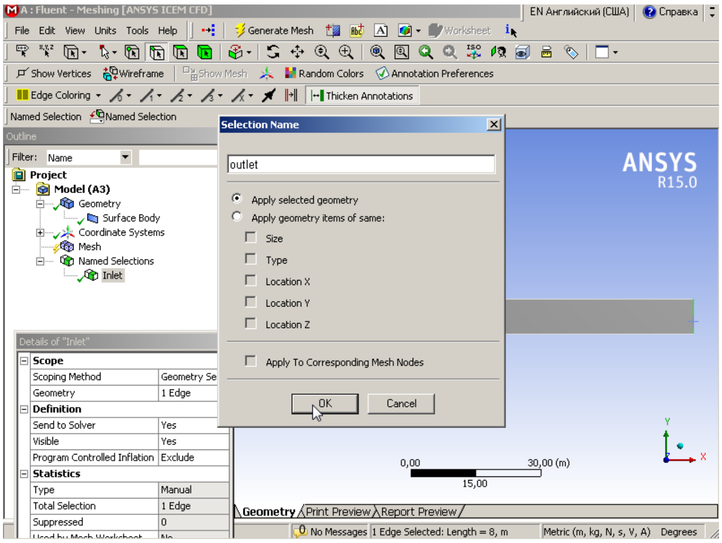



Рис.14

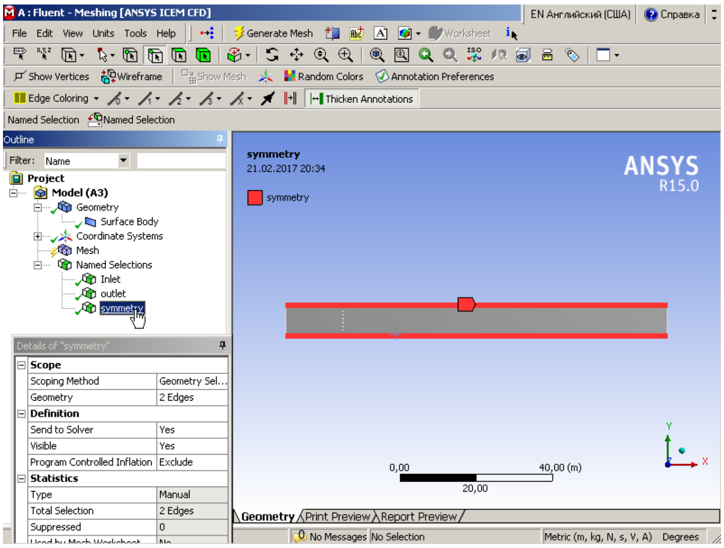



Рис.15

**Шаг 3.** После задания границ необходимо задать параметры сетки и построить её. Для этого выбираем в дереве проекта пункт Mesh. В окне детализации устанавливаем значение Relevance Center – Fine(качественная сетка). Smoothing – High (высокое сглаживание). Span Angle Center – Fine. Advanced →Element Mid Side Nodes – Program Controlled. Остальные настройки элементов сетки оставим по умолчанию.

**Шаг 4.** Вблизи стержней параметры сетки должны быть особенно подробны. В дереве сеткогенератора выбираем пункт Mesh(ПКМ)→Insert→Sizing(Рис.16). В поле Geometry фильтром  выбираем 8 линий окружностей, верхнюю и нижнюю плоскости гидродинамической трубы. В окне детализации для Sizing выбираем параметры Element Size – 0,01m. Growth Rate 1,05 – множитель роста ячеек. Scope→ Scoping Method(Geometry Selection), Geometry(Apply(ЛКМ)) Рис.17.

**Шаг 5.** Генерируем сетку.Outline→Mesh(ПКМ) →Generate Mesh. В результате сеткогенератор создаёт сетку наиболее подробную у бесконечных стержней, создающих набегающему потоку периодическую структуру препятствий (Рис.18).

После этого сеткогенератор можно закрыть и вернуться в WORKBENCH. Сохранение сетки произойдёт при этом автоматически. В окне WORKBENCH можно дополнительно сохранить проект. При этом в 4 строке Setup появится знак зелёных стрелок – указание на готовность к решению задачи.

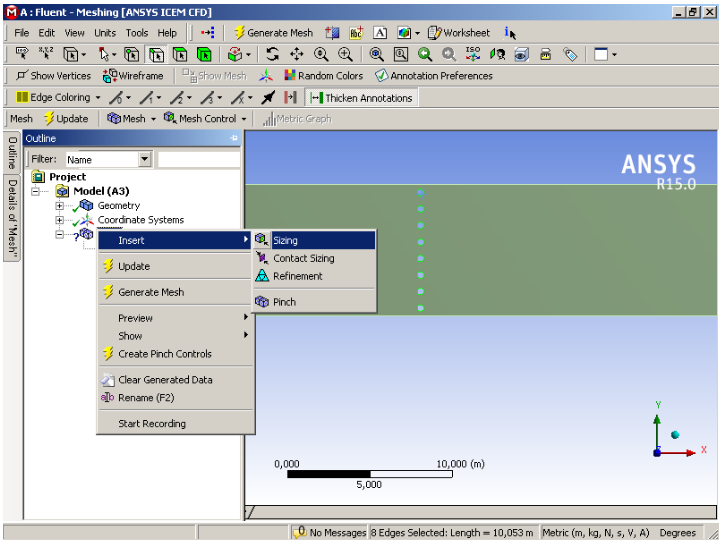



Рис.16

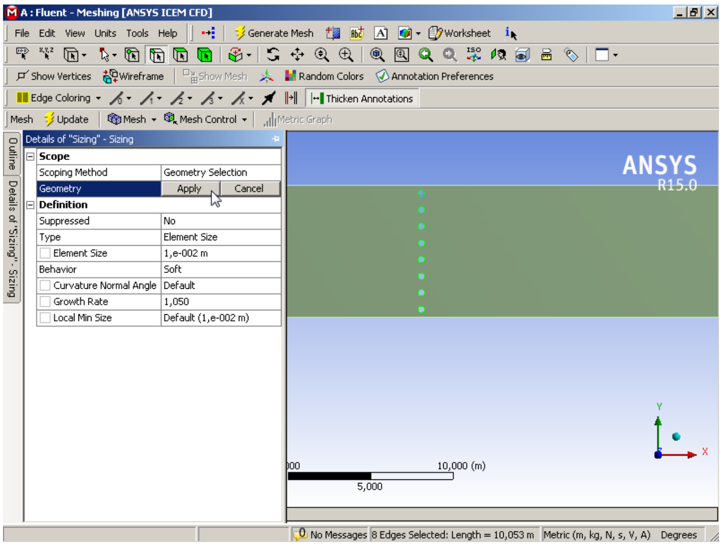



Рис.17

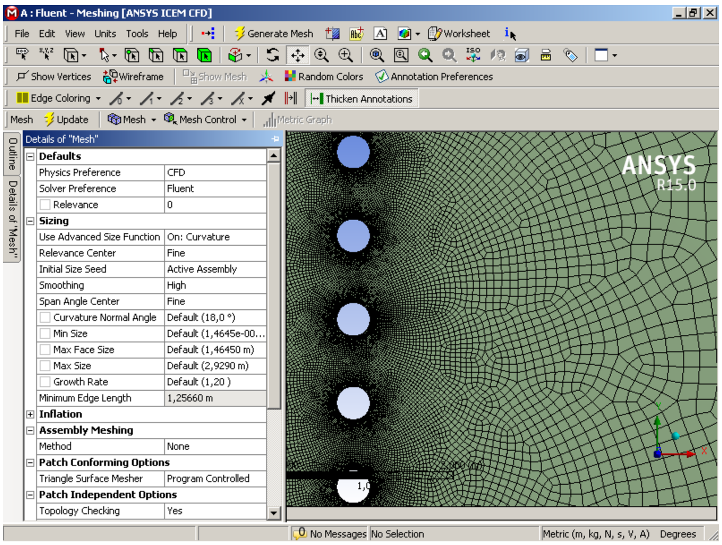



Рис.18

**4. Постановка расчётной модели и её решение. Шаг 1.** В Workbench дважды нажать (ЛКМ) по строке Setup. Загружается программа Fluent. Вычисления проводим с двойной точностью Double Precision. Все остальные параметры настройки нужно оставить по умолчанию и нажать ок для запуска Fluent(Рис.19).

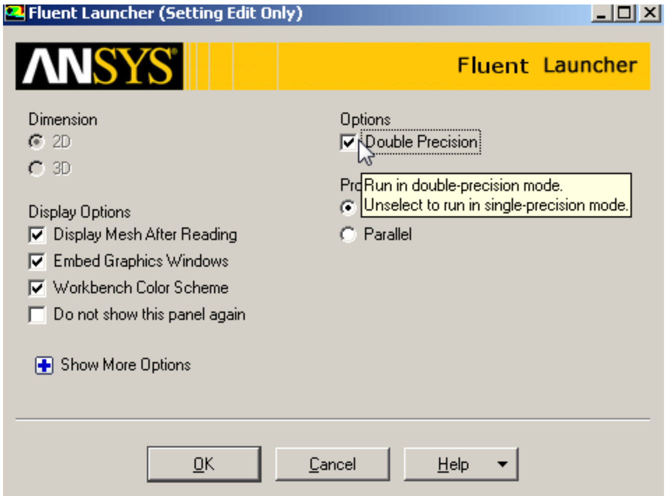



Рис.19

В окне Fluent мы видим загруженную сетку проекта, окна текстовых сообщений о выполнении заданных команд, дерева проекта и панели инструментов. На панели General(общее) собраны инструменты для начальной настройки задачи(Рис.20).

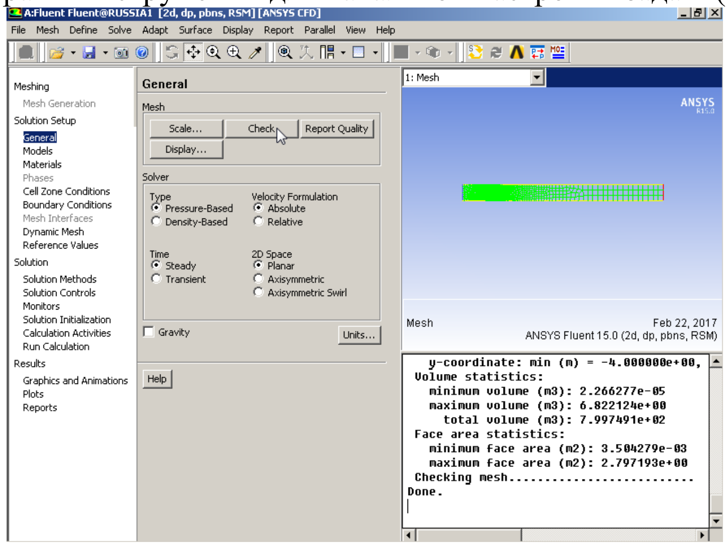



Рис.20

**Шаг 1.** Проверка качества построенной сетки. Нажать на панели General кнопку Check. Проверка определяет габариты сетки, минимальные и максимальные объемы ячеек и площадей их граней. Если в сетке есть ошибки, то выводятся соответствующие сообщения с причиной ошибки. Если ошибок нет, сообщение выглядит как на Рис.21.

```
 Domain Extents:
   x-coordinate: min (m) = -2.000000e+01,
   y-coordinate: min (m) = -4.000000e+00,
 Volume statistics:
   minimum volume (m3): 2.266277e-05
   maximum volume (m3): 6.822124e+00
     total volume (m3): 7.997491e+02
 Face area statistics:
   minimum face area (m2): 3.504279e-03
   maximum face area (m2): 2.797193e+00
 Checking mesh.........................
Done.
```

Рис. 21

**Шаг 2.** Выбор системы уравнений для задачи. Переходим во вкладку Models(ЛКМ)→ Viscous-Laminar (ЛКМ – 2 раза) →Reynolds Stress (5 eqn) система гидродинамических уравнений Рейнольдса. Остальные параметры не изменяем. Нажать ок(Рис.22).

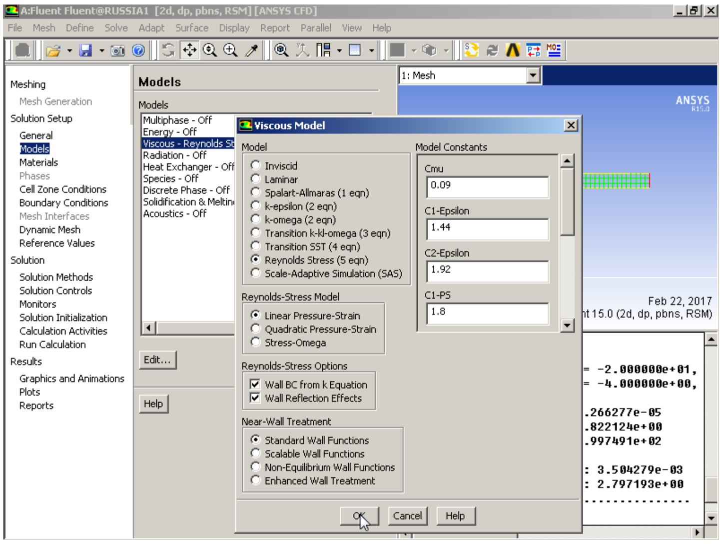



Рис.22

**Шаг 3.** Добавляем в проект новое рабочее тело. Вкладка Materials нажать кнопку Create/Edit→Fluent Data Base→Water -Liquid→Copy(Рис.23) →Close→Close

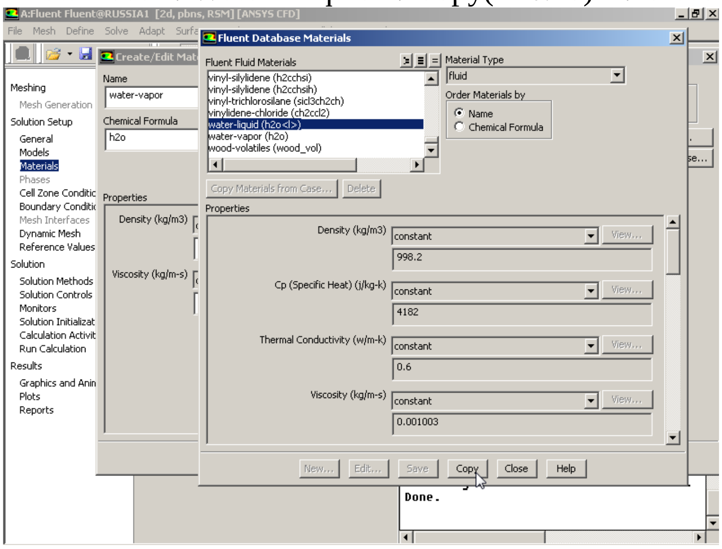



Рис.23

После чего во вкладке Materials в разделе жидкости(Fluid) появилось новое вещество Water – Liquid.

**Шаг 3.** Необходимо указать новое рабочее тело для расчётной модели. Переходим во Вкладку Cell Zone Conditions→Edit→Material Name(Water – Liquid) →OK(Рис.24).

**Шаг 4.** Настройка граничных условий. Переходим во вкладку Boundary Condition (граничные условия). В поле Boundary Condition отображаются имена всех границ в задаче. Выбираем Inlet→Type(Velocity – Inlet) →Edit. В окне Velocity – Inlet выставляем величину скорости потока 5м/с, турбулентная интенсивность(Turbulent Intensity - 5%), Specification Method –Intensity and Hydraulic Diameter. . Turbulent Viscosity Rate -10. Нажать OK(Рис.25).

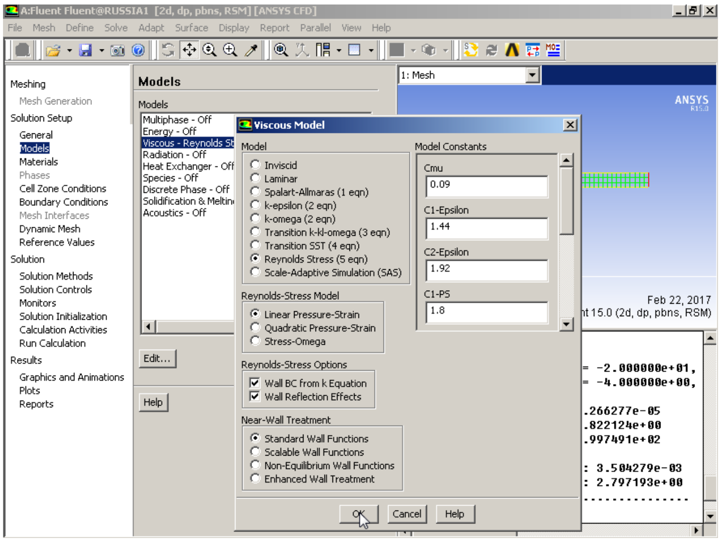


Рис.24

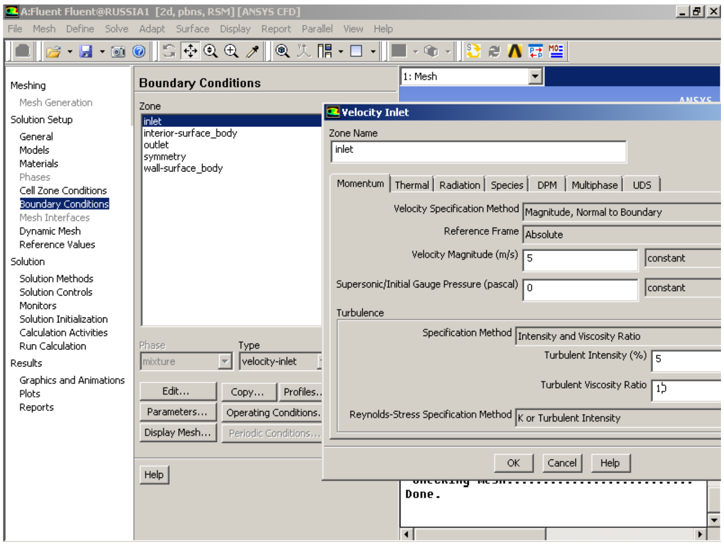


Рис.25

Аналогично настроить граничное условие выхода Outlet.
Type$\rightarrow$pressure – outlet (выход с заданием давления)
Momentum
Gauge Pressure (статическое избыточное давление) $\rightarrow$100000
Любое значение давления во Fluent задаётся от уровня опорного(Operation Pressure), которое по умолчанию равно 1 атм. (Рис.26). Турбулентная интенсивность(Turbulent Intensity - 5%), Specification Method – Intensity and Hydraulic Diameter. Turbulent Viscosity Rate -10. Нажать ОК.

**Шаг 5.** Необходимо для границы Symmetry применить соответствующий тип граничных условий. Boundary Condition$\rightarrow$ Symmetry, Type$\rightarrow$ Symmetry (Рис.27). Нажать ОК.
**Шаг 6.** Переход к настройке ссылочных параметров осуществляется нажатием кнопки Operation Condition. В открывшемся окне нужно ввести нулевое ссылочное давление (Рис.28).
**Шаг 7.** Выполнение инициализации расчётной модели (аналог задания начальной итерации при численном решении задачи методом сжатых отображений). Переходим во вкладку Solution Initialization . Выбираем метод стандартной инициализации – Standard Initialization, в поле Compute from выбирается входная граница области (т.е. решение осуществляется по потоку). На панели нажимаем кнопку Initialize(Рис.29).

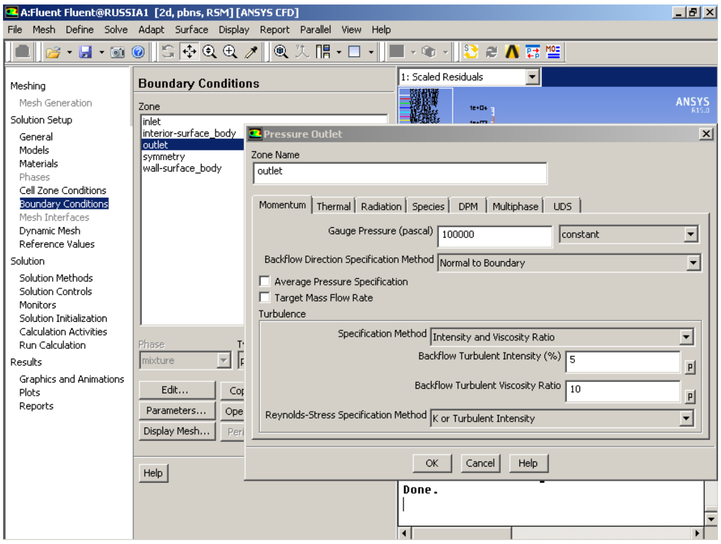



Рис.26

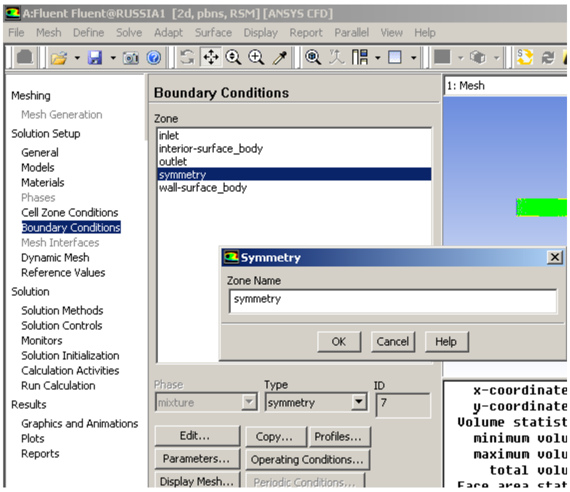



Рис.27

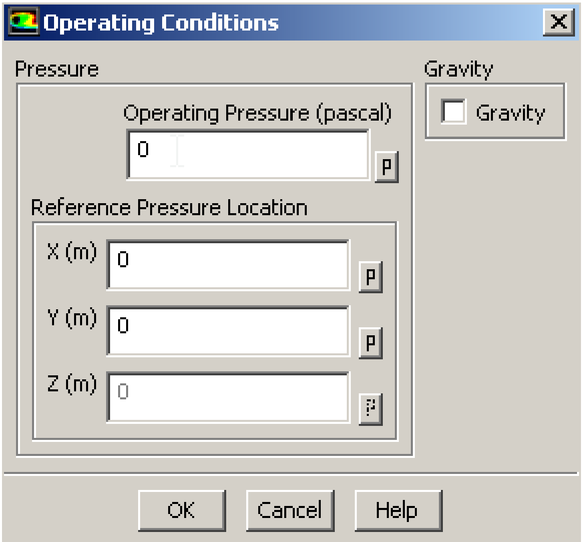



Рис.28

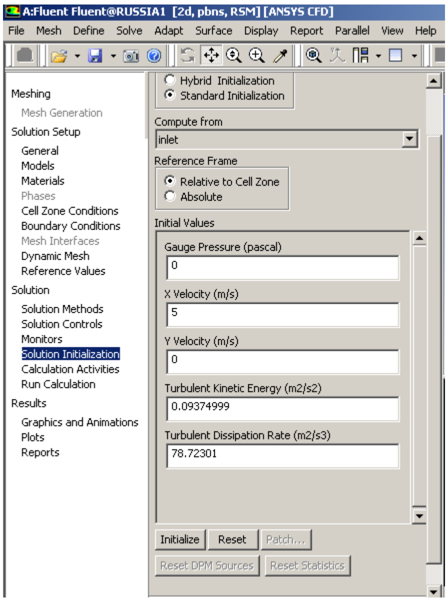



Рис.29

При этом во всей расчётной области начальные параметры в ячейках равны параметрам на входе системы.

