УДК 514

ТЕНЗОР ОБОБЩЕННОЙ ЭНЕРГИИ

ПОЛОЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ю.Ф. ПАСТУХОВ, Д.Ф. ПАСТУХОВ, С.В.ЧЕРНОВ

Аннотация: В работе доказана инвариантность энергии ранга n системы, состояние которой описывается гладкой функцией, определенной в расслоенном пространстве скоростей $L: T^p X_m \to \Re \quad p \le n$.

$L(x,..., \overset{(n)}{x})$, $p^k_{i,n}$, $H_n(L,x)$ -локальная запись функции L, импульсов $k-ого$ порядка и энергии ранга n соответственно при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

$$H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x, \dot{x}..., \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^k_{i,n} \overset{(k)i}{x}$$

$\bar{L}(\bar{x},..., \overset{(n)}{\bar{x}})$, $\overline{p^j_{k,n}}$, $\bar{H}_n(\bar{L},\bar{x})$ -локальная запись функции L, импульсов $k-ого$ порядка и энергии ранга n соответственно при выборе локальных координат $(\bar{x})$ в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

$$\bar{H}_n(\bar{L},\bar{x}) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) = \bar{L}(\bar{x},..., \overset{(n)}{\bar{x}}) + \sum_{i=1}^{m} \overline{p^i_{k,n}} \overset{(k)i}{\bar{x}} \quad \text{Тогда} \quad H(L,x,n) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)$$

Ключевые слова: уравнения Эйлера-Лагранжа, гладкие многообразия, расслоенное пространство скоростей, импульс системы, тензор энергии, тензор обобщенного импульса, невырожденная функция

Введение.

Фундаментальность законов сохранения заключается в их универсальности. Они справедливы при изучении любых физических процессов (механических, тепловых, электромагнитных и др.). Они одинаково применимы в релятивистском и нерелятивистском движении, в микромире, где справедливы квантовые представления, и в макромире, с его классическими представлениями.

Законы сохранения имеют значение не только в механике, но и в физике вообще. Научное и методологическое значение законов сохранения определяет их исключительная общность и универсальность. Благодаря той особой роли, которую играют законы сохранения в физике, они являются важнейшим элементом современной научной картины мира.

Между основным уравнением динамики и законами сохранения имеется принципиальная разница. Законы динамики дают нам представление о детальном ходе процесса. Так, если задана сила, действующая на материальную точку и начальные условия, то можно найти закон движения, траекторию, величину и направление скорости в любой момент времени и т. п. Законы же сохранения не дают нам прямых указаний на то, как должен идти тот или иной процесс. Они говорят лишь о том, какие процессы запрещены и потому в природе не происходят.
В начале 20 века Эмми Нетер доказала важную теорему, которая утверждает, что всякому непрерывному преобразованию координат с заданным законом преобразования соответствует некоторая сохраняющаяся величина (инвариант преобразования). Поскольку преобразования координат тесно связаны со свойствами симметрии пространства и времени (однородностью, изотропностью пространства и однородностью времени), то каждому свойству симметрии пространства и времени должен соответствовать определенный закон сохранения. С однородностью пространства, то есть с симметрией законов физики по отношению к пространственным сдвигам начала координат, связан закон сохранения импульса. С изотропностью пространства, то есть с симметрией относительно поворота системы координат в пространстве, связан закон сохранения момента импульса. Аналогично представление об однородности времени (симметрии по отношению к сдвигам времени) приводит к закону сохранения энергии.

Значение теоремы Нетер не ограничивается только тем, что она устанавливает связь классических законов сохранения с видами симметрии, имеющими геометрическую природу. При наличии в физической системе симметрий другого рода, не связанных со свойствами пространства и времени, теорема Нетер позволяет установить другие законы сохранения. И наоборот, всякий закон сохранения связан с некоторой определенной симметрией системы.

Дифференциально-геометрическое рассмотрение импульса-энергии в физической и математической постановке изложен в литературе [1-8,12]. Свойства тензора энергии-импульса при простейших линейных преобразованиях координат – времени объясняет законы сохранения импульса в макроскопической системе. Но тензор энергии-импульса в дифференциальной форме является инвариантным относительно произвольного невырожденного преобразования координат, что приводит к локальным законам сохранения энергии-импульса, например, в физике элементарных частиц. Функция Лагранжа определяет некоторую вариационную задачу, например, минимизацию интеграла действия в механической системе и динамику этой системы (уравнения Эйлера-Лагранжа)[6]. Если интегрант (подынтегральная функция в простейшей вариационной задаче) вырожден относительно переменных времени либо координат, то это вырождение приводит соответственно к закону сохранения энергии либо импульса относительно данной координаты[7]. Данная работа является продолжением работ[9],[10].

Основные определения и математические объекты.

Пусть X_m - гладкое многообразие размерности m , $T^n X_m$ - гладкое расслоенное пространство скоростей порядка n с базой расслоения X_m.

$L : T^n X_m \to \Re$ -невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$. [9]

Теорема 1. Пусть $\bar{x}^i = S^i(x_1, x_2, ..., x_m)$ $S : (x) \to (\bar{x})$, -невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m, p \geq \max(s,l)$ $i = \overline{1,m}$ [11] , тогда

$$\frac{\partial x^{(l)i}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(l)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(s)j}{\bar{x}}} = \begin{cases} C_l^s \cdot D_t^{l-s}\left(\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right), C_l^s = \dfrac{l!}{s! \cdot (l-s)!}, l! = \prod\limits_{k=1}^{l} k, l \geq s \\ 0, l < s \end{cases}$$

Определение 1. Система функций $P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x, \dot{x}, ..., \overset{(2\min(n,p)-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad k = \overline{0,n}, i = \overline{1,m}$$

называется обобщенным импульсом ранга n для функции $L : T^p X_m \to \Re$ в локальных координатах (x) базы X_m расслоения $T^p X_m$ где

$L(x, \dot{x}, ..., \overset{(p)}{x})$ - локальная запись функции L при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$

Функция $p_{k,n}^i$ называются $k-ой$ компонентой обобщенного импульса P_n ранга n по $i-$ой координате или импульсами порядка k (k -импульсами) по $i-$ой координате обобщенного импульса P_n ранга n.

Теорема 2[10](закон преобразования импульсов при замене системы координат в базе X_m расслоения $T^{2n} X_m$).

При замене $(\bar{x}) \to (x(\bar{x}))$: в базе многообразия X_m расслоения $T^{2n} X_m$

$\overline{p_k^i(n)}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(2n-k)}{\bar{x}})$ преобразуются как **тензоры** типа (0,1) (ковекторы):

$$\overline{p_k^i}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n-k)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m} p_k^j(n)(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_k^j(n)(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}$$

$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$ -импульс порядка k

$k = 0,n \;\; i,j = \overline{1,m}$

Определение 2. Пусть $L: T^p X_m \to \Re$. $L(x,...,\overset{(p)}{x})$-локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$

Функция

$$H = H_n = H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{k,n}^i \overset{(k)i}{x} = -L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{k,n}^i D_t^k x^i =$$

$$= -L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}) D_t^k x^i$$

$\overset{(k)i}{x} = D_t^k x^i$ ($D_t^k -$ оператор $k-$ кратного полного дифференцирования по времени t)

- называется гамильтонианом (функцией Гамильтона) ранга n этого преобразования для функции Лагранжа $L: T^p X_m \to \Re$ и называется также энергией системы, состояние которой описывается функцией $L: T^p X_m \to \Re$ в локальной системе координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$

В дальнейшем будет доказано, что при $p \le n$ энергия системы является тензором нулевого ранга, то есть не зависит от выбора локальной системы координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$, а при $p > n$, вообще говоря, зависит от локальных координат, то есть не сохраняется при замене локальной системы координат в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

Замечание 1 Максимальный порядок производной по t порядка l в $p_k^i(n)$ равен $l + l + k = 2 \cdot l + k$

При $l + k > p \Rightarrow \frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и коэффициент при производной $\overset{(l+k)i}{x}$ равен 0, значит, при определении максимального порядка производной по t можно считать $l + k \le p$ (в частности $k \le p$), кроме того

$$l \le n-k \Leftrightarrow l+k \le n \Rightarrow l+k \le \min(n,p) \Rightarrow l \le \min(n,p) - k \Rightarrow 2\cdot l + k \le 2\cdot(\min(n,p)-k) + k =$$

$= 2\cdot\min(n,p) - 2\cdot k + k = 2\cdot\min(n,p) - k$ $\quad p_{k,n}^i$ зависит от производных порядка

$\max(2\min(p,n)-k,p) = b(n,p,k)$, $\quad b(n,n=n,k) = b(n,p=n,k) = \max(2\min(n,n)-k,p)$