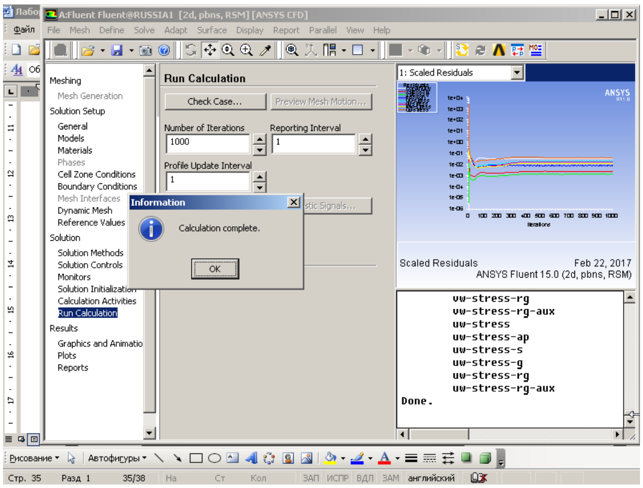



Рис.30

**Шаг 8.** Начинаем инициализацию решения. Переходим во вкладку Run Calculation, Выбираем число итераций Number of Iterations 1000 и нажимаем кнопку Calculation(вычислять)(Рис.30). На графиках указаны текущие невязки основных параметров расчёта (Residuals), количество итераций может быть меньше задаваемого в таблице, если невязки расчётов не превышают значения (по умолчанию) 0,001. Такое решение считается сошедшемся при появлении надписи в окне сообщений (Solution is converged). В конце необходимо нажать ок.

**Шаг 9.** Просмотр результатов расчёта. Переходим во вкладку Graphics and Animations (графика и анимация)→Contours(2 ЛКМ) →Options – Field(поставить галочку).

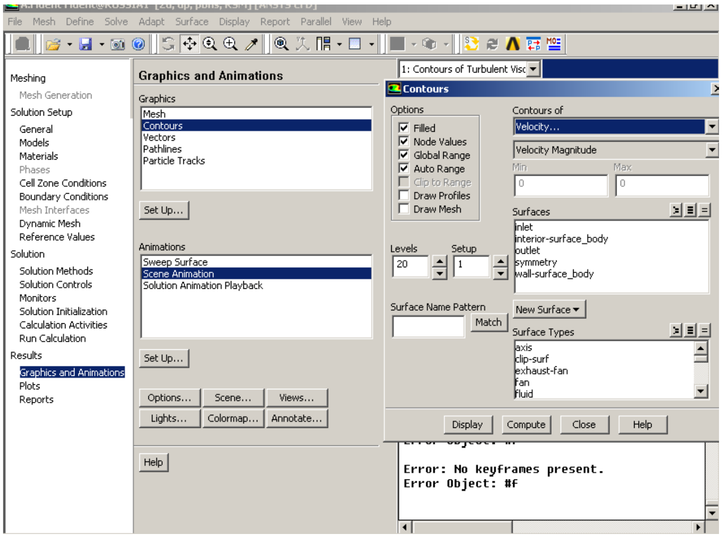



Рис.31

Contours of – Velocity, Velocity Magnitude. Нажать Display. Из Рис.32 видно, что

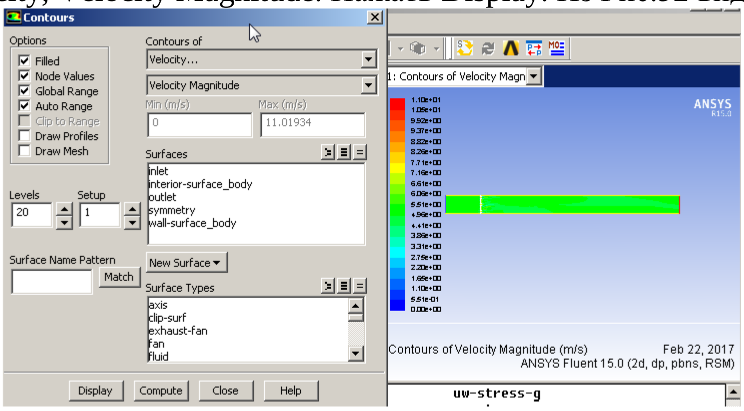



Рис.32

Поле скорости однородно по всей длине гидродинамической трубы, локально изменяясь вблизи поперечной периодической структуры. Рассмотрим распределение молекулярных свойств вдоль горизонтальной оси. Contours of – Properties , Molecular Viscosity. Нажать Display.

Результат показан на Рис.33. Неоднородности молекулярной вязкости расположены однородно и изотропно по всему объёму, более подробно и в меньших масштабах у препятствия с периодической структурой, так как именно там сетка построена наиболее подробно. Поэтому различие в размере неоднородностей объясняется особенностями построения сетки. А физическое поле молекулярной вязкости полностью однородно. Действительно, молекулярная вязкость определяется длиной свободного пробега молекулы воды, что намного меньше диаметра стержня 40см или расстояния между стержнями. Поэтому её свойства не могут зависеть от механического

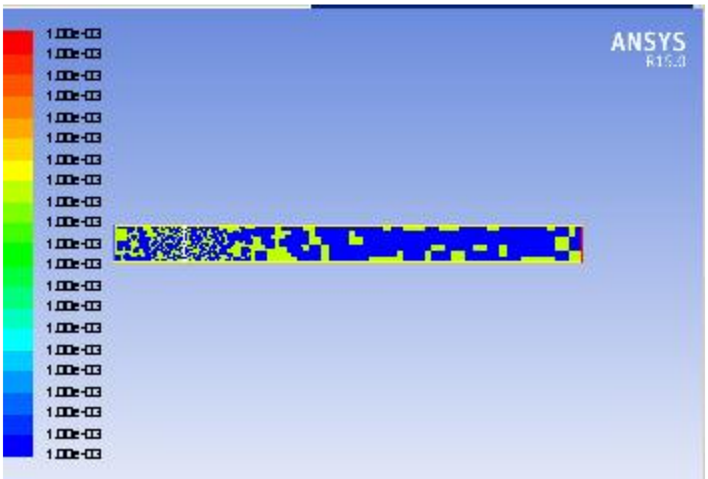



Рис.33.

препятствия таких размеров.
Теперь рассмотрим поле турбулентной кинетической энергии вдоль потока. Contours of Turbulence , Turbulence Kinetic  Energy .  Нажать Display.

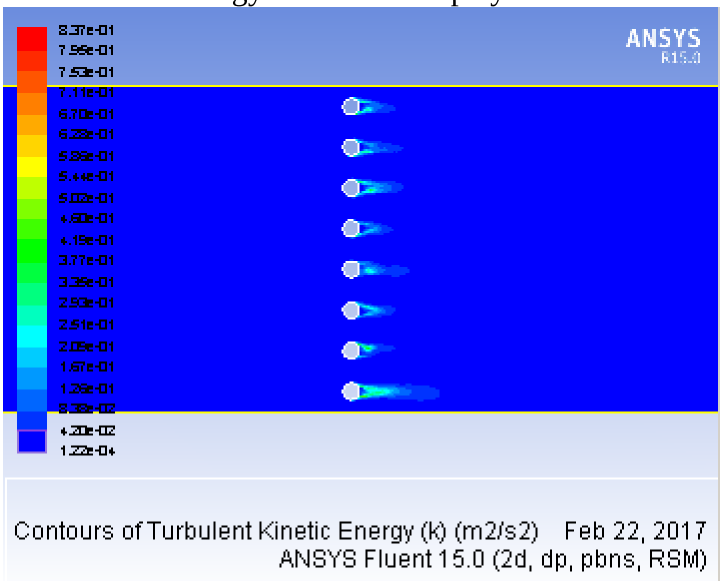



Рис.34

Мы видим, что с небольшим различием области с максимальной турбулентной энергией находятся за препятствиями по потоку, т.е. порождаются препятствиями. Однако кинетическая  энергия турбулентных вихрей порядка диаметра препятствия переходит в осредненную энергию среднего движения, и мелкое вихревое движение подавляется потоком (Рис.34).

Поле коэффициента турбулентной вязкости локально у периодического препятствия показано на Рис.35 и по всей длине модели на Рис.36.Contours of Turbulence , Turbulence Viscosity Ratio. Нажать Display.

На Рис.35 видно, что области турбулентной вязкости, порождаемые препятствием, также могут быть подавлены средним потоком, так происходит за 1,2,3,4,6,7 стержнями. Однако время жизни  или длина турбулентного следа гораздо больше чем у соответствующих областей  для турбулентной кинетической энергией. Кроме того по следу генерируются и отрываются по потоку мелкие интенсивные области вязкости, которые увеличивают длину вязкого следа, рассасываясь в нём.  Такие вихри образуются в шахматном порядке за симметричным препятствием и носят название

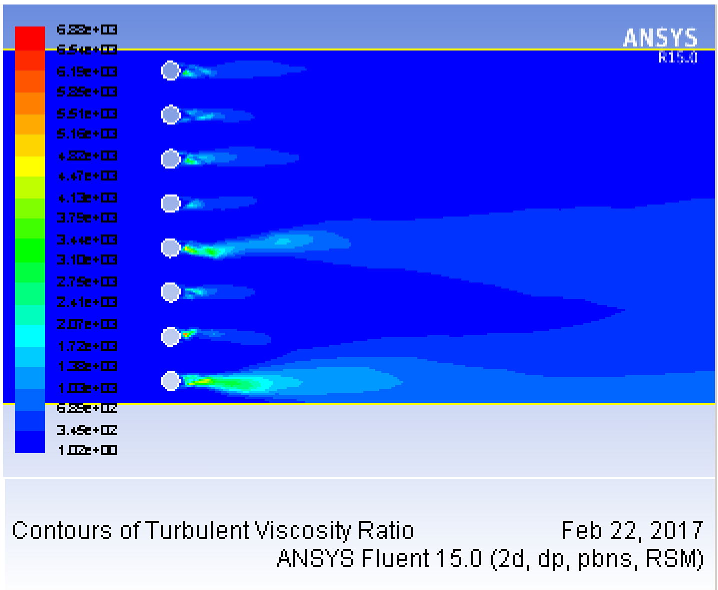



Рис.35

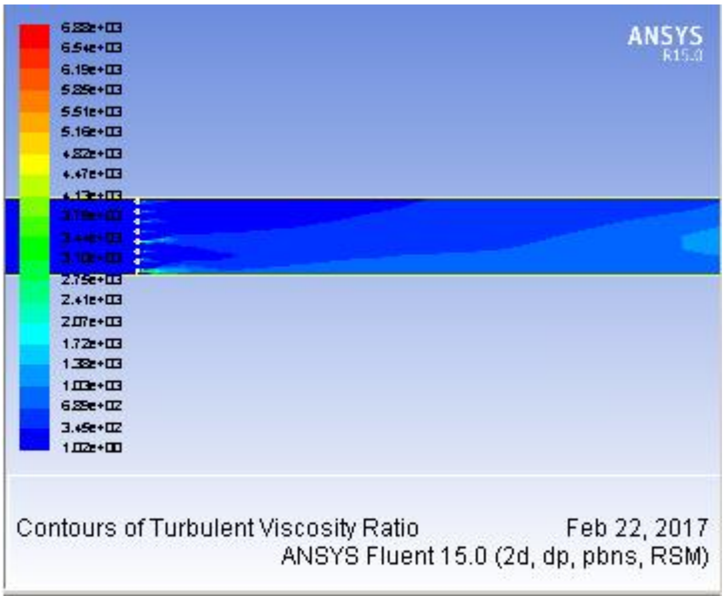



Рис.36

дорожки Кармана. Кроме того, стенки модели также являются своеобразным генератором вязкой турбулентности аналогично 8 рассматриваемым стержням. Как видно из Рис. 36, нижний 8 след особенно интенсивный от стержня до конца потока благодаря близкому взаимодействию с нижней пластиной. Наконец, на Рис. 36 5 и 8 след перекрывают полное сечение потока и за утроенным поперечным масштабом сбегающий поток воды можно считать полностью развитым турбулентным потоком относительно величины турбулентной вязкости.

Интересно также отметить поле динамического давления Рис.37. Оно полностью однородно до препятствия. Но является сильно неоднородным после периодической структуры. Легко объяснить светлые зелёные периодические области между стержнями. Здесь работает уравнение неразрывности $S_1 v_1 = S_2 v_2$ - уменьшается сечение – увеличивается скорость воды и динамическое давление по формуле $p = \dfrac{\rho v^2}{2}$ (1).

Но за препятствием из ряда стержней вся периодическая закономерность теряется!

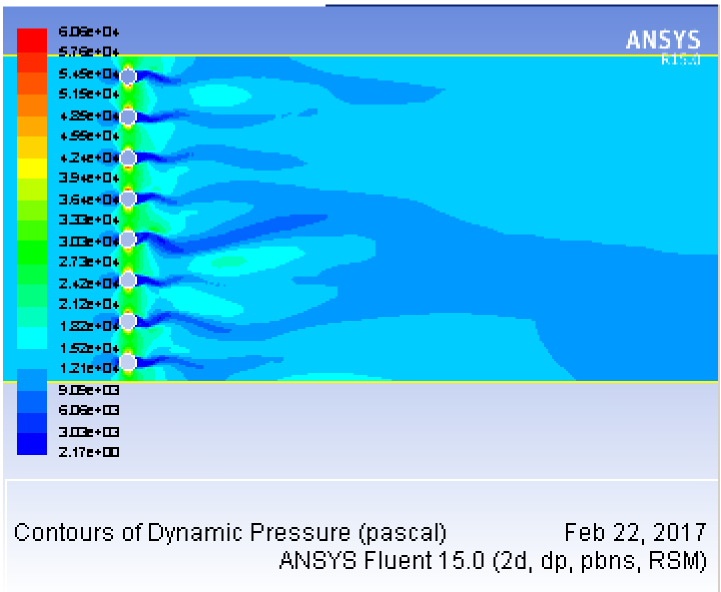



Рис. 37

Мы фиксируем случайно вытянутые языки и следы как с большим так и с низким динамическим давлением. Зелёные овальные замкнутые области можно связать с крупными вихрями. А случайные следы длиной в десятки раз превышающие диаметр стержней можно связать только с турбулентной вязкостью. Другими словами динамическое давление не может быть описано такой простой формулой (1), но зависит от локальных свойств турбулентной вязкости.

Литература:

1) Кривцов А.В. Знакомство с CAE – системой анализа течений жидкости и газа ANSYS Fluent. Самарский государственный аэрокосмический университет. Самара 2013.
2) Кривцов А.В. Изучение качества влияния сетки и моделей турбулентности на результаты CFD – расчёта в ANSYS Fluent. Самарский государственный аэрокосмический университет. Самара 2013.

## Приложение 4. Построение нестационарных моделей в оболочке ANSYS Fluent

Рассмотрим три основных этапа построения нестационарных явлений в жидкости для программной оболочки Fluent WORKBENCH(Version 15.0.7) на примере быстро периодического прерывания потока жидкости под давлением.

### 1 Построение геометрии модели

**1 шаг**. Открыть программную оболочку ANSYS WORKBENCH. Нажать(ЛКМ) в функциональной линейке Fluid Flow(Fluent) и перетащить Fluid Flow(Fluent), не отпуская ЛКМ, в красный прямоугольник правого поля(Project Schematic), после инициализации справа в Project Schematic образуется проект A Fluid Flow(Fluent). Назовём проект Smesitel, File-Save-Smesitel-Ok.

**2 шаг**. Инициализируем геометрический модельер, в проекте A Fluid Flow(Fluent) ЛКМ наводим на 2 строку Geometry,ЛКМ выбираем в падающем списке New  Geometry.

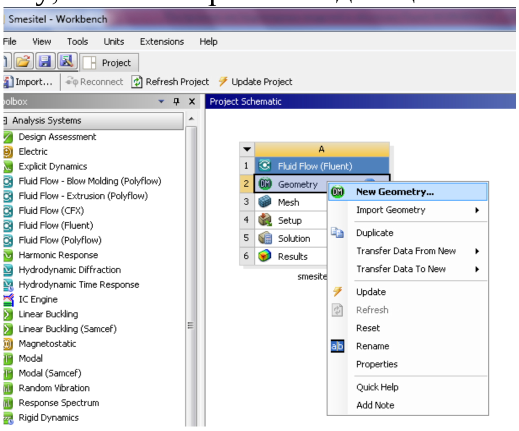



Рис.1

**3 шаг**. В интерфейсе Design Modeler определяем узлы модели. Построим трубу-цилиндр, по которой проходит жидкость. Последовательно ЛКМ по спискам проходим путь Create-Primitive-Cylinder.

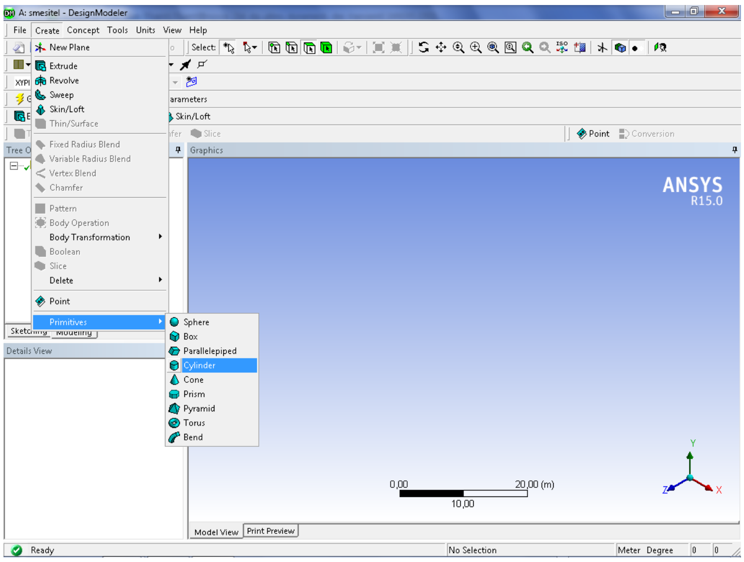



Рис.2

Детализация цилиндра(Cylinder1) – в окне Details View(Details of Cylinder1) выбираем координаты начального конца(0,0,-3)и протяжённость(0,0,6) и радиус цилиндра 0,5м (единица системы измерений Meter). Вид материала(Operation-Frozen material) нажимаем кнопку генерировать Рис.3

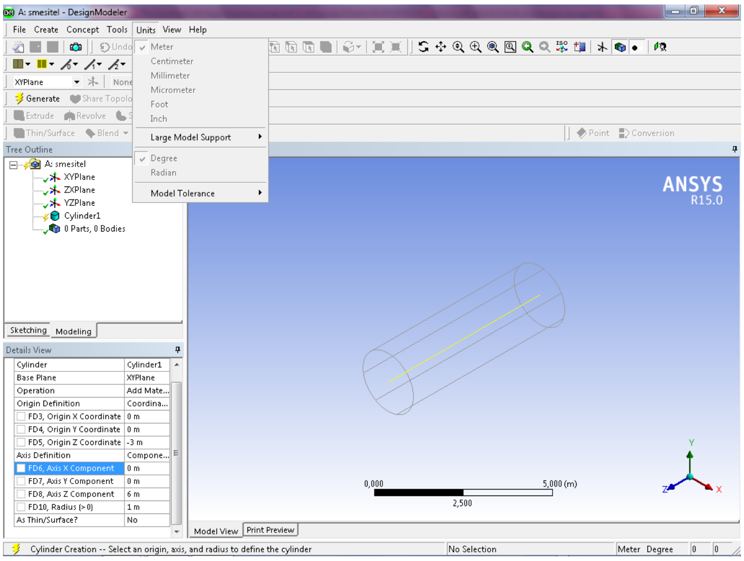



Рис.3

**4 шаг**. В центр модели врезаем сферу радиуса R=0,4 м. Последовательно ЛКМ по спискам проходим путь Create-Primitive-Sphere. Детализация цилиндра(Sphere1) – в окне Details View(Details of Sphere1) выбираем координаты центра(0,00)и радиус сферы 0,4м. Вид материала(Operation-Slice material) нажимаем кнопку генерировать Рис.5

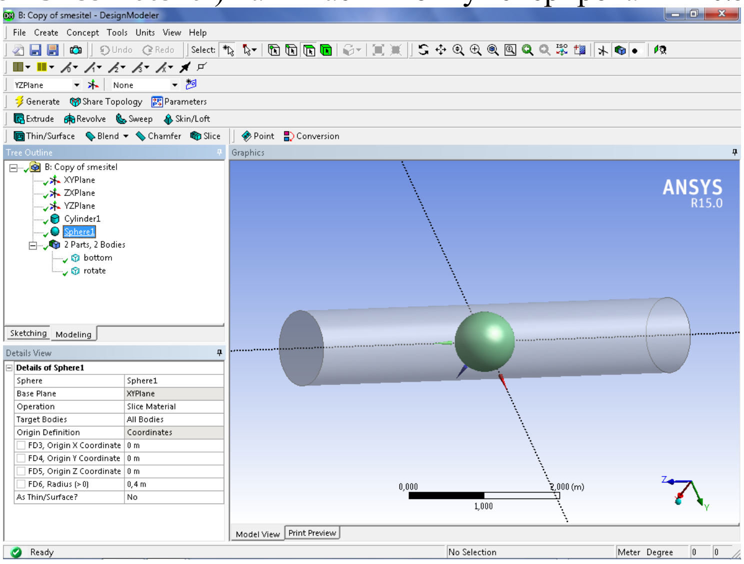



Рис.4

**5 шаг**. Создаём внутренний цилиндр. Последовательно ЛКМ по спискам проходим путь Create-Primitive-Cylinder. Детализация цилиндра(Cylinder2) – в окне Details View(Details of Cylinder2) выбираем координаты начального конца(0,0,-3)и протяжённость(0,0,6) и радиус цилиндра 0,2м. Вид материала(Operation-Slice material) нажимаем кнопку генерировать

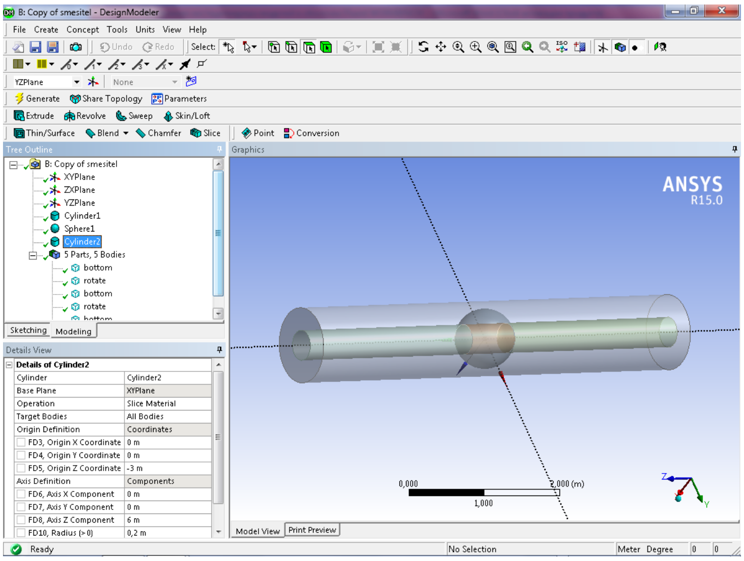


Рис.5

В итоге получаем 5 тел, как видно из дерева проекта(Tree Outline) Рис.5.

**6 шаг (наименование тел)**. Каждое из 5 полученных тел в дереве проекта переименовываем. Внешний цилиндр bottom, врезанная в него сфера(rotate) с вынутым внутренним цилиндром и три цилиндрических с внутренними диаметрами цилиндров жидких тел (левый – left, средний – middle, правый - right). Для этого в дереве проекта Tree Outline(5 parts 5 bodies) наводим курсор на каждое из 5 Solid ЛКМ, затем ПКМ, в падающем списке выбираем Rename, в строке body- указываем имя в дереве проекта. В результате всё выглядит как на Рис.6.

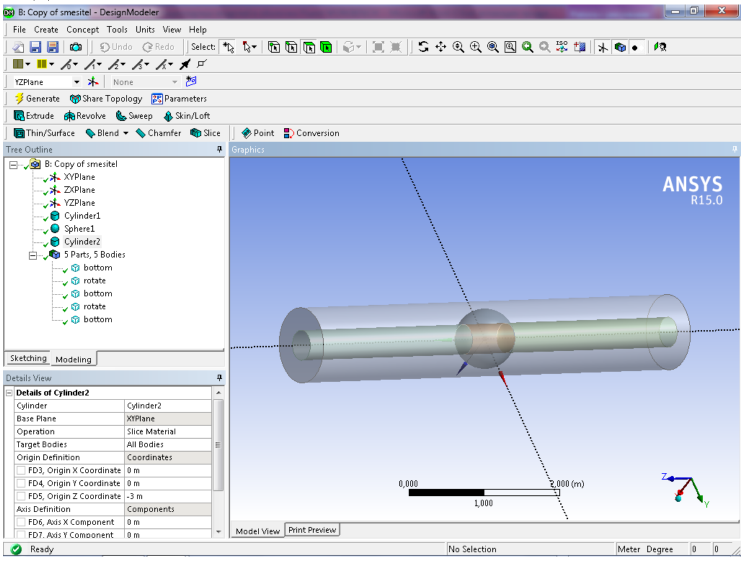


Рис.6

**7 шаг**. Для экономии оперативной памяти и времени счёта используем только половину модели разделённой плоскостью симметрии. Для этого выбираем путь Tools-Symmetry(ЛКМ). В дереве проекта указываем плоскость симметрии YZPlane (Рис.6),затем в Details View применить Apply(после чего в Details View напротив Symmetry Plane1 - YZPlane), нажимаем кнопку Generate(Рис.7).

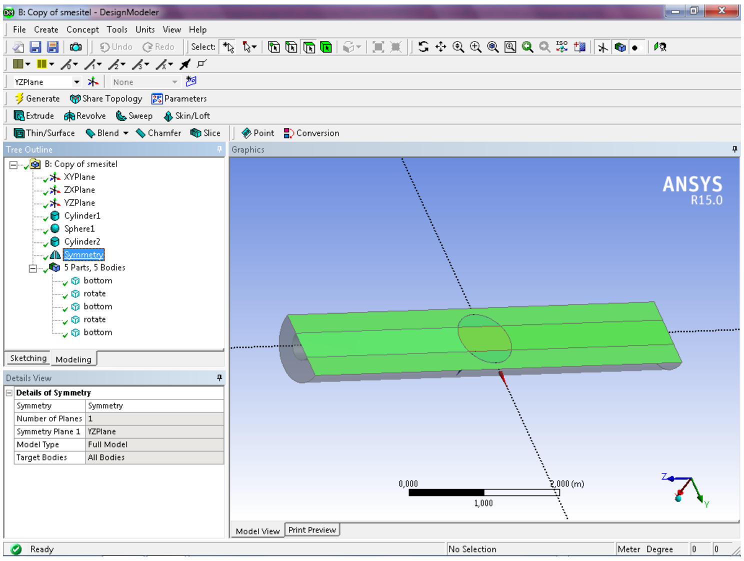



Рис.7

После этого в графическом окне Graphics появляется половина модели (Рис.7). Указателями можно переместить модель вверх-вниз, вправо-влево. Далее необходимо сохранить геометрию модели(File-Save Project).

**8 шаг (наименование плоскостей и поверхностей)**. Необходимо также именовать несколько поверхностей, для чего в верхней части функциональной линейки выберем указатель плоскости . Курсором на Рис.8 укажем торцевую поверхность(зелёным цветом) с именем inlet(вход).Затем активировать Generate.

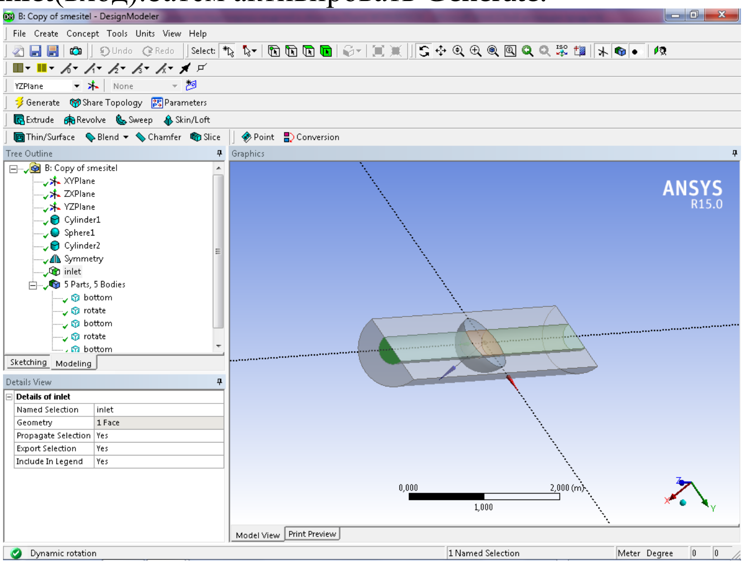



Рис.8

Аналогично выход - торцевая поверхность тела right назовём outlet Рис.10.Нажать Generate.

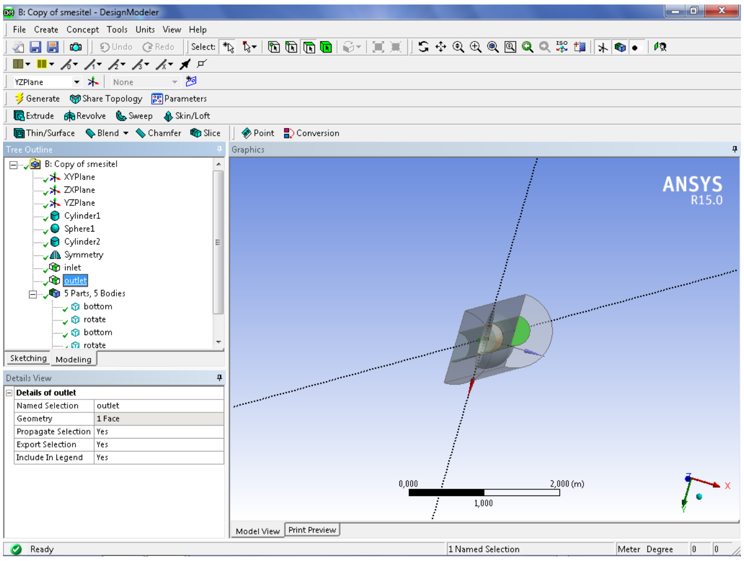



Рис.9

Укажем также все элементы плоскости симметрии одновременным нажатием 2 клавиш Ctrl и ЛКМ зелёным цветом, затем курсором в области рисунка ПКМ создадим падающий список, выберем Named Selection Рис.10 , назовём объединение поверхностей словом symmetry. Результат всех наименований приведен в дереве проекта Рис.11

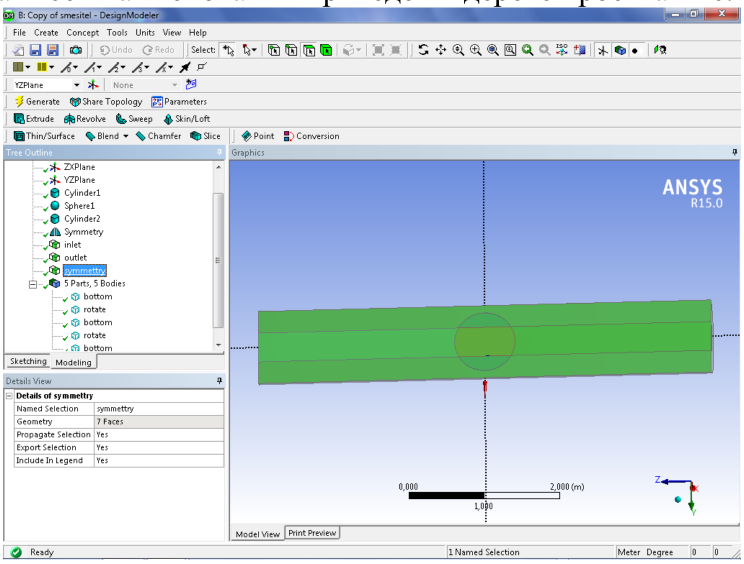



Рис.10

Переименование тел. Наводим ЛКМ в дереве проекта курсор на тело подлежащее переименованию, затем используем ПКМ, в падающем списке выбираем rename и изменяем название тела. В результате можно сохранить список имён как на рисунке 11.

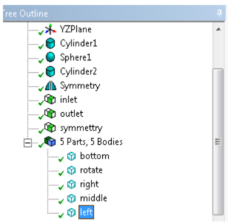



Рис.11

Сохраняем геометрию проекта File-Save project.

## 2 Построение сетки модели

**9 шаг.** В основной оболочке Project Schematic проекта A Fluid Flow(Fluent)

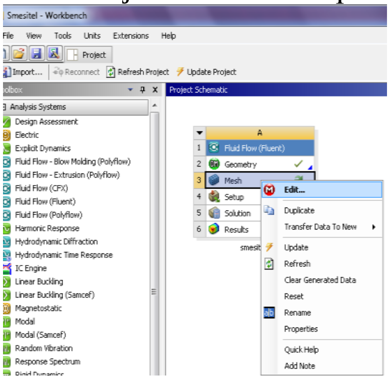



Рис.12

указываем (ЛКМ) Mesh-Edit, открывается сеточный построитель ANSYS ICEM CFD. В дереве проекта Project-Model(B3)-Geometry. Выбираем первое твёрдое тело Bottom Рис.12. Запоминаем настройки Ok. В разделе Detail of Solid выбираем material –solid(Рис.13).

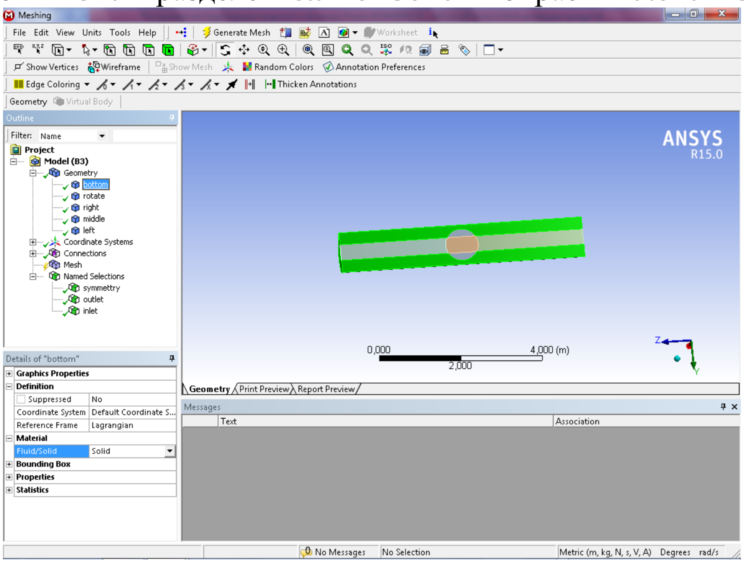



Рис.13

Выбираем второе тело rotate Рис.13. В разделе Detail of Solid выбираем material –solid. Выбираем третье тело right Рис.13. В разделе Detail of Solid выбираем material –liquid. Выбираем четвёртое тело middle Рис.13. В разделе Detail of Solid выбираем material –liquid. Выбираем пятое тело left Рис.14. В разделе Detail of Solid выбираем material –liquid.

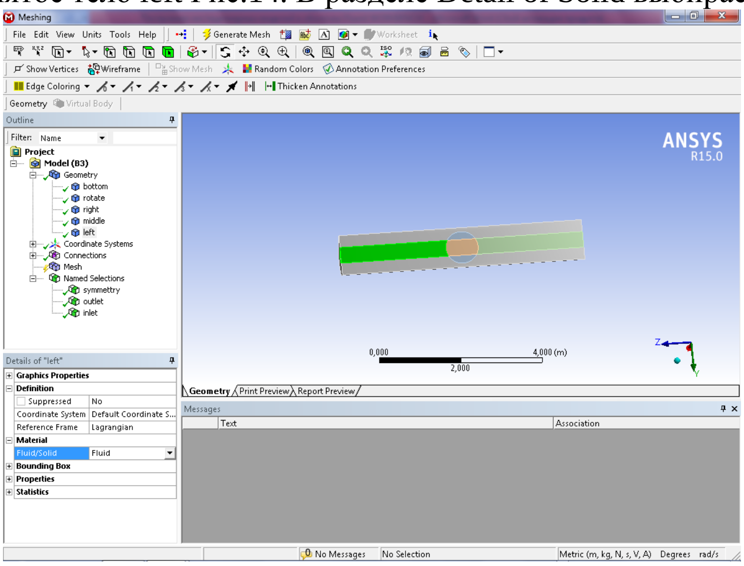



Рис.14

**10 шаг.** Построение сетки. В дереве проекта Tree outline указываем курсором mesh. В окне Details of mesh – Sizing  указываем(Relevance Centre –medium, Smoothing- medium, min size – 0,001m, max size – 0,01m) Рис.15.

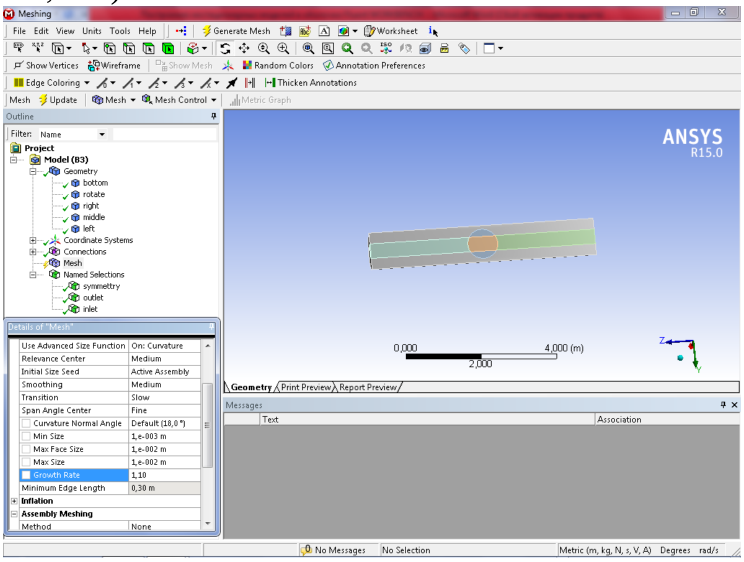



Рис.15

Запускаем генератор сетки, выбрав Mesh(ЛКМ), затем (ПКМ) в списке указываем строку Generate Mesh(Рис.16). Работа генератора сетки показана на Рис.17. Итоговая сетка показана на Рис.18. В конце построения сетки необходимо сохранить проект. File-Save project.

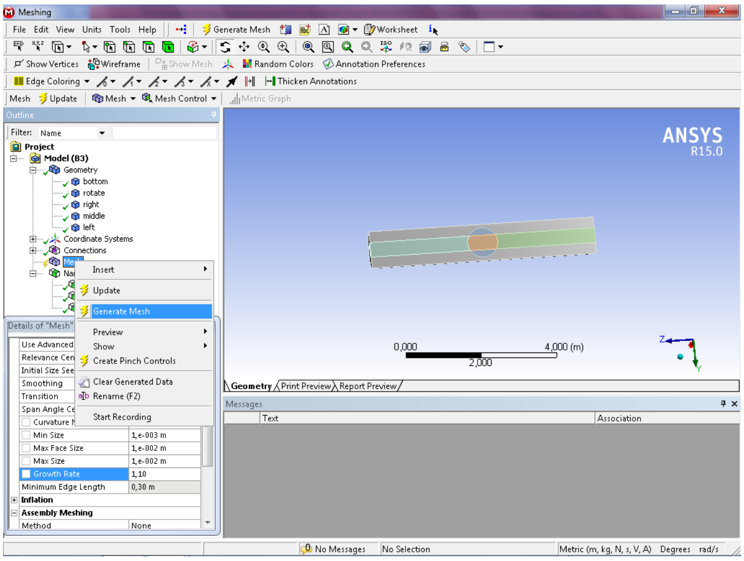



Рис.16

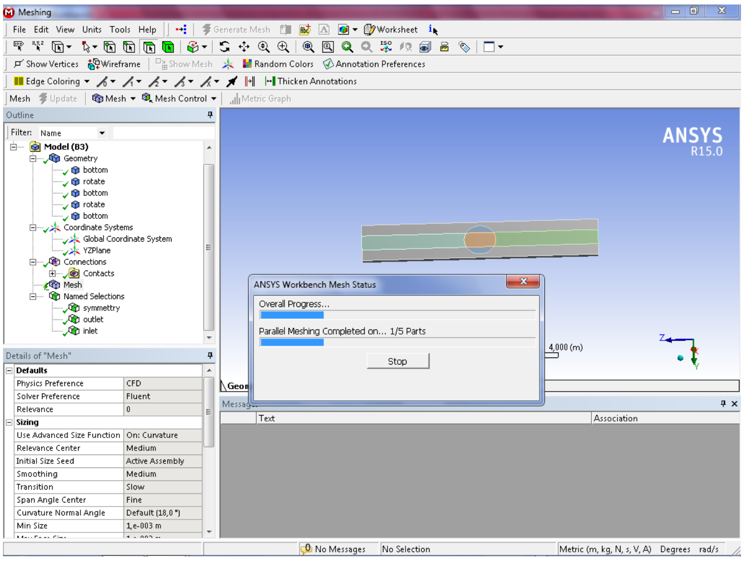



Рис.17

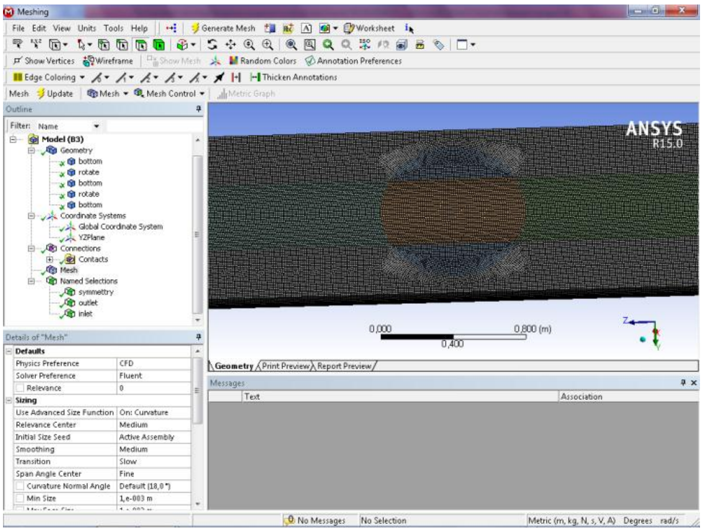



Рис.18

## 3 Численное решение задачи

**11 шаг**. В оболочке Workbench Project Schematic двойным кликом ЛКМ запускаем решатель Fluent(Рис.19) в режиме 3D double precision(двойная точность, которая означает, что итерация решения задачи сменяется следующей итерацией, когда относительная ошибка всех переменных в модели становится меньше 0,001). Необходимо установить параметр double precision и сохранить настройки ok.

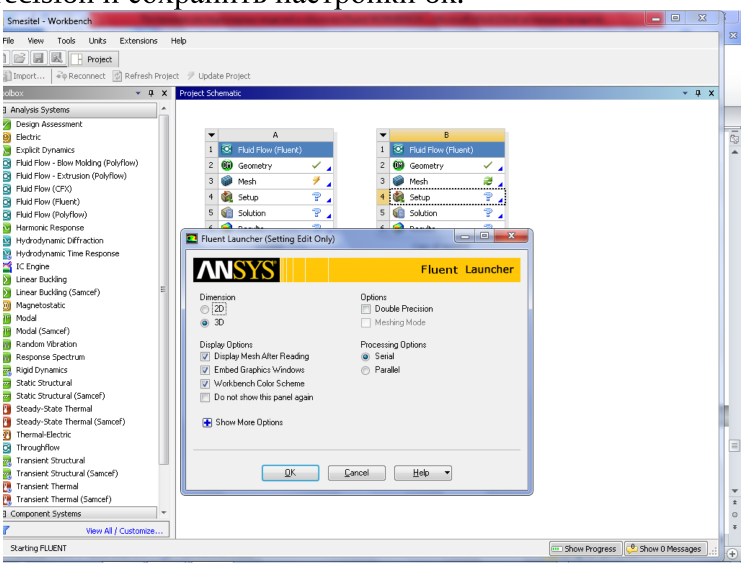


Рис.19

При загрузке решателя(Meshing) необходимо проверить качество сетки, нажав клавишу check(Рис.20)в разделе General.