Каждое слагаемое вида $p_{k,n}^i \overset{(k)i}{x} = p_{k,n}^i \overset{(k)i}{x}$ от производных координат порядка $\max(\max(2\min(p,n)-k,p),k) = \max(2\min(p,n)-k,p,k)$ Энергия системы

$H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x}...,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{k,n}^i \overset{(k)i}{x} = -L(x,...,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{k,n}^i \overset{(k)i}{x}$ будет зависеть от максимального порядка производной $\max_{1\le k\le n}(2\min(p,n)-k,p,k) = a(n,p) = \max_{1\le k\le n}(b(n,p,k),k)$

На основании этого можно записать

$$H(x,\dot{x}...,\overset{(a(n,p))}{x}) = H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{k,n}^i(x,\dot{x}...,\overset{(b(n,p,k))}{x})\overset{(k)i}{x} = -L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{k,n}^i(x,\dot{x}...,\overset{(b(n,p,k))}{x}) D_t^k x^i == -L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}) D_t^k x^i$$

Теорема3[9](дифференциальная связь импульсов k-ого и (k-1)-ого порядков). Пусть $L:T^nX_m \to \Re -$ невырожденная функция Лагранжа, $L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})$, $p^i_{k,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x})$, $p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k+1)}{x})$ - локальная запись функции L и импульсов $k-ого\ и\ (k-1)$ порядков при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения T^PX_m. Тогда:

$$D_t\,p^i_{k,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k+1)}{x}).$$

Где $p^i_{k,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}})$ - импульс k-ого порядка

$p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k+1)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-(k-1)}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k-1)i}})$ -импульс (k-1) –ого порядка

Теорема 4. Пусть $x^i = S^i(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_m)$ $S:(\bar{x})\to(x)$, -невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^pX_m, p\ge \max(s,l)$ $i=\overline{1,m}$, тогда

$$D^k_t x^i(\bar{x}) = \overset{(k)i}{x}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^m\sum_{s=1}^k C^{s-1}_{k-1}D^{k-s}_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s)j}{\bar{x}},\ C^s_l = \frac{l!}{s!\cdot(l-s)!}, l! = \prod_{k=1}^l k, l\ge s \tag{1}$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по порядку производной k.
База индукции
k=1.

$$x=(x^1,x^2,\ldots,x^m),\bar{x}=(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\ldots,\bar{x}^m)$$

$$D^1_t x^i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\dot{\bar{x}}^j = \sum_{j=1}^m C^{1-1}_{1-1}D^{1-1}_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \quad \text{по определению считаем } C^0_0 = 1 \tag{2}$$

k=2: $D^2_t x^i = D^1_t\dot{x}^i = D^1_t(\sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\dot{\bar{x}}^j) = \sum_{j=1}^m D^1_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\dot{\bar{x}}^j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}D^1_t\dot{\bar{x}}^j =$

$$= \sum_{j=1}^m D^1_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\dot{\bar{x}}^j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\ddot{\bar{x}}^j = \sum_{j=1}^m C^{1-1}_{2-1}D^{2-1}_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(1)j}{\bar{x}} + \sum_{j=1}^m C^{2-1}_{2-1}D^{2-2}_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(2)j}{\bar{x}} \tag{3}$$

k=3:

$$D^3_t x^i = D^1_t\ddot{x}^i = D^1_t(\sum_{j=1}^m D^1_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\dot{\bar{x}}^j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\ddot{\bar{x}}^j) = \sum_{j=1}^m D^2_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\dot{\bar{x}}^j + \sum_{j=1}^m D^1_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\ddot{\bar{x}}^j +$$

$$+ \sum_{j=1}^m D^1_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\ddot{\bar{x}}^j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\dddot{\bar{x}}^j = \sum_{j=1}^m D^2_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\dot{\bar{x}}^j + 2\sum_{j=1}^m D^1_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\ddot{\bar{x}}^j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\dddot{\bar{x}}^j =$$

$$= \sum_{j=1}^m C^{3-1}_{3-1}D^{3-1}_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(1)j}{\bar{x}} + \sum_{j=1}^m C^{3-2}_{3-1}D^{3-2}_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(2)j}{\bar{x}} + \sum_{j=1}^m C^{3-3}_{3-1}D^{3-3}_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(3)j}{\bar{x}} =$$

$$= \sum_{j=1}^m (C^{3-1}_{3-1}D^{3-1}_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(1)j}{\bar{x}} + C^{3-2}_{3-1}D^{3-2}_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(2)j}{\bar{x}} + C^{3-3}_{3-1}D^{3-3}_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(3)j}{\bar{x}})) \tag{4}$$