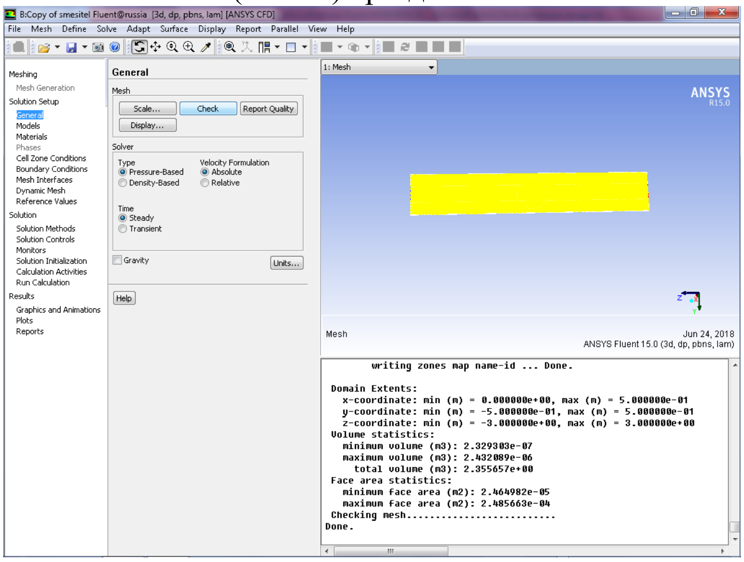



Рис.20

Разделим сетку на части, соответствующим разным узлам модели, для этого выбираем действия Display-Mesh-Colors(выбрать Color by ID)-Close-Display - Close(Рис.21,22).Результат показан на Рис.23. Для нестационарных, переменных во времени явлений необходимо установить настройку transient(Рис.23).

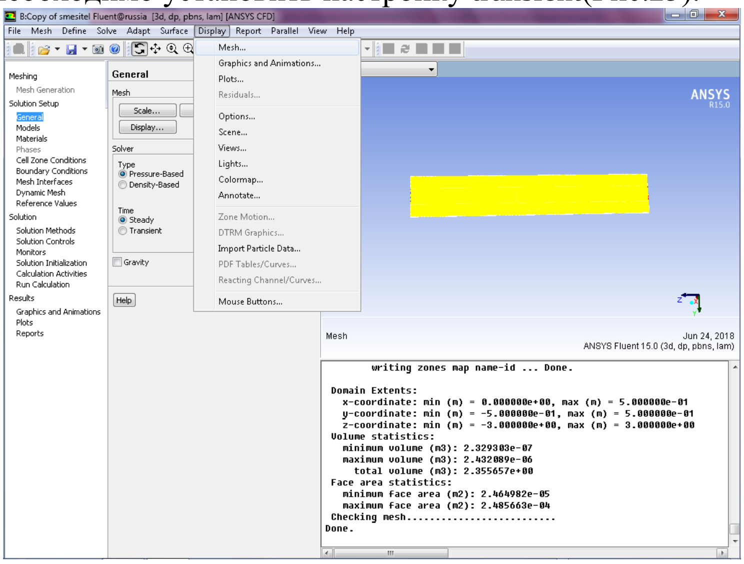



Рис.21

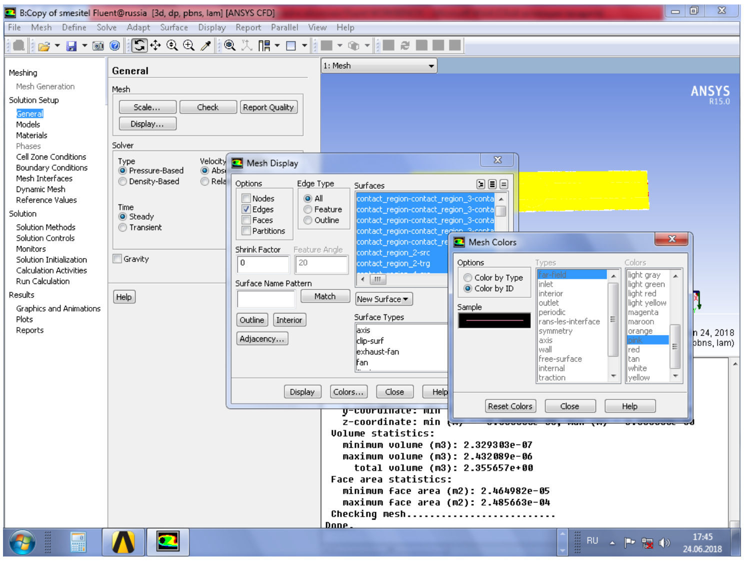


Рис.22

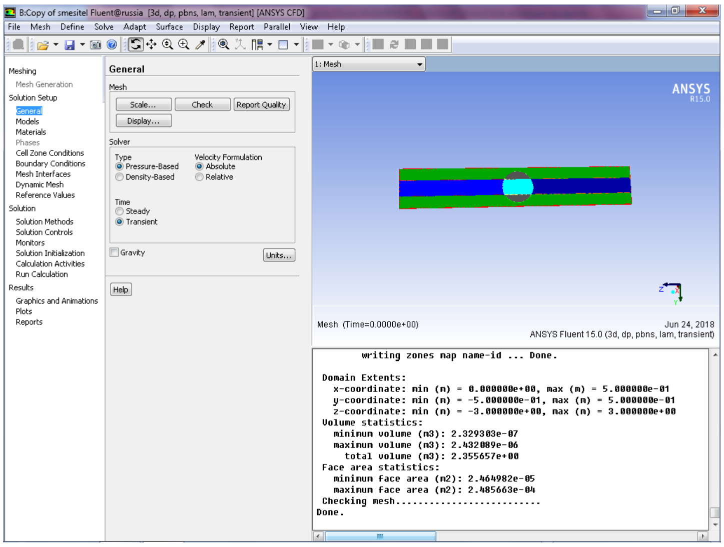



Рис.23

**12 шаг.** Переходим в раздел Models-(Viscous-Laminar)- k-epsilon(2equations)-Ok. Используем уравнение k-epsilon(2equations) для турбулентной модели жидкости устойчивой для численного решения лабораторных задач.

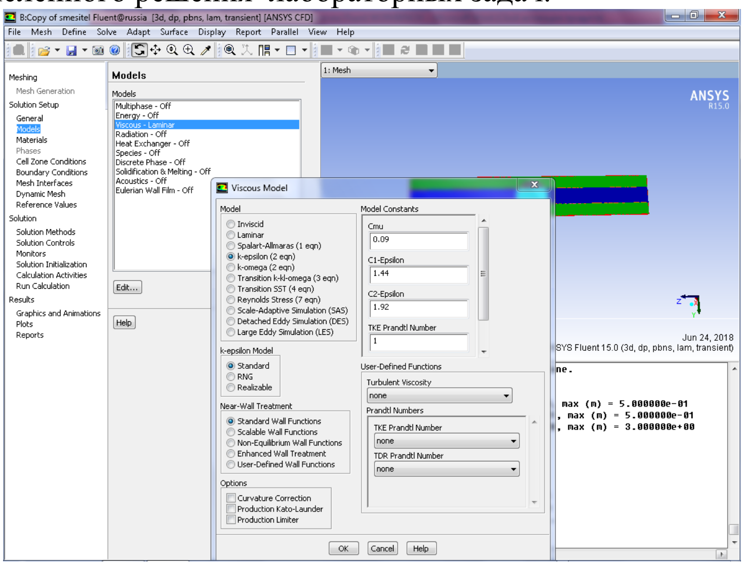


Рис.24

**13 шаг**. Переходим в раздел Solution Setup- Materials. В окне materials активировать create/edit. В разделе create/edit Materials выбрать указатель Fluent Database- Water liquid(H2O)(Fluent Fluid Materials). Затем выбрать Copy-Close-Close.В разделе Materials активировалась строка water – liquid, на которой нужно остановить выбор в разделе Materials.

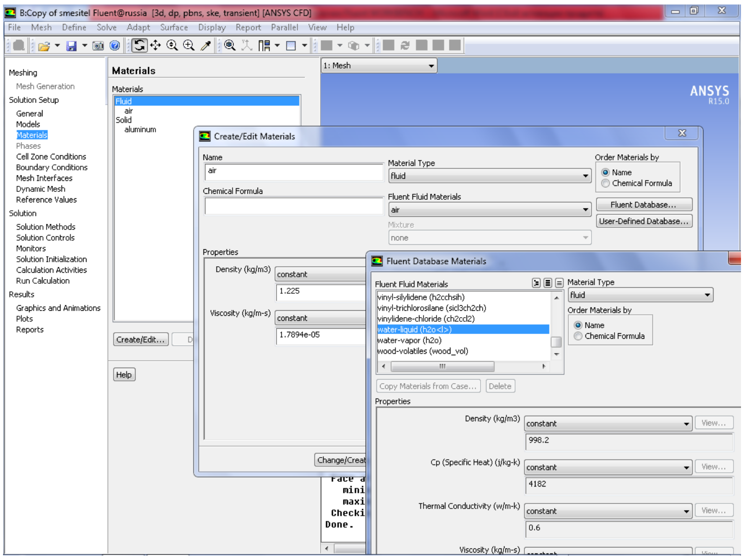



Рис.25

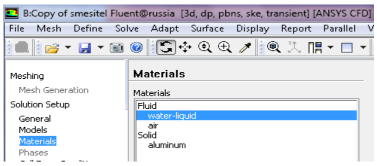
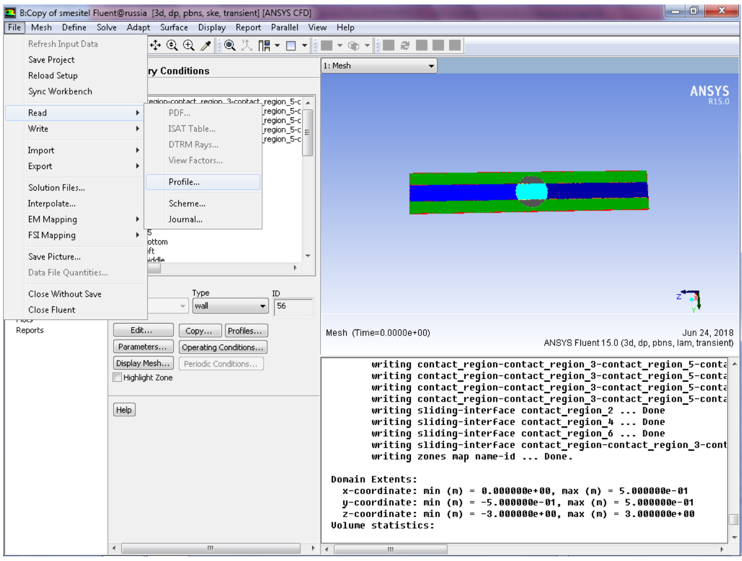



Рис.26

Укажем также файл чтения по цепочке File-Read-Profile- Profile File-all File-FF.1set-Ok(Рис.27,28).



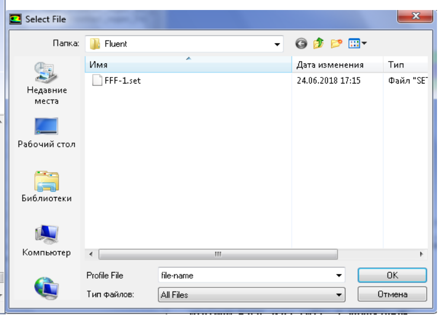




Рис.27 Рис.28

**14 шаг.** Переходим в секцию Cell Zone Condition. Устанавливаем свойства узлов модели. Первый узел Bottom(Рис.29). Материал - алюминий(Material Name- aluminum). Дополнительные параметры сетки отсутствуют. Запоминаем настройки – OK.

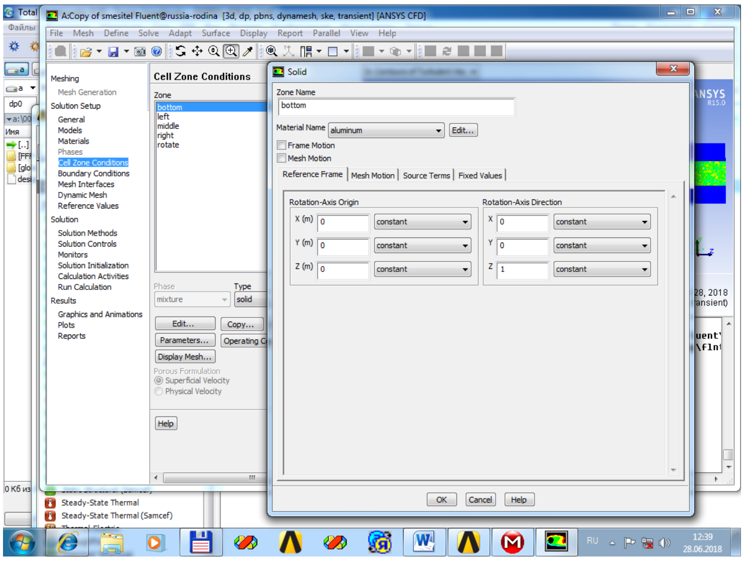


Рис.29

Второй узел left(Рис.30). Материал - вода(Material Name-Water-liquid). Дополнительные параметры сетки отсутствуют. Запоминаем настройки – OK.

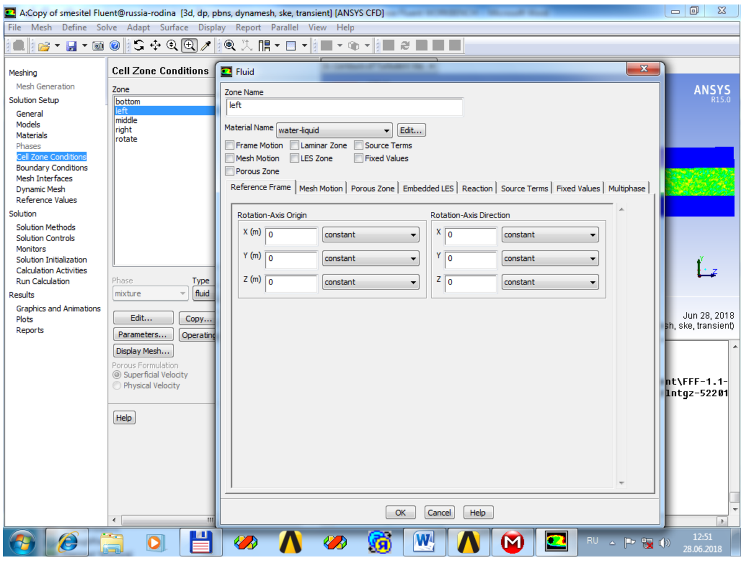


Рис.30

Третий узел middle(Рис.31). Материал - вода(Material Name-Water-liquid).Необходимо задать движение сетки Mesh Motion-активируем галочкой. Устанавливаем направление оси вращения Rotation Axis Direction-(x-1,y-0,z-0) . Устанавливаем скорость вращения Rotational Velocity-Speed(rad/s)-31.4. Запоминаем настройки – OK.

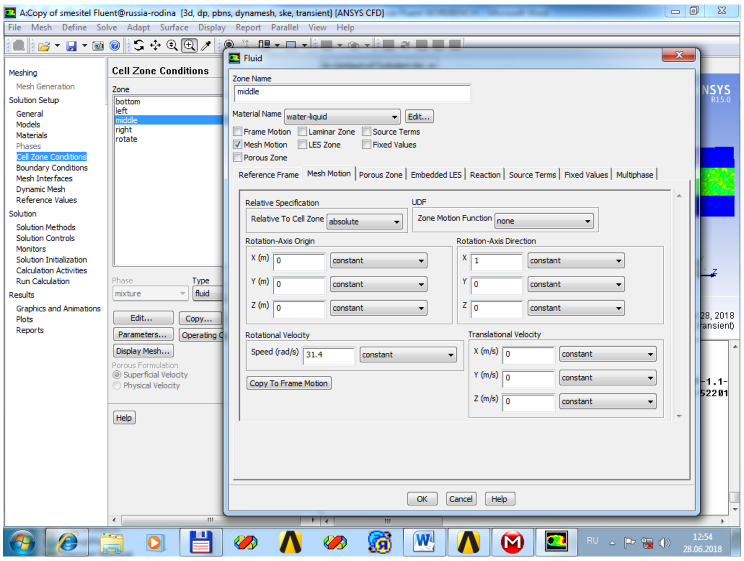



Рис.31

Четвёртый узел right(Рис.32). Материал - вода(Material Name-Water-liquid). Дополнительные параметры сетки отсутствуют. Запоминаем настройки – OK.

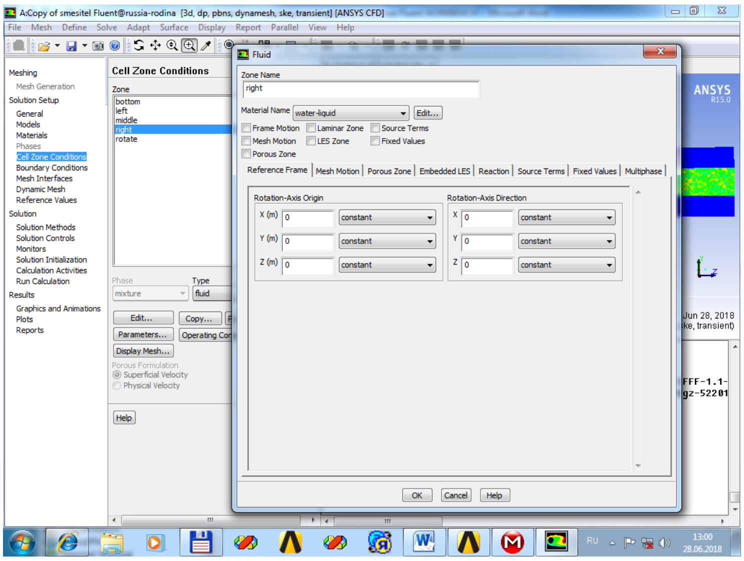



Рис.32

Пятый узел rotate(Рис.33). Материал - вода(Material Name-aluminum). Необходимо задать движение сетки Mesh Motion-активируем галочкой. Устанавливаем направление оси вращения Rotation Axis Direction-(x-1,y-0,z-0) . Устанавливаем скорость вращения Rotational Velocity-Speed(rad/s)-31.4. Запоминаем настройки – OK.

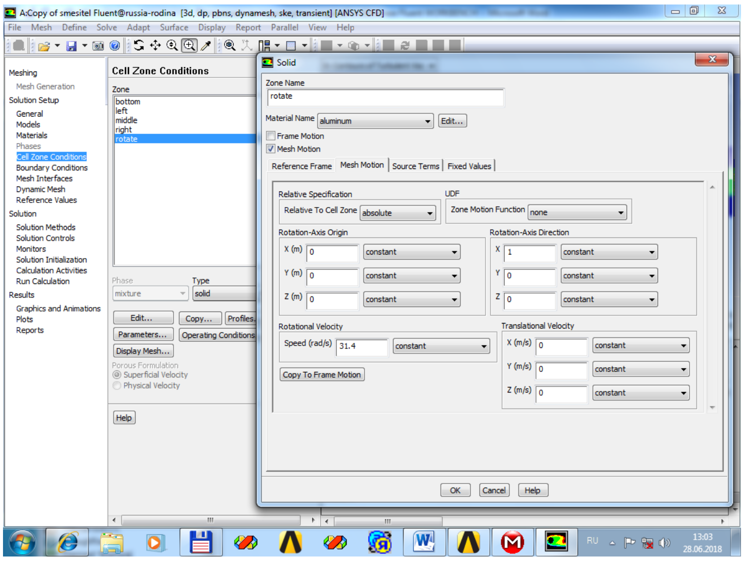


Рис.33

**15 шаг.** Переходим в секцию Solution Setup(Boundary Conditions). Пропускаем все контактные области. Выбираем вход(inlet),Type(pressure-inlet)-решение определяется входным избыточным давлением, Edit. Устанавливаем избыточное давление на входе Gauge Total Pressure (Pascal)-200000(2 технические атмосферы). Далее указать спецификацию Specification – Intensity and Hydraulic Diameter, turbulent intensively – 5%,Hydraulic diameter -0.4m(Обратите внимание, что десятичный знак нужно вводить в виде точки!). Для трубы гидравлический диаметр совпадает с её внутренним геометрическим диаметром. Запоминаем настройки– Ok(Рис.34).

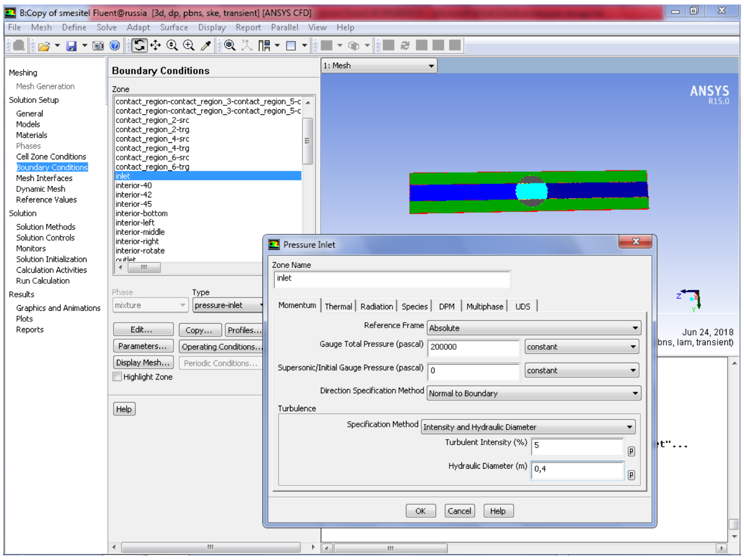


Рис.34

Пропускаем все поверхности с названиями interior, symmetry. Выбираем выход(outlet),Type(pressure-outlet)-решение определяется выходным избыточным давлением, Edit. Устанавливаем избыточное давление на выходе Gauge Total Pressure (Pascal)- 0. Далее указать спецификацию Specification – Intensity and Hydraulic Diameter, turbulent intensively – 5%,Hydraulic diameter -0,4m. Для трубы гидравлический диаметр совпадает с её внутренним геометрическим диаметром. Запоминаем настройки–Ok(Рис.35,36).

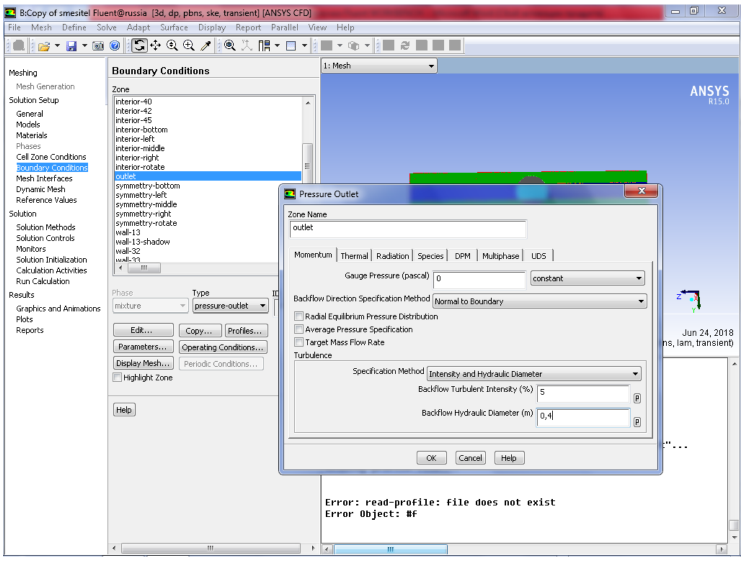



Рис.35

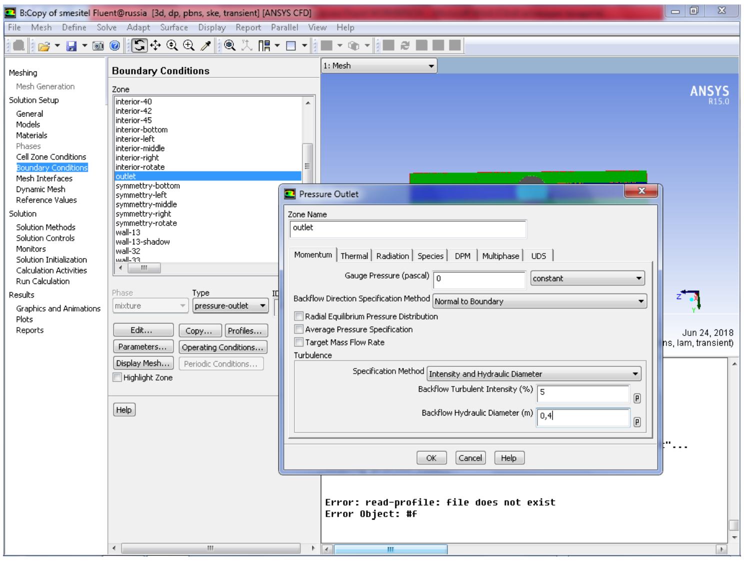



Рис.36

Переходим к поверхности Wall13 – Shadow(Рис.37), так как она относится к правой части модели и внутренней трубе, выставляем размер шероховатости 0,001 м.-Ok.

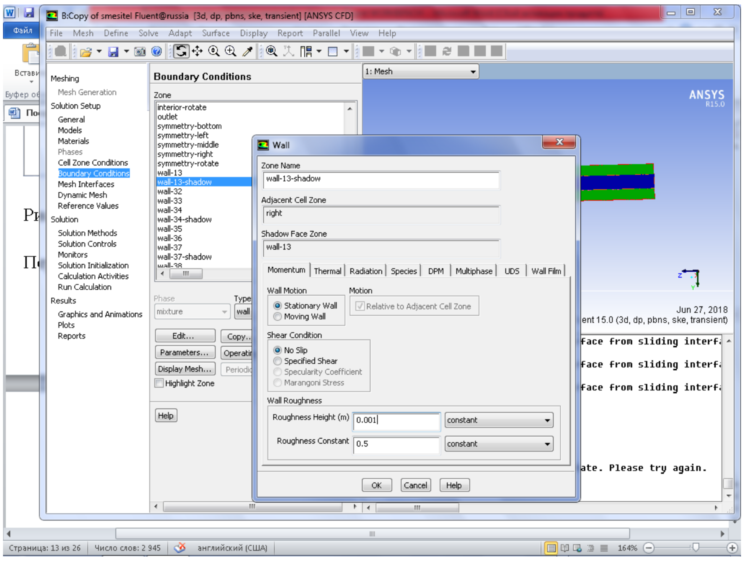



Рис.37

Аналогично поступаем для поверхности Wall13(Рис.38)-Ok.

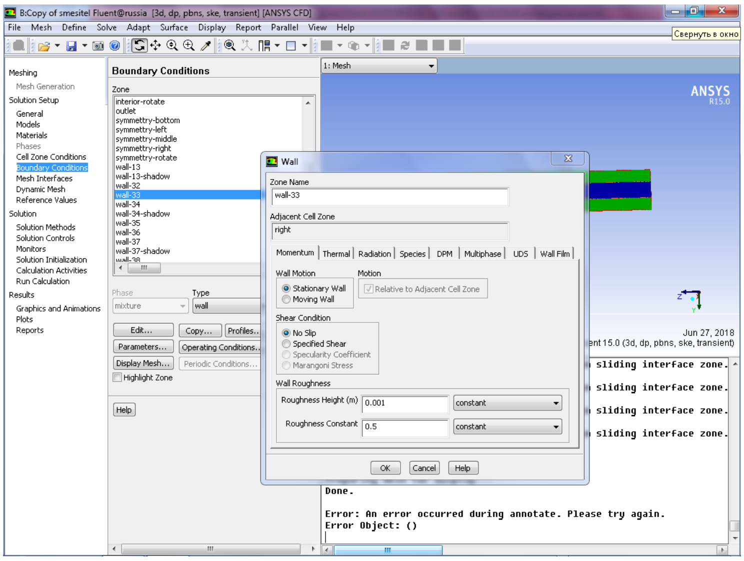



Рис.38

Аналогично поступаем для поверхности Wall34-Shadow(Рис.39), которая относится к левой части модели и к трубе внутреннего радиуса с параметром шероховатости 0,001м-Ok. Wall34 относится также к левой части модели(Рис.40)-Ok.

Поверхность wall-37-shadow относится к средней части модели middle, которая вращается с частотой 5 оборотов в секунду( с угловой скоростью 10π рад/с)Рис.41. Поэтому устанавливаем параметры Mothing Wall – подвижная стенка, Rotational- вращение, параметры вращения , Rotation- Axis Origin(начало координат оси вращения –(0,0,0)), Rotation- Axis Direction x=1,y=0,z=0. No slip- нет скольжения. Roughness Hight(m)-0.001m –величина шероховатости-Ok.

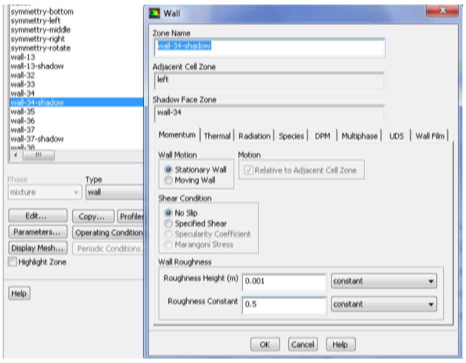


Рис.39

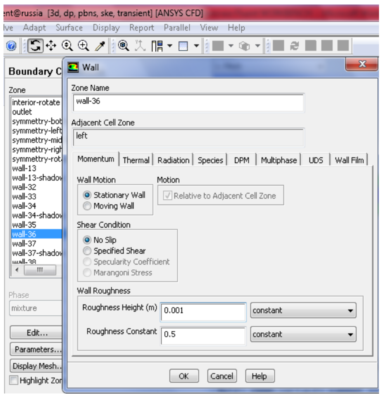


Рис.40

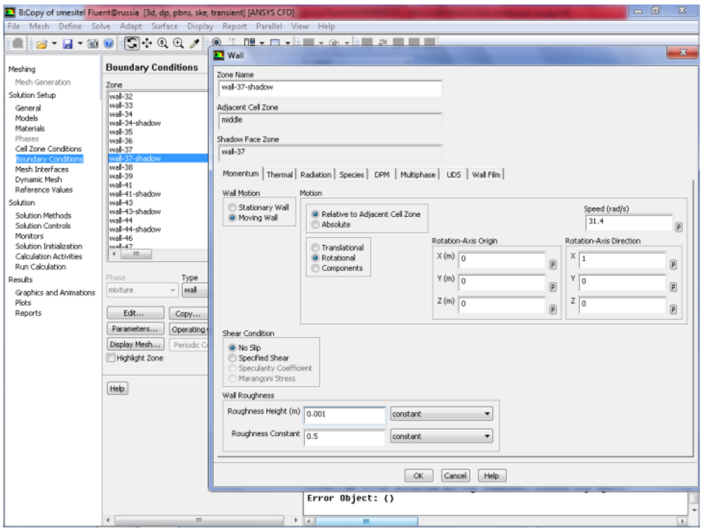


Рис.41

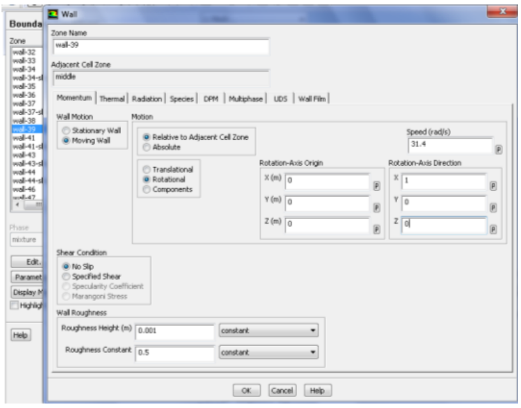


Рис.42

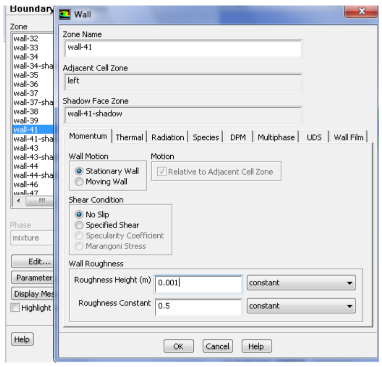
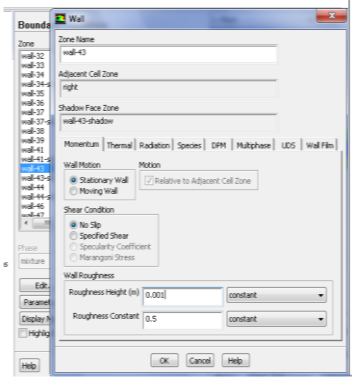


Рис.43

Поверхность Wall-39 (Рис.42)также относится к классу подвижных и вращающихся стенок и к средней части модели, в то время как поверхность Wall-41 имеет неподвижные стенки и оносится к средней части модели(Рис.43).



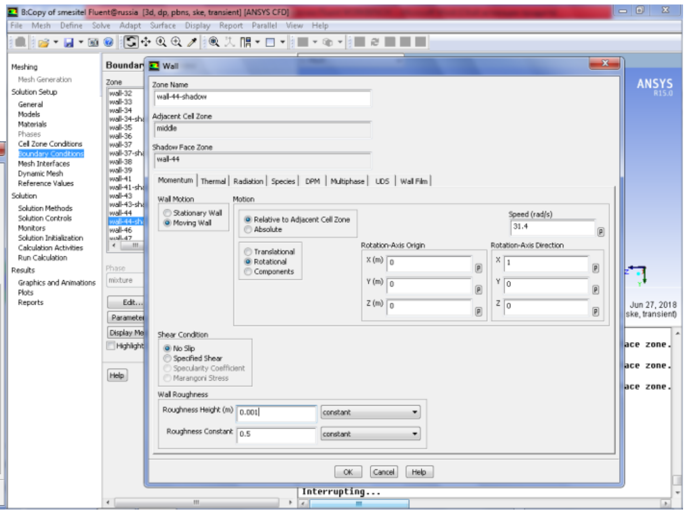
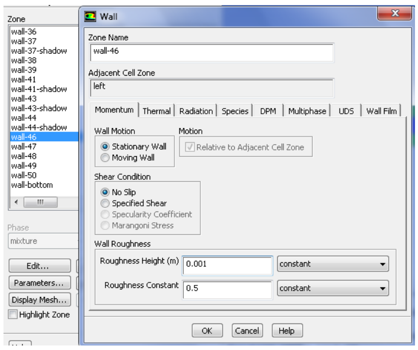


Рис.44 Рис.45

На Рис.44 показаны настройки для неподвижной поверхности Wall-43, в то время как поверхность Wall-44-shadow является подвижной, вращающейся с направлением вращения(1,0,0) и относится к средней части модели с размером шероховатости 0,001м(Рис.45).



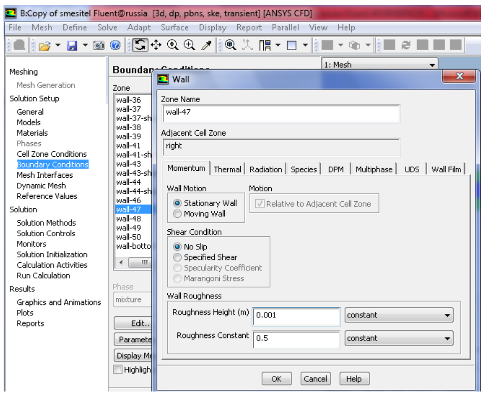


Рис.46 Рис.47

Неподвижны также поверхности Wall-46(left)Рис.46 и Wall-47(right)Рис.47. После каждой настройки поверхности необходимо их запомнить нажатием Ok.

Последней подвижной поверхностью в списке является Wall-49(middle)Рис.48. Устанавливаем также параметры moving wall, Rotation- Axis Origin-(1,0,0), Rotation- Axis Direction x=1,y=0,z=0, Roughness Hight(m)-0.001m.-Ok.

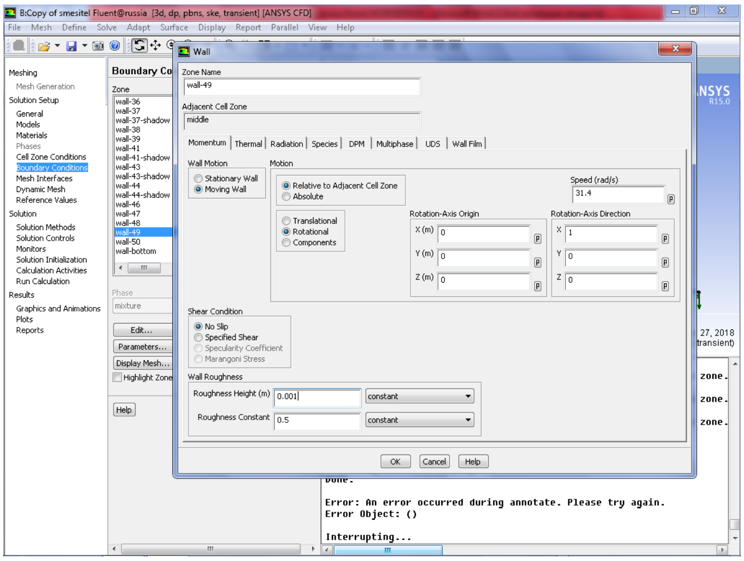
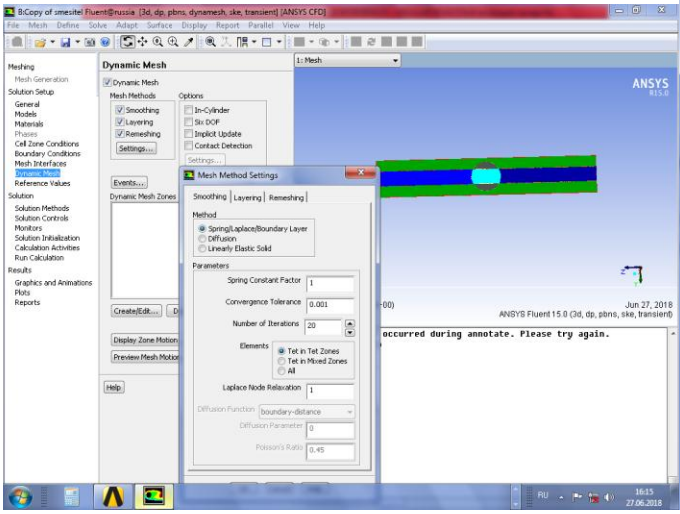



Рис.48

**16 шаг.** Переходим к разделу Solution Setup(Dynamic Mesh). Галочками активируем свойства Dynamic Mesh, Smoothing, Layering, Remising (Рис.49). Рекомендуемые параметры Smoothing также указаны на Рис.49.



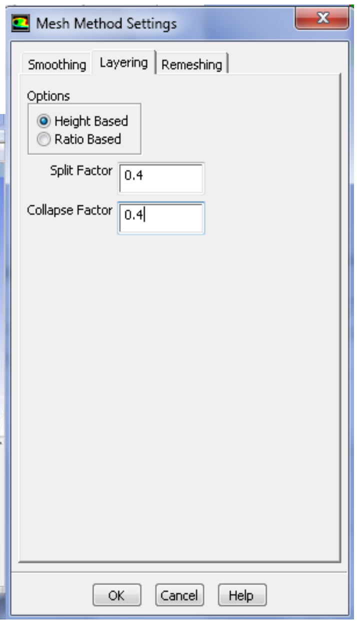




Рис.49 Рис.50

Параметры Layering(слоистости) (Рис.50) – именно такие параметры рекомендуют специалисты Самарского аэрокосмического университета (Бирюк В.В. Расчёт тепловых процессов в камере сгорания ДВС с помощью программы FLUENT) указаны на рисунках 50,51 соответственно. Remeshing(перемешивание учитывается через 5 интервалов временной итерации). Устанавливаем параметр Region Face. Кроме того, необходимо знать минимальный и максимальный размеры ячеек, определить которые можно клавишей Mesh Scale Info,установить автоматически нажатием Use Defaults(Рис.51).

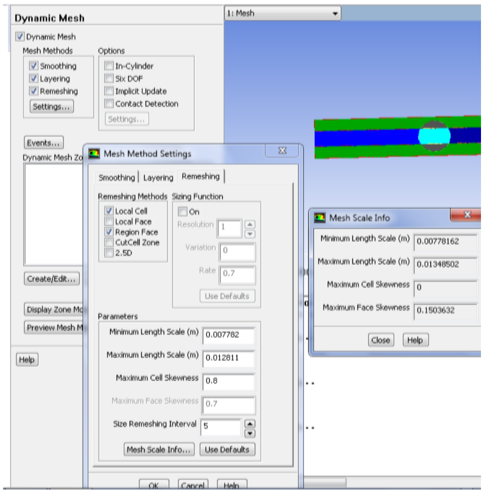


Рис.51

После установки Smoothing, Layering, Remeshing запоминаем настройки-Ok.

**17 шаг**. Переходим к разделу Dynamic Mesh- Dynamic Mesh Zones – Create/Adit.

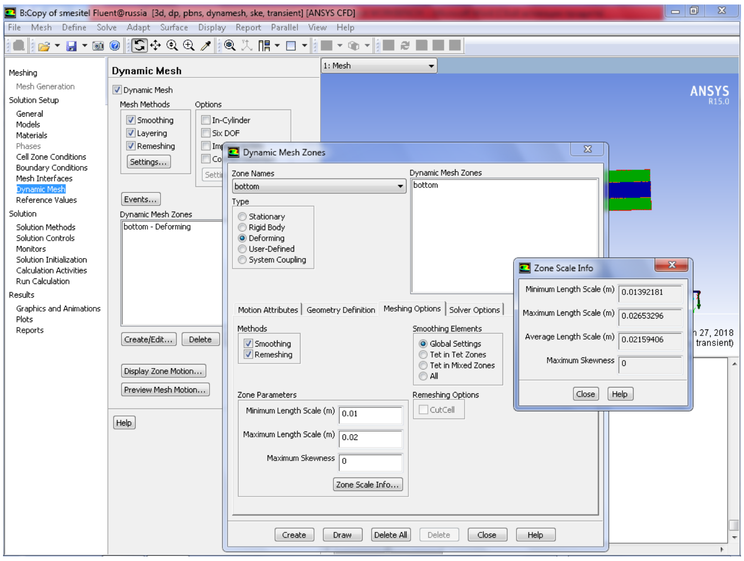
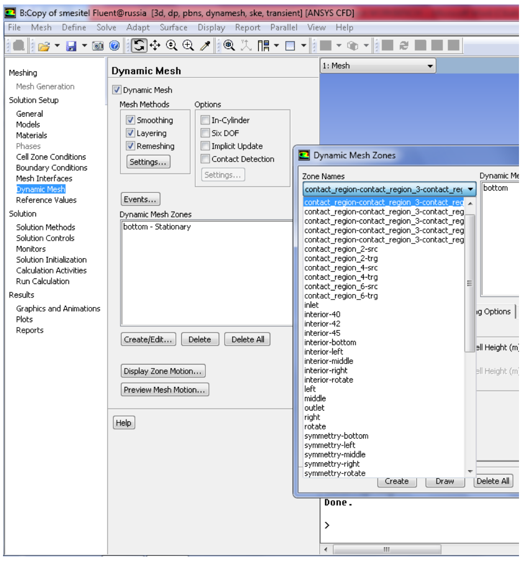


Рис.52

Bottom – основная (деформируемая) внешняя часть модели, поэтому в разделе Dynamic Mesh Zones устанавливаем Deforming- Create, после этого в основной части интерфейса Dynamic Mesh Zones появляется запись Bottom- Deforming(Рис.52). Некоторые части сетки почти не деформируются, но параметры деформации можно определить с помощью Zone Scale Info – в отельном интерфейсе Zone Scale Info необходимо скопировать параметры Minimum Length Scale, Maximum Length Scale и перенести параметры в Dynamic Mesh Zones(Рис.52). Create. Close. В падающем списке выбираем следующую часть динамической сетки contact_region_ contact_region3-Create-C и записываем в настройки параметры деформации (Рис.53,54).



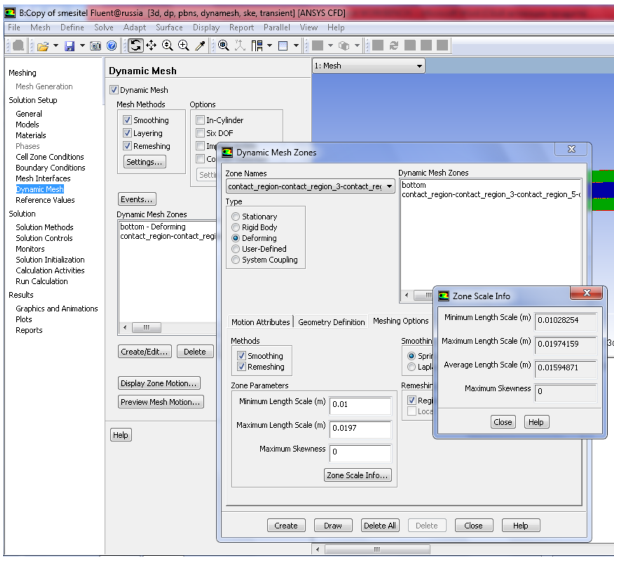


Рис.53 Рис.54

В некоторых элементах деформируемой сетки изменяются все три параметра деформации, в том числе Maximum Skewness, как например, на Рис.55.

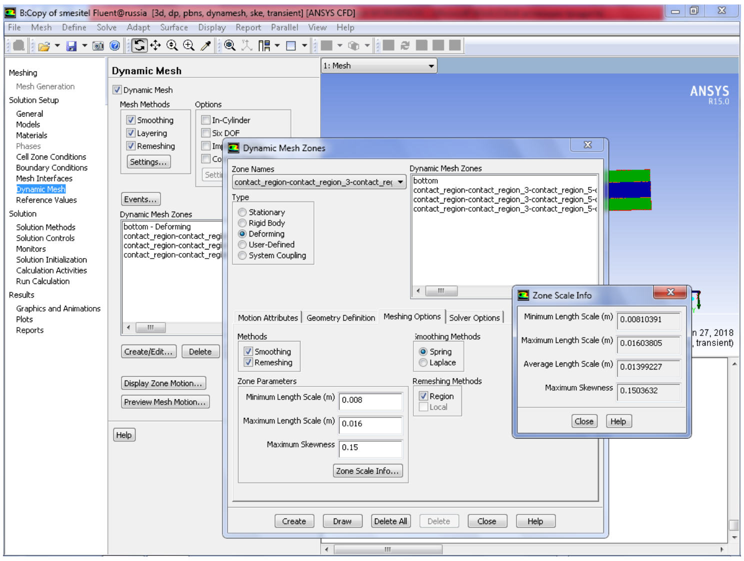


Рис.55

При определении элементов сетки интерьера(interior) получим сообщение о невозможности деформации данного элемента (Рис.56). Поэтому определяем элемент как недеформируемый (Рис.57).

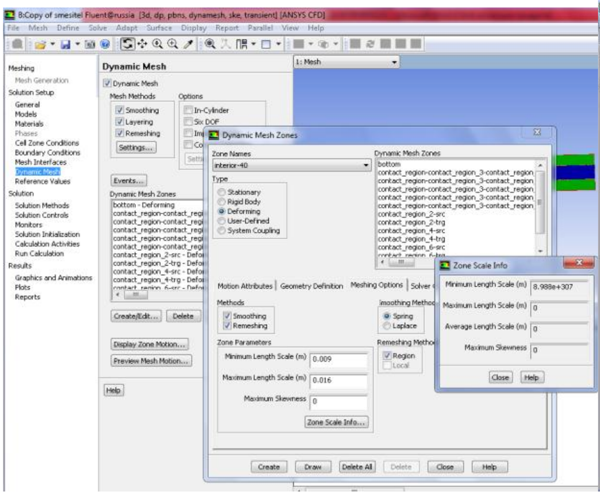


Рис.56

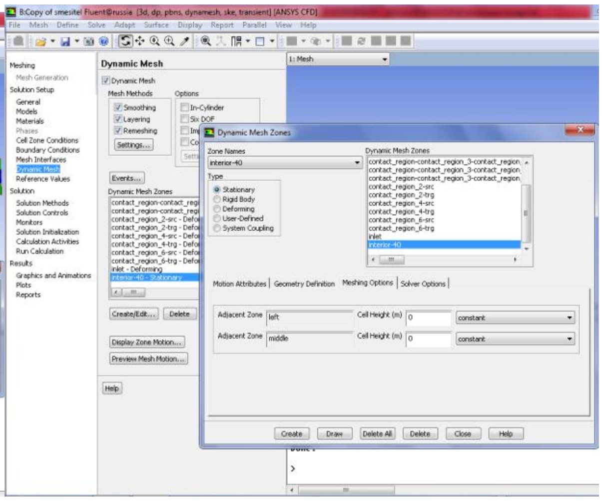


Рис.57

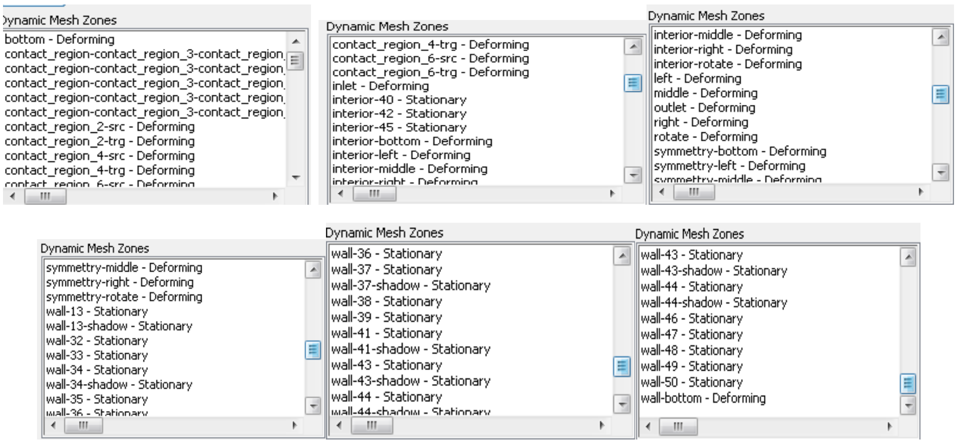



Рис.58

На Рис.58 указаны все элементы списка деформируемой либо стационарной сетки. Переходим в раздел Dynamic Mesh- Preview Mesh Motion(Рис.59) и устанавливаем параметры предварительного движения сетки, записи решения и анимации решения.

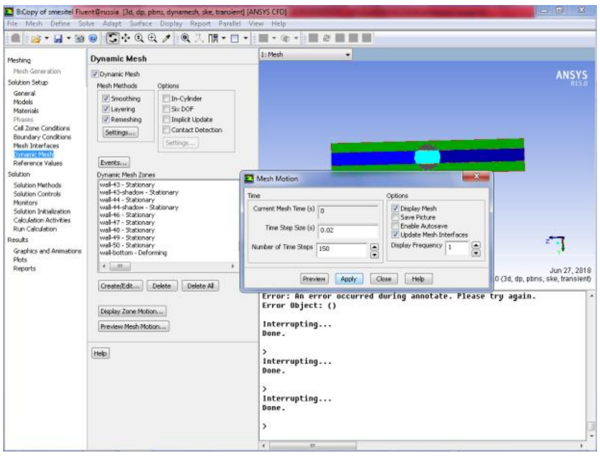


Рис.59

Current Mesh Time(s)-0, Time Step Size(s)-0.02 (временной интервал), Number of Time Steps (число интервалов записи)-150. Apply-Close(Рис.59).

**18 шаг.** В разделе Solution Setup – Solution – Solution Initialization устанавливаем параметры турбулентной кинетической энергии и турбулентной скорости диссипации 1%(Рис.60)

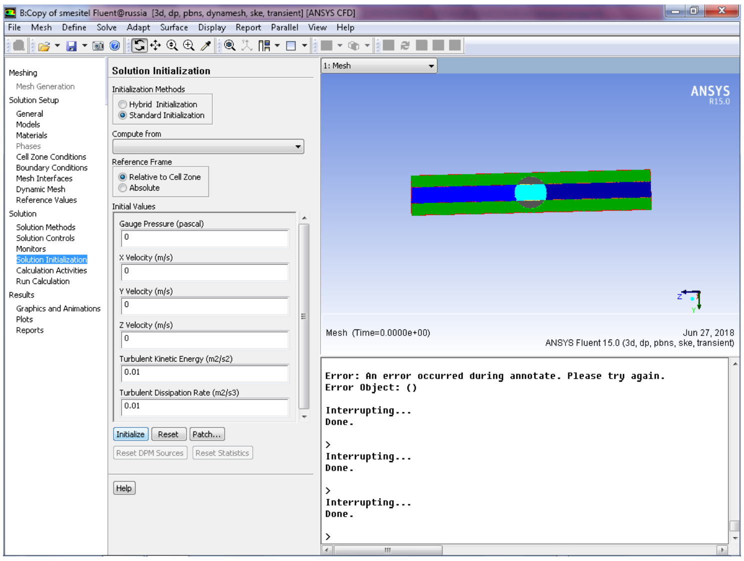



Рис.60

Запускаем начальный этап решения задачи –Initialize(Рис.60).

**19 шаг**. Настраиваем параметры записи и анимации, переходим в раздел Calculation Activities- Solution Activities – Solution Animation-Create/Edit. Указываем число анимации(Animation Sequences -7). Iteration - Time Step - Define. Window-2-Set(очистить текущее указанное окно). Display Tape – Contours (поле физических величин)Рис.61.

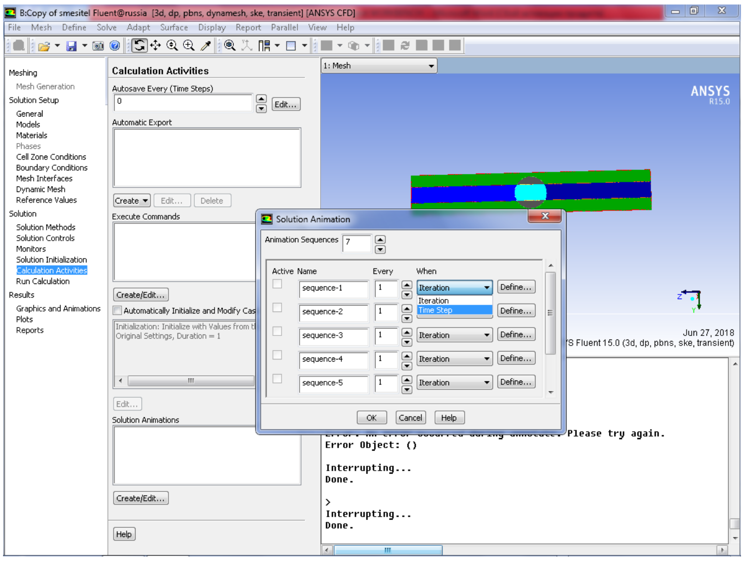



Рис.61

Выбираем поверхности построения поля interior-left, interior-right, interior-middle, interior-rotate, symmetry-bottom, symmetry-right, symmetry-left, symmetry-middle, symmetry-rotate(Рис.62).

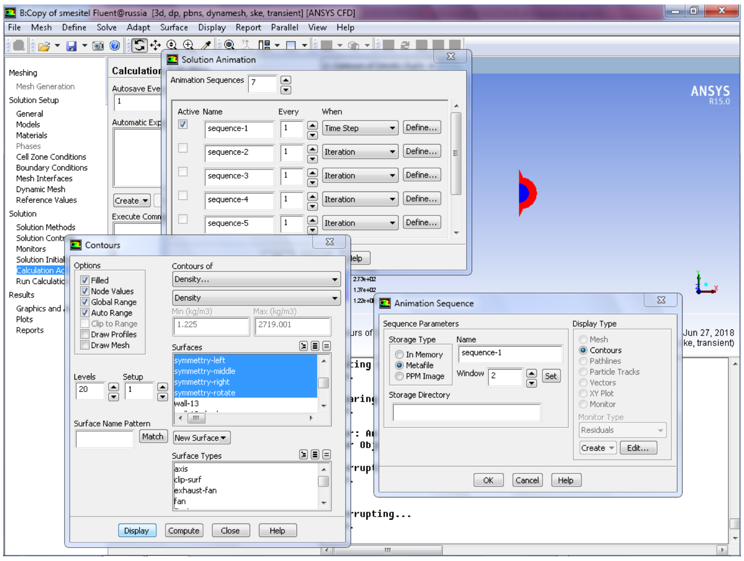


Рис.62

Display – Close. Ok. Поле с рисунком нужно развернуть в нужной плоскости стрелкой поворота, в результате получим Рис. 63. Значком+ на функциональной линейке можно выделить нужную часть рисунка и увеличить её в масштабе.

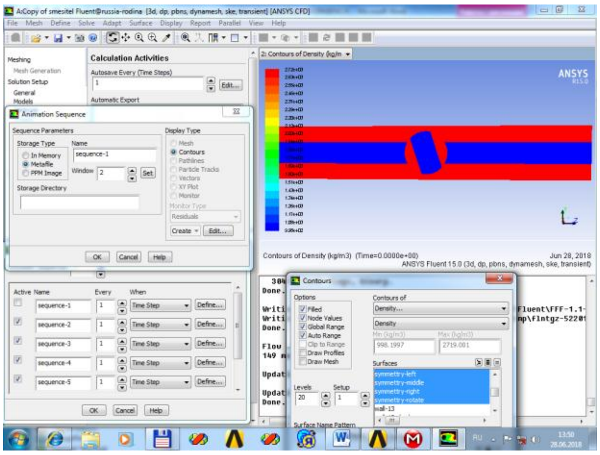


Рис.63

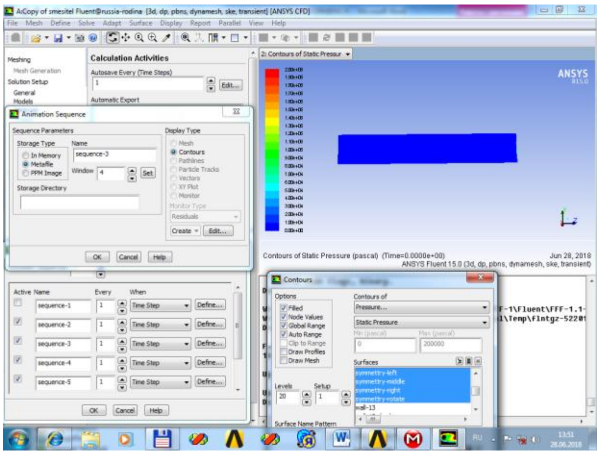
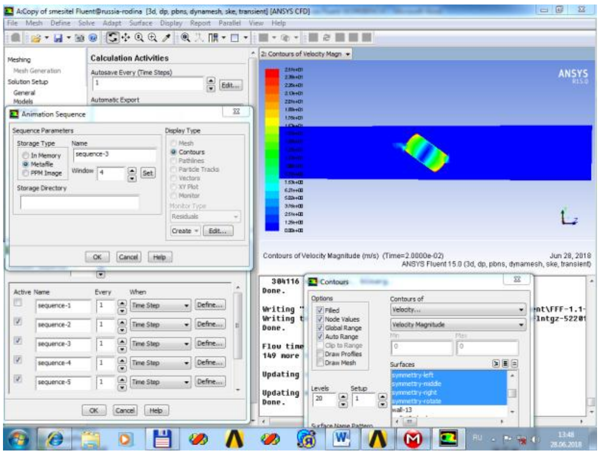


Рис.64

Аналогично можно построить поле давления(Pressure – Рис.64). Display – Close. Ok. А также поля модуля скорости (полной скорости)Velocity Magnitude(Рис.65). Display – Close. Ok. Поле скорости по координатным осям(x-Рис.66,y-Рис.67,z-Рис.68). Поле коэффициента турбулентной вязкости Рис.69.



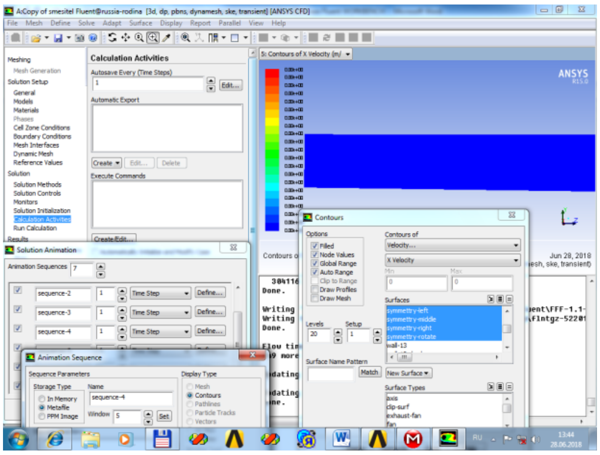
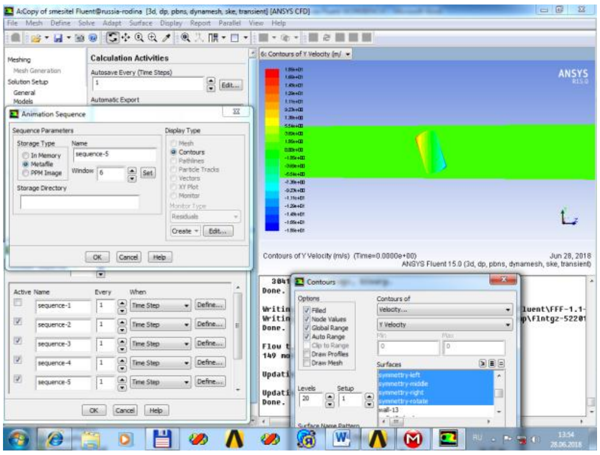


Рис.65 Рис.66



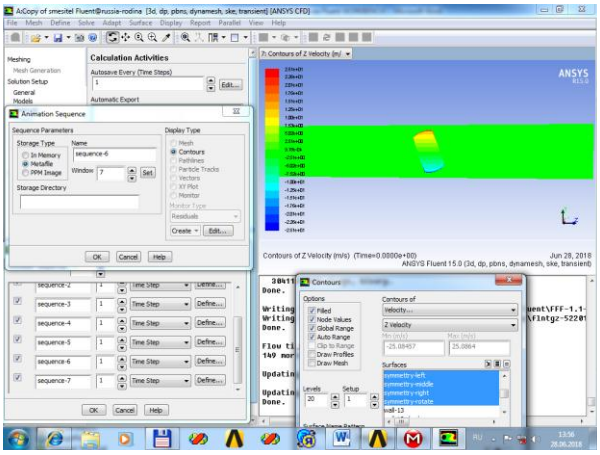
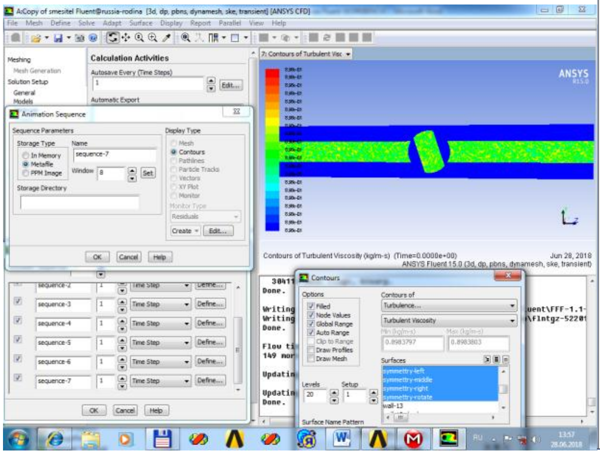


Рис.67 Рис.68



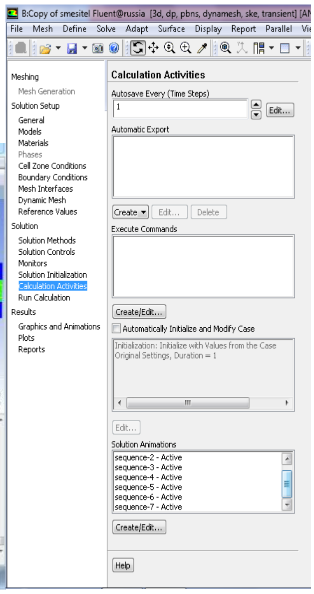


Рис.69 Рис.70

В результате активируются все 7 анимации Рис.70.

**20 шаг**. Переходим к запуску решателя. Для записи анимации проходим путь File-Rite-AutoSaved(Рис.71).

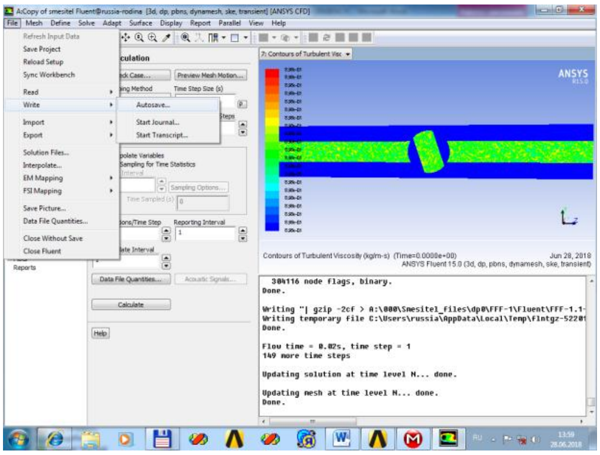
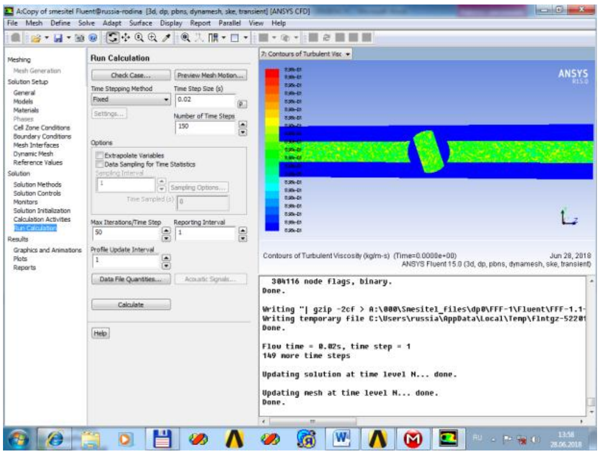
 

Рис.71 Рис.72

**21 шаг**. Переходим в раздел Run Calculate. Устанавливаем параметры число шагов 150, интервал записи 0.02с, максимальное число итераций 50(Рис.72). Запускаем решатель- Calculate.

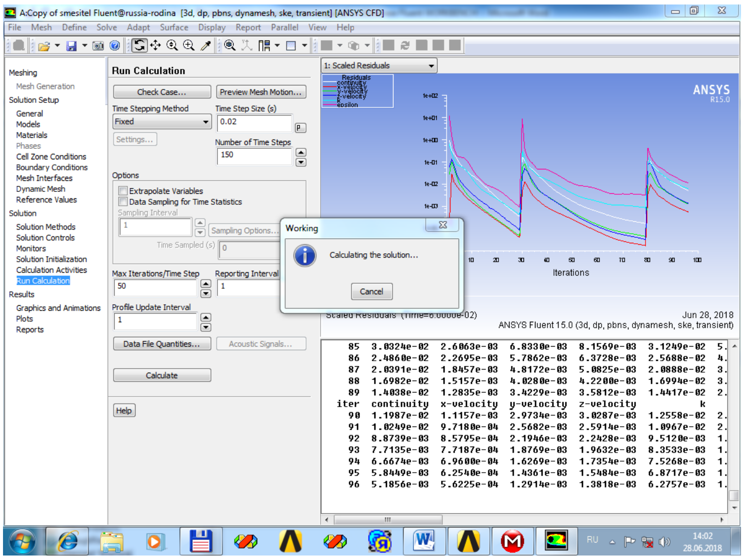



Рис.73

Вычисление невязки по всем переменным в системе уравнений гидродинамики (уравнение неразрывности,x,y,z компоненты скорости, невязки переменных k, epsilon в модели k-e(2eon)) можно просматривать в любой момент времени (Рис.73).

**22 шаг**. Активация анимации. Переходим в секцию Results-Graphics and Animation(Рис.74). В разделе выбираем путь Animations-Solution-Animation Play Back. Во вкладке Animation Frames выбираем тип графического файла MPEG. Запускаем запись Rite(Рис.75) . Записанный покадрово фильм для поля турбулентной вязкости содержится(sequence7) в папке FF1-Fluent- sequence7-mpeg.

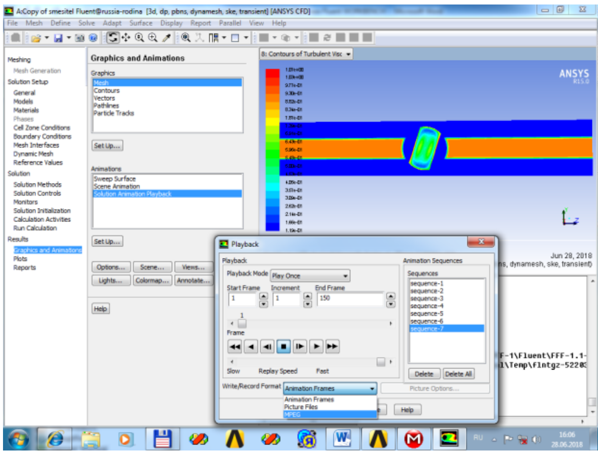


Рис.74

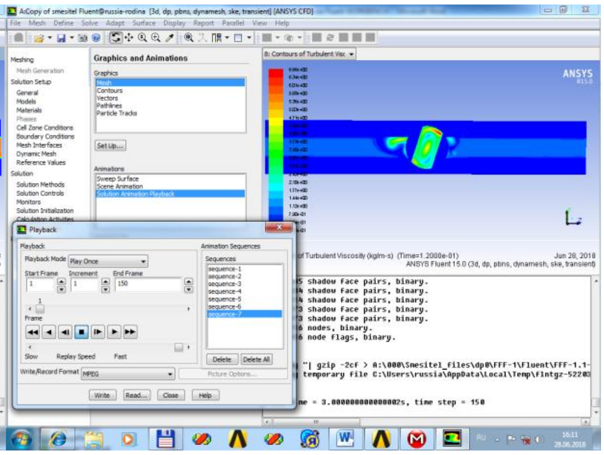
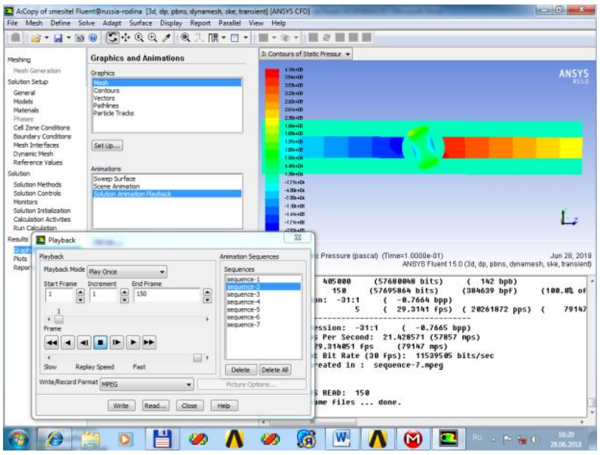
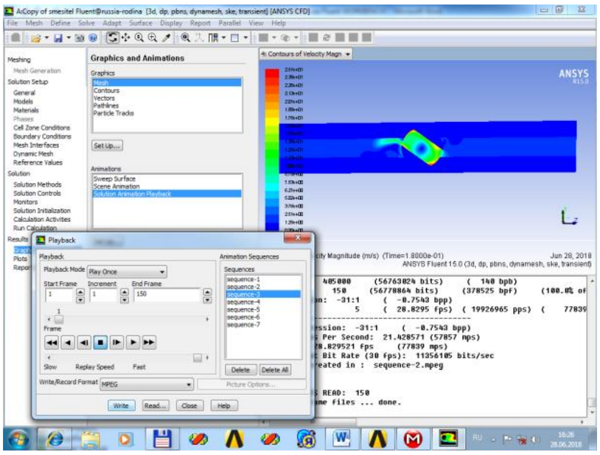


Рис.75

Аналогично можно получить файлы временных изменений физических полей, например динамику поля давления(sequence2)Рис.76 или динамику поля модуля полной скорости (sequence3)Рис.77, которые находятся по цепи вложений FF1-Fluent- sequence2mpeg (FF1-Fluent- sequence3-mpeg).





УДК 530.1

А.А. Соловьёв, О.А. Сперанская, Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов

ВРЕМЕННАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

*Научные руководители: Д.Ф. Пастухов, О.А. Сперанская*

*Полоцкий государственный университет, г. Полоцк, Республика Беларусь*

*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, г. Москва, Российская Федерация*

Anton_solovuoy@gmail.com,dmitrij.pastuhov@mail.ru,pulsar1900@mail.ru

В формировании гидродинамических явлений большой интерес представляет начальный промежуток времени их динамики. На важность инициализации нестационарной задачи указывала А.А. Сперанская, профессор Московского государственного университета [1, 2]. В гидродинамических задачах с вязкостью нет простых законов сохранения таких как, например, закон сохранения механической энергии. А в задачах с нелинейными уравнениями и диссипацией возможно явление самоорганизации систем [4]. Согласно И. Пригожину, динамику развития необратимых термодинамических систем определяет принцип минимизации скорости роста энтропии [4]. Проверим применимость принципа Пригожина к гидродинамической задаче, для чего предварительно численно решим её в оболочке ANSYS Fluent.

Рассмотрим гидродинамическую систему из последовательных периодически соединённых цилиндров большего диаметра 20 см и меньшего 10 см равной длины 50 см. В симметричной геометрической модели использовалось 7 цилиндров: 4 малого и 3 большего диаметров. Скорость воды на входной трубе равнялась 30 см/с. На этапе создания геометрии линии соединения между цилиндрами скруглялись параметром blend с фиксированным радиусом 0,5 мм. Для ускорения времени счёта в 2 раза решателем использовалась осевая симметрия модели. Параметры сетки выбирались по умолчанию со средним разрешением. В решателе нами использовалась стандартная модель $k-epsilon(2eqn)$ жидкости из двух уравнений (устойчивая в лабораторных задачах) с учётом уравнения обмена энергией. Выбран также нестационарный режим модели transient с временным шагом $\tau = 3\cdot 10^{-2}$с для сохранения поля скорости и поля температуры. Для анализа гидродинамической задачи с вязкостью можно пренебречь нагреванием жидкости, но важно учесть поле распределения скорости и турбулентной вязкости. Интенсивность турбулентности на входе и на выходе модели равна нулю.

Благодаря этому можно было выяснить механизм зарождения турбулентности во времени, обусловленный влиянием геометрии модели. Результаты численного решения задачи представлены на рисунках 1, 2, 3, 4 – суть поле скорости и поле турбулентной вязкости в моменты времени $t = 3 \cdot 10^{-2}; 1{,}56$ с.

На этапе решения использовалась двойная точность решения, когда решатель переходит к следующей временной итерации, если относительная погрешность по всем 8 переменным, входящим в систему гидродинамических уравнений, будет ниже $10^{-3}$. Поле турбулентной вязкости совпадало с полем эффективной вязкости, т.е. молекулярной вязкостью в задаче можно было пренебречь.

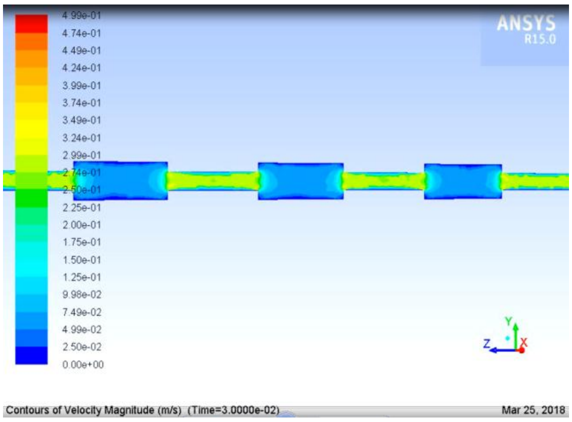



Рис.1. Поле скорости в момент времени $t = 3 \cdot 10^{-2}$ с.

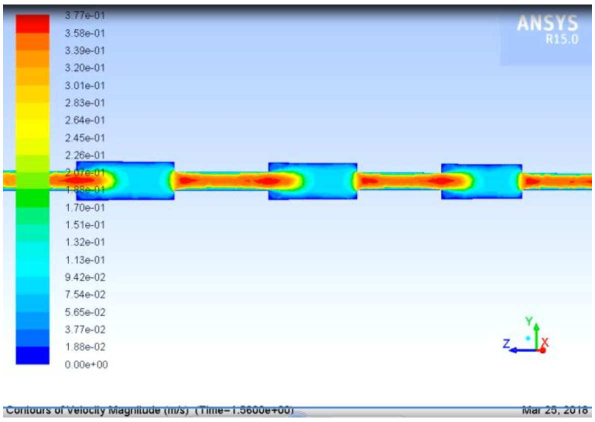



Рис.2. Поле скорости в момент времени $t = 1{,}56$ с.

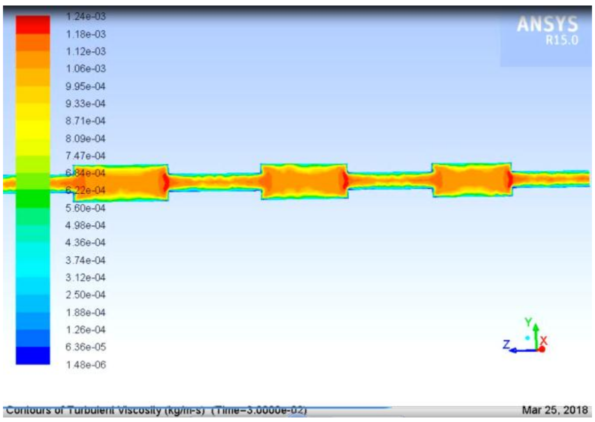


Рис. 3. Поле турбулентной вязкости в момент времени $t = 3 \cdot 10^{-2}$ с.

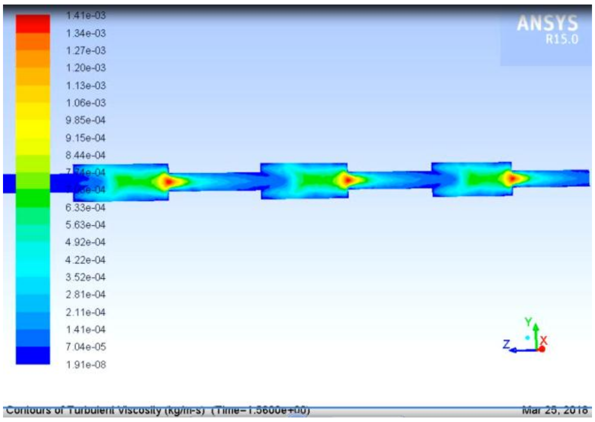



Рис. 4. Поле турбулентной вязкости в момент времени $t = 1{,}56$ с.

Используем функционал скорости роста энтропии в гидродинамической задаче по Л.Д. Ландау [3]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho s dV = \int \frac{k(\nabla T)^2}{T} dV + \int \frac{\eta}{2T}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{i,k}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 dV + \int \frac{\varsigma}{T}\left(\left(div\vec{v}\right)^2\right) dV =$$

$$= \int \frac{\eta}{2T}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{i,k}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 dV = \int \frac{\eta}{2T}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 \qquad (1)$$

Известно, что для несжимаемой жидкости $div\vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$ и температурное поле в задаче можно считать однородным $\nabla T = 0$. Запишем компоненты тензора напряжения в цилиндрической системе координат с учетом осевой симметрии [2] $v_\varphi = 0, \partial(\cdot)/\partial\varphi = 0$:

$$\sigma_{rr} = -p + 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r}, \sigma_{\varphi\varphi} = -p + 2\eta\frac{v_r}{r}, \sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi} = 0, \sigma_{zz} = -p + 2\eta\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\sigma_{zr} = \eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right),\ \sigma_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) \Leftrightarrow \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \frac{\sigma_{ik}}{\eta}.$$

Используем нулевое избыточное давление в модели $p = 0$, $\eta = \eta(r,z), \bar{v} = \bar{v}(r,z)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho s dV = \int \frac{\eta}{2T}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 dV = \int \frac{\eta}{2T}\left(4\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + 4\left(\frac{v_r}{r}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right)^2\right) dV =$$

$$= \int \frac{2\eta}{T}\left(\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{v_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right)^2\right) dV \approx$$

$$\approx 2\frac{\bar{\eta}}{\bar{T}}\left(\Delta v_r^{\,2}\left(\frac{2}{R^2} + \frac{1}{4l^2}\right) + \Delta v_z^{\,2}\left(\frac{1}{4R^2} + \frac{1}{l^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\Delta v_r \Delta v_z}{Rl}\right) V, V = 2l\pi R^2 \qquad (2)$$

где: $\Delta v_r = v_r(R) - v_r(0)$ – разность скорости частиц жидкости в радиальном направлении на стенке и на оси цилиндра, $\Delta v_z = v_z(l) - v_z(0)$ – разность скорости частиц жидкости на оси в центре цилиндра и на правом крае, $R = 10;5$ см радиусы большего и меньшего цилиндров, $l = 25$ см – половина высоты цилиндра, $V = 2l\pi R^2$ – объём цилиндра. $\overline{\eta}, \overline{T}$ – среднее значение турбулентной вязкости и абсолютной температуры по области. Учитывая периодичность модели, рассчитаем скорость роста энтропии, используя формулу (2) для одного узкого и одного широкого цилиндров, образующих периодический элемент модели.

В момент времени $t = 3 \cdot 10^{-2}$ с, запишем данные рисунков 1, 3

$$(\Delta v_r)_1 = -7{,}5 \cdot 10^{-2}\, м/с, R_1 = 0{,}1 м, l = 0{,}25 м, (\Delta v_l)_1 = -2 \cdot 10^{-2}\, м/с, \overline{\eta_1} = 1.18 \cdot 10^{-3}\, кг/м \cdot с$$

$$(\Delta v_r)_2 = -0{,}3 м/с, R_2 = 0{,}05 м, l = 0{,}25 м, (\Delta v_l)_2 = 0 м/с, \overline{\eta_2} = 1.18 \cdot 10^{-3}\, кг/м \cdot с, \overline{T} = 300K,$$

ось z на рисунках направлена справа налево.

Нижние индексы: 1 – соответствуют цилиндру радиуса $R_1 = 0{,}1 м$, 2 –соответствует цилиндру радиуса $R_2 = 0{,}05 м$. По формуле(2) получим:

$$\dot{S} = 2\frac{\overline{\eta_1}}{\overline{T}_1}\left((\Delta v_r)_1^2\left(\frac{2}{R_1^2} + \frac{1}{4l^2}\right) + (\Delta v_z)_1^2\left(\frac{1}{4R_1^2} + \frac{1}{l^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{(\Delta v_r)_1(\Delta v_z)_1}{R_1 l}\right)2l\pi R_1^2 +$$

$$+2\frac{\overline{\eta_2}}{\overline{T}_2}\left((\Delta v_r)_2^2\left(\frac{2}{R_2^2} + \frac{1}{4l^2}\right) + (\Delta v_z)_2^2\left(\frac{1}{4R_2^2} + \frac{1}{l^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{(\Delta v_r)_2(\Delta v_z)_2}{R_2 l}\right)2l\pi R_2^2 =$$

$$= 2\frac{1.18 \cdot 10^{-3}}{300}\left(\left(-7{,}5 \cdot 10^{-2}\right)^2\left(\frac{2}{0{,}1^2} + \frac{1}{4 \cdot 0{,}25^2}\right) + \left(-2 \cdot 10^{-2}\right)^2\left(\frac{1}{4 \cdot 0{,}1^2} + \frac{1}{0{,}25^2}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\left(-7{,}5 \cdot 10^{-2}\right)\left(-2 \cdot 10^{-2}\right)}{0{,}1 \cdot 0{,}25}\right)2 \cdot 0{,}25\pi(0{,}1)^2 + 2\frac{1.18 \cdot 10^{-3}}{300}(-0{,}3)^2\left(\frac{2}{0{,}05^2} + \frac{1}{4 \cdot 0{,}25^2}\right)2 \cdot 0{,}25\pi(0{,}05)^2 = 2{,}35 \cdot 10^{-6}$$

Дж/(с К).

Аналогично для момента времени $t = 1{,}56$ с запишем данные рисунков 2, 4:

$$(\Delta v_r)_1 = -7{,}5 \cdot 10^{-2}\, м/с, R_1 = 0{,}1 м, l = 0{,}25 м, (\Delta v_l)_1 = -0{,}15 м/с, \overline{\eta_1} = 4 \cdot 10^{-4}\, кг/м \cdot с$$

$$(\Delta v_r)_2 = -0{,}2 м/с, R_2 = 0{,}05 м, l = 0{,}25 м, (\Delta v_l)_2 = 0 м/с, \overline{\eta_2} = 2 \cdot 10^{-4}\, кг/м \cdot с, \overline{T} = 300K.$$

По формуле (2) в момент времени $t = 1{,}56$ с получим: $\dot{S} \approx 2{,}6 \cdot 10^{-7}$ Дж/(с К).

Сравнение рисунков 2 и 4 показывает, что у правого края каждого цилиндра большего радиуса образуется сферическая область с диаметром равному диаметру меньшего цилиндра с большим значением турбулентной вязкости и большим значением градиента скорости. Эта сферическая область максимально локализована, неоднородна и является переходной между цилиндрами различного радиуса. Рассчитаем в ней скорость роста энтропии:

$$\dot{S} \approx 2\frac{\overline{\eta_1}}{\overline{T_1}}\left(\frac{(\Delta v_r)^2}{R_2^2}\right)\frac{4}{3}\pi R_2^3 = \frac{8}{3}\pi(\Delta v_r)^2 R_2 \frac{\overline{\eta_1}}{\overline{T_1}} = \frac{8}{3}\pi \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}05 \cdot \frac{1{,}4\cdot 10^{-3}}{300} \approx 4{,}4\cdot 10^{-8} \text{ Дж/(с К).}$$

Сравнивая три полученных результата скорости роста энтропии в гидродинамической задаче, отметим, что максимальная скорость роста энтропии в системе возникает в начальный промежуток времени $t = 3\cdot 10^{-2}$ с. В течение этого интервала жидкость в каждом цилиндре ведёт себя как единое целое. Это подтверждает однородное поле вязкости с высоким значением $\eta = 1{,}1\cdot 10^{-3}$ кг/(м с) по всему объёму системы и однородным полем скорости в каждом цилиндре (с разными значениями скорости в цилиндрах большего и меньшего диаметров). Полученное численное решение показывает, как система реагирует на движение жидкости – сначала происходит разделение жидкости на слои вдоль движения потока, поскольку центральный однородный осевой слой имеет большее значение турбулентной вязкости, чем слой жидкости, примыкающий к стенкам. Т.е. центральный слой ведёт себя как более «жёсткая», вязкая среда, чем жидкость у стенки цилиндра.

Спустя 1,56 с, как видно из рисунков 2 ,4, происходит разделение поля вязкости в объёмах малого и большого цилиндров в направлении поперёк потоку. Действительно, нужно больше времени, чтобы вихревые образования посредством диффузии прошли расстояние сравнимое с высотой цилиндра. Диффузия вихрей в поперечном направлении происходит раньше, так как отношение радиуса к высоте цилиндра равно 1:5 (1:10). Тогда к моменту времени 1,56 с скорость роста энтропии в гидродинамической системе уменьшается в $\frac{2{,}35\cdot 10^{-6}}{2{,}6\cdot 10^{-7}} \approx 8{,}9$ раз. Сферическая область, в которой наибольшие значения коэффициента турбулентной вязкости и градиента скорости, от которых зависит скорость роста энтропии, имеет малый объём, что также снижает интеграл согласно формуле (2). В такой локализованной области значение скорости роста энтропии спустя 1,56 с меньше чем полное начальное значение во всей системы в $\frac{2{,}35\cdot 10^{-6}}{4{,}4\cdot 10^{-8}} \approx 53{,}4$ раза.

Таким образом, решённая нами численно задача показывает, что временная последовательность состояний в гидродинамической системе заключается в последовательном приведении в действие механизмов, уменьшающих скорость роста энтропии со временем. То есть и к гидродинамическим системам применим принцип И. Пригожина.

**Список использованных источников**

1.Общая геофизика: Учебное пособие / Под ред.В.А. Магницкого. – М.: Изд-во МГУ, 1995. – 317с.: ил.

2. Анисимова Е.П., Пастухов Д.Ф., Сперанская А.А., Сперанская О.А. О роли аэрации в формировании термического режима геотермального озера. // Известия РАН. Физика атмосферы и океана.1996. Т.32.№2. С 267–273.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10т. Т.6. Гидродинамика. – 5-ое изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 736 с.

4. Г. Николис, И. Пригожин. Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипации структур и упорядоченность через флуктуации. – М.: Мир. 1979. 512 с.

5. Материалы 4 научно-практической конференции (часть 1). Прикладная математика и информатика: Современные исследования в области естественных и технических наук А.А.Соловьёв, О.А.Сперанская, Д.Ф.Пастухов, Ю.Ф.Пастухов Временная последовательность состояний системы в гидродинамических задачах. Тольятти,2018,стр. 496-502.

УДК 519.6 МОДЕЛИРОВАНИЕ БЫСТРОПЕРИОДИЧЕСКОГО ПРЕРЫВАНИЯ ПОТОКА ЖИДКОСТИ ПОД ДАВЛЕНИЕМ В ОБОЛОЧКЕ ANSYS FLUENT

*Сперанская О.А. Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Волосова Н.К. Московский государственный технический университет им Э.М.Баумана(г.Москва),Российская Федерация*

*Пастухов Д.Ф.,Пастухов Ю.Ф.,Соловьёв А.А.,Голубева О.В.,Ехилевский С.Г., Радкевич Д.С. Полоцкий государственный университет, Республика Беларусь*

Математическое моделирование включает анализ математических уравнений [1-4]. Результатом моделирования является удобная геометрическая конструкция, формула, простой алгоритм, идеальный по сравнению с исходным явлением, но сильно упрощающий исходную постановку математической задачи. Модель явления, например, можно получить анализом экспериментальных данных (классификацией 60 профилей температуры при построении формулы термодинамического потенциала геотермального озера)[3]. Применяя метод теории размерностей[4], можно свести любую задачу экономии строительных материалов с максимальным радиационным ослаблением к задаче линейного программирования для комбинированной стенки толщиной 1м. Затем используя графики полученного численного решения ЗЛП библиотекой IMSL FORTRAN, масштабированием (растяжением) графиков для толщины 1м просто получить графики решения для произвольной толщины стенки[4]. Можно заменить натурный эксперимент численным экспериментом в оболочке ANSYS , как и сделано нами в данной работе, что существенно экономит время и финансовые затраты.

На рисунках 1,2 нами построена геометрия и сетка гидродинамической задачи в ANSYS Fluent для моделирования быстропериодического прерывания движения жидкости по трубе длиной 6м круглого сечения и диаметром 40см. В одной части трубы(рис.1) вода находится под избыточным давлением 2атм(200000 Па) и при открытом шаровом прерывателе (с диаметром сферы 80см) давление беспрепятственно передаётся в другую часть трубы, порождая общее движение воды вдоль оси z. В прерывателе имеется полый цилиндр равного диаметра 40 см и соосный с основной трубой. При изменении ориентации шарового прерывателя на $90^0$ направленное движение воды вдоль оси z прекращается и динамика воды в правой части трубы определяется её начальным состоянием в момент прерывания и контактным увлечением вращающимся шаровым прерывателем при отсутствии избыточного давления. При численном моделировании выбрана сетка, которая имеет среднее разрешение с максимальным размером ячейки 2см и минимальным размером ячейки1мм.

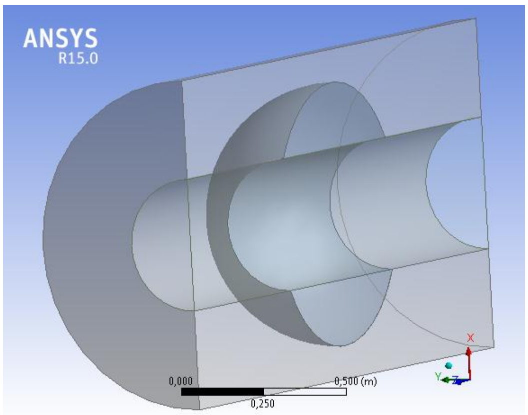



Рис.1. Геометрия модели

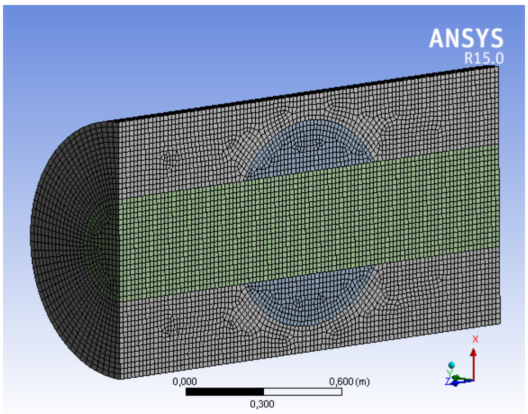
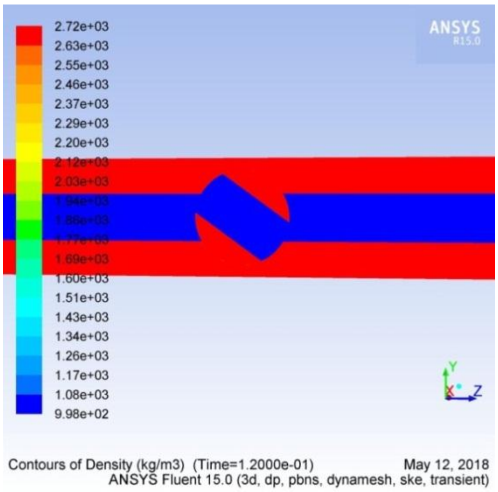



Рис.2. Построение сетки модели

В решателе дополнительно использовались функции нестационарной модели, функции сетки с подвижными стенками и функции деформируемой во времени сетки. Для воды использовалась $k-\varepsilon(2\ eqation)$ модель, которая устойчива в лабораторных гидродинамических задачах. Мы предположили, что стенки труб имели шероховатость высотой 1мм.



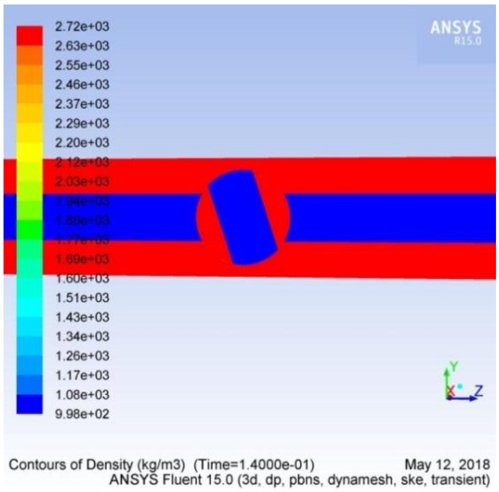
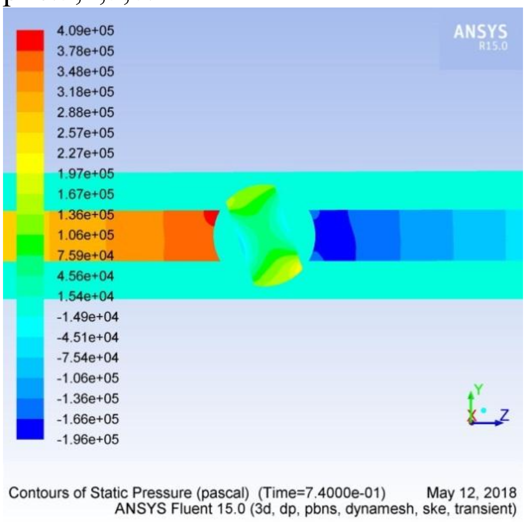




Рис.3. Поле плотности во 2 фазе

Рис.4. Поле плотности в 3 фазе

Поворот прерывателя с частотой вращения 5 об/с($10\pi$ *рад*/*с*) записывался с интервалом времени 0,02с для 10 фаз угла поворота. При любой ориентации прерывателя области с жидкостью во всех частях трубы оставались связными, т.е. вода не дробилась на части, не распадалась на подобласти, несмотря на то, что существуют моменты времени, когда в правой части модели возникает отрицательное давление, как видно из рис.3,4,5,6.



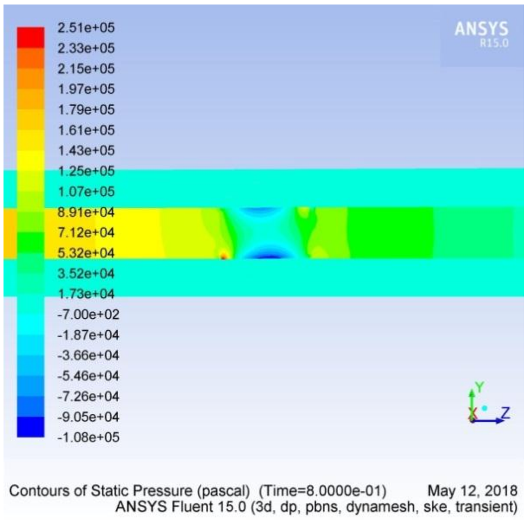




Рис.5. Поле давления во 2 фазе

Рис.6. Поле давления в 1(6) фазах

Во второй фазе перепад давления на прерыватель составляет 6 атм(рис.5), а градиент давления и в правой и в левой части трубы имеет положительное направление на ось z. В 1(6) фазах градиент давления отрицательный со значением -0,7 атм/3м(рис.6). В начальный промежуток времени 0 -0,5 с вниз по потоку возникает тонкая структура на гребнях максимального значения профиля вертикальной компоненты скорости $v_y$ (рис.7), вероятно, образуется стоячая волна давления, которая порождает мелкомасштабную турбулентность.

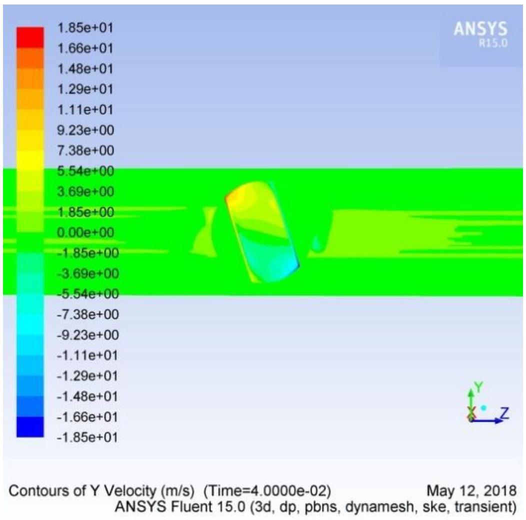



Рис.7. Поле скорости $v_y$ в момент $t = 0{,}04$ с

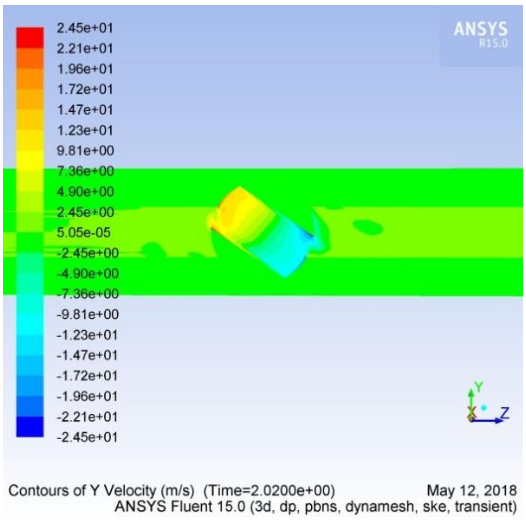



Рис.8. Поле скорости $v_y$ в момент $t = 2{,}02$ с

На рис.9,10 видно как зарождается вихрь на нижней стенке трубы справа от прерывателя на фоне общего потока. В момент времени $t = 0{,}1$ с вихрь значительно меньше диаметра трубы, но к моменту $t = 3$с вихрь уже простирается вдоль оси z на несколько её диаметров.

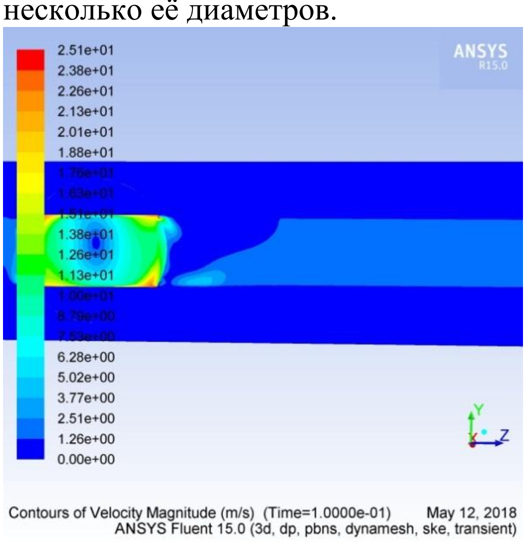



Рис.9. Поле модуля скорости ($t = 0{,}1$ с)

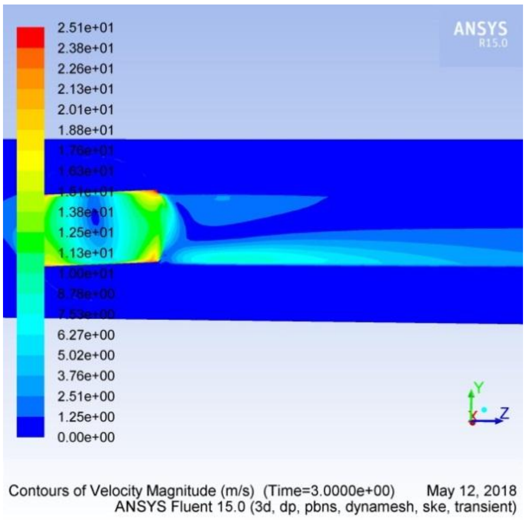
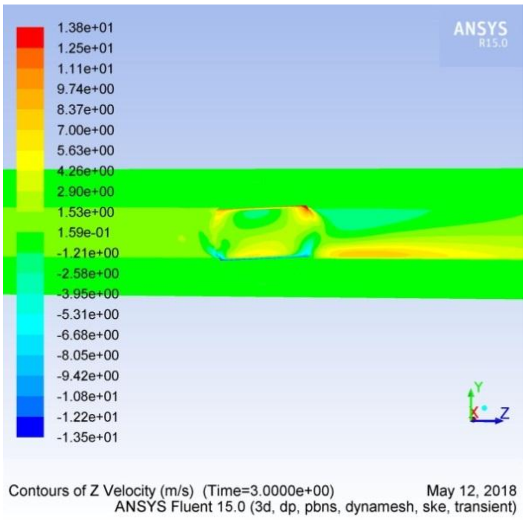



Рис.10. Поле модуля скорости ($t = 3$с)

На рис.11 прослеживается возвратное движение жидкости справа от прерывателя на верхней стенке трубы противоположно оси z (на нижней стенке оно вдоль оси z), что также указывает на присутствие крупного вихря с вращением встречным к вращению прерывателя. На поле турбулентной вязкости развитого турбулентного движения на рис.12 заметен гигантский вихрь (по семейству концентрических овалов равной вязкости). Число Рейнольдса в модели равно 4000000. Но теоретическое критическое число Рейнольдса для трубы равно 2300. Как показал Л.Д. Ландау[2], при больших R движение завихрённой жидкости можно описать как потенциальное движение (вдали от стенки).



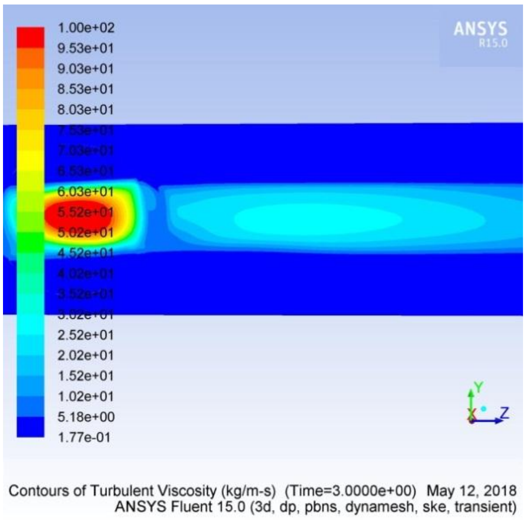




Рис.11. Поле осевой скорости $v_z$ $(t=3\text{с})$ Рис.12. Поле турбулентной вязкости $\mu$ $(t=3\text{с})$

$R=\dfrac{vD}{\nu}=\dfrac{10м/с\cdot 0{,}4м}{10^{-6}м^2/с}=4\cdot 10^6>>2300$. В случае ламинарного течения на стенках трубы движение частиц жидкости отсутствует (условие прилипания) и образуется вязкий пограничный слой (ПС), в котором на расстоянии $\delta$ скорость скачком, но монотонно, увеличивается от 0 до скорости осреднённого движения v. Однако, даже в переходной зоне от ламинарного движения к турбулентному, как показала профессор Московского университета Сперанская А.А., происходит периодический отрыв ПС[1]. Турбулентный вихрь имеет скорость частиц у стенки превышающих скорость осредненного движения, т.е. скорость монотонно падает от максимального значения $v_{zm}$ на вязком подслое у стенки до минимальной скорости осреднённого движения v на расстоянии $\delta$ от стенки.

В цилиндрической системе координат уравнение динамики на ось z для вязкой жидкости имеет вид[2]:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\varphi}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)\qquad(1)$$

Тогда в стационарном случае $\dfrac{\partial v_z}{\partial t}=0$,пренебрегаем силами инерции, в приближении аксиальной симметрии $v_r<<v_z,\dfrac{\partial v_z}{\partial\varphi}=0,\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial\varphi^2}=0,\partial r\sim\delta<<z$. В итоге в уравнении остаются 2 слагаемых - силы вязкого трения и сила обусловленная градиентом давления для 1(6) фаз вращения, уравновешивающие друг друга вдоль оси цилиндра. Оценим первый и второй дифференциалы монотонно изменяющегося профиля скорости в пограничном слое

$$|\partial v_z|=|v_{zm}-v|\le|v_{zm}|,|\partial^2 v_z|=|v_z(R)+v_z(R-\delta)-2v_z(R-\delta/2)|=|v_{zm}+v-2v_z(R-\delta/2)|.$$

$$v_{zm}\ge v_z(R-\delta/2)\ge v>0\Leftrightarrow-2v_{zm}\le-2v_z(R-\delta/2)\le-2v,\Leftrightarrow-v_{zm}<-2v_{zm}+v_{zm}+v\le$$

$$\le-2v_z(R-\delta/2)+v_{zm}+v\le-2v+v+v_{zm}<v_{zm}\Leftrightarrow|-2v_z(R-\delta/2)+v_{zm}+v|\equiv|\partial^2 v_z|<v_{zm}$$

Тогда получим

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right),\partial^2 v_z\approx v_z,\partial r\approx\delta,r\approx R,\overline{\frac{\partial p}{\partial z}}\approx\frac{\Delta p_z}{z},v(R)=v_{zm},v(R-\delta)=v<<v_{zm}\ (2)$$

Усредняя по объёму ПС уравнение (2) , получим уравнение (3)

$$\frac{\Delta p_z}{z}=\frac{\mu\overline{\partial^2 v_z}}{\delta^2}\approx\frac{\mu v_{zm}}{\delta^2}\Rightarrow\delta(z)\approx\sqrt{\frac{\mu z v_{zm}}{\Delta p_z}}=\sqrt{\frac{30кг/мс\cdot 3м\cdot 8{,}8м/с}{70000Па}}\approx 10{,}6см\qquad(3)$$

В последней оценке использовались значения профилей рис.6( $\Delta p_z = 70000 Па$ ), рис.12( $\mu = 30 кг/мс$ ), рис.1 ( $z = 3м$ ), рис.10( $v_{zm} = 8{,}8 м/с$ ). Толщина ПС $\delta \approx 10{,}6 см$ по порядку величины согласуется с профилем рис.10( $\delta \approx R = 20 см$ ). Учёт сил инерции дает такой же вклад $\delta \sim 10 см$ . Кроме того, из формулы(3) следует зависимость толщины турбулентного ПС $\delta$ от расстояния $z$ по потоку $\delta(z) \approx \sqrt{\frac{\mu v_{zm}}{\Delta p_z}} \sqrt{z} = C\sqrt{z}$ ,т.е. закон квадратного корня из z, закон также подтверждает рис.10 (изолиния $v(z, y) = 1{,}25 м/с = const$ ). Рисунки 9,10,11,12 экспериментально доказывают результат работы [1], а именно, турбулентные вихри рождаются исключительно на стенках модели при движении жидкости.

Полученные модельные результаты могут применяться для тестирования узлов оборудования трубопроводной сети на прочность под действием длительного быстропеременного давления для транспорта нефти, воды и других жидкостей.

Литература

1.Сперанская А. А. Пограничные слои в геофизической гидродинамике. Диссертация доктора физико-математических наук: 01.04.12.-Москва, 1982.-345 с.: ил. Геофизика.

2.Ландау Л.Д., Лифшиц М.Е. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Т.6. Гидродинамика.-М.:Физматлит,2001.-736 с.

3.Пастухов Д.Ф. Классификация профилей температуры в плюс – минус одно сантиметровом слое от поверхности раздела геотермального озера. Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия.1995. №6. С 85-89.

4.Голубева О.В., Ехилевский С.Г., Федченко Т.Н., Лесовая Т.Ю., Зязюля П.В., Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. Метод подобия в однопараметрических задачах линейного программирования. Модернизация Российской экономики. Прогнозы и реальность. Сборник научных трудов 2 международной научно – практической конференции. – СПб.: Издательство Санкт-Петербургского академического университета,2016. С 90-95.

5. Сперанская О.А. Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Волосова Н.К. Московский государственный технический университет им Н.Э.Баумана(г.Москва),Российская Федерация, Пастухов Д.Ф.,Пастухов Ю.Ф.,Соловьёв А.А.,Голубева О.В.,Ехилевский С.Г.,Радкевич Д.С. Полоцкий государственный университет, Республика Беларусь. Научно – працктическая конференция информационно-коммуникационные технологии: достижения, проблемы,инновации(ИКТ -2018).Новополоцк.С.73-79.

**ЛИТЕРАТУРА**

1.Бахвалов Н.С. Численные методы. - М.:Наука, 1975.Андерсон Д. Дискретная математика и комбинаторика.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 960 с.: ил.

2.Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – 6-е изд. – М.:БИНОМ. Лаборатория знаний,2008.

3.Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.:Изд. Наука,1977.

4.Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях: учебное пособие. – М.:БИНОМ. Лаборатория знаний,2010. – 240 с.

5.Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.:Наука, 1983.

6. Самарский А.А., Вабишевич П.Н., Самарская Е.А. Задачи и упражнения по численным методам. – М.: Эдиториал УРСС, 2000.

7.Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.:Наука, 1980.

8.Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.:Наука,1984.

9.Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. – М.:Мир, 1980.

10.Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.:ФИЗМАТЛИТ,1962.

11.Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.

12.Алгоритмы. Просто как дважды два / И. В. Красиков, И. Е. Красикова. — М.: Эксмо, 2007. — 256 с.

13.Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.:Наука, 2008.

14.Самарский А.А., Вабишевич П.Н. Численные методы обратных задач математической физики. – М.:Издательство ЛКИ, 2014.- 480 с.

15.Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. Т. 2: Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 728—392 с, ил.

16.Бахвалов Н.С., Корнев А.А., Чижонков Е.В. Численные методы. Решения задач и упражнения. – М.:Дрофа.2009.

17.Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. – М.:Наука, 1977.

18. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. – М.:Наука, 1970.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ. ЛЕКЦИИ. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ.

Пастухов Дмитрий Феликсович,
кандидат физико – математических наук

Пастухов Юрий Феликсович,
кандидат физико-математических наук

Полоцкий государственный университет

2019