k=4:

$$D^4_t x^i = D^1_t\dddot{x}^i = D^1_t(\sum_{j=1}^m D^2_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\dot{\bar{x}}^j + 2\sum_{j=1}^m D^1_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\ddot{\bar{x}}^j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\dddot{\bar{x}}^j) =$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\Big(D_t^3\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\dot{\bar{x}}^j+D_t^2\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\ddot{\bar{x}}^j+2\big(D_t^2\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\ddot{\bar{x}}^j+D_t^1\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\dddot{\bar{x}}^j\big)+D_t^1\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\dddot{\bar{x}}^j+\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\ddddot{\bar{x}}^j\Big)=$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\Big(D_t^3\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\dot{\bar{x}}^j+3D_t^2\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\ddot{\bar{x}}^j+3D_t^1\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\dddot{\bar{x}}^j+\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\ddddot{\bar{x}}^j\Big)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\Big(C_{4-1}^{4-1}D_t^{4-1}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(1)j}{\bar{x}}+C_{4-1}^{4-2}D_t^{4-2}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(2)j}{\bar{x}}+C_{4-1}^{4-3}D_t^{4-3}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(3)j}{\bar{x}}+C_{4-1}^{4-4}D_t^{4-4}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(4)j}{\bar{x}}\Big)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\Big(C_3^3D_t^3\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(1)j}{\bar{x}}+C_3^2D_t^2\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(2)j}{\bar{x}}+C_3^1D_t^1\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(3)j}{\bar{x}}+C_3^0D_t^0\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(4)j}{\bar{x}}\Big)= \qquad (5)$$

Формулы (2)-(5) являются частными случаями формулы (1) при k=1,2,3,4 соответственно.

Индуктивный переход: по предположению индукции $D_t^k x^i(\bar{x})=\overset{(k)i}{x}(\bar{x})=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k-s}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(s)j}{\bar{x}}$

Докажем, что $D_t^{k+1}x^i(\bar{x})=\overset{(k+1)i}{x}(\bar{x})=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k+1}C_{k+1-1}^{s-1}D_t^{k-s}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(s)j}{\bar{x}}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k+1}C_{k}^{s-1}D_t^{k-s}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(s)j}{\bar{x}}$

$$D_t^{k+1}x^i(\bar{x})=D_t\overset{(k)i}{x}(\bar{x})=D_t\Big(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k-s}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(s)j}{\bar{x}}\Big)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t\Big(D_t^{k-s}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\Big)\overset{(s)j}{\bar{x}}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k-s}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)D_t\overset{(s)j}{\bar{x}}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k+1-s}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(s)j}{\bar{x}}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k-s}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(s+1)j}{\bar{x}} \qquad (6)$$

В правой части формулы (6) сделаем замену $s=g-1, g=s+1, s-1=g-2, k-s=k+1-g$:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k+1-s}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(s)j}{\bar{x}}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k-s}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(s+1)j}{\bar{x}}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k+1-s}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(s)j}{\bar{x}}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{g=2}^{k+1}C_{k-1}^{g-2}D_t^{k+1-g}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(g)j}{\bar{x}} \qquad (7)$$

В формуле (7) меняем индекс суммирования g на s:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k+1-s}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(s)j}{\bar{x}}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{g=2}^{k+1}C_{k-1}^{g-2}D_t^{k+1-g}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(g)j}{\bar{x}}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k+1-s}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(s)j}{\bar{x}}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=2}^{k+1}C_{k-1}^{s-2}D_t^{k+1-s}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(s)j}{\bar{x}}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=2}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k+1-s}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(s)j}{\bar{x}}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=2}^{k}C_{k-1}^{s-2}D_t^{k+1-s}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(s)j}{\bar{x}}+$$

$$+C_{k-1}^{1-1}D_t^{k}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(1)j}{\bar{x}}+C_{k-1}^{k+1-2}D_t^{k+1-(k+1)}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(k+1)j}{\bar{x}}=\sum_{s=2}^{k}(C_{k-1}^{s-1}+C_{k-1}^{s-2})D_t^{k+1-s}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(s)j}{\bar{x}}+ \qquad (8)$$

$$+C_{k-1}^{0}D_t^{k}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(1)j}{\bar{x}}+C_{k-1}^{k-1}D_t^{0}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(k+1)j}{\bar{x}}$$

Так как

$$C_{k-1}^{s-1}+C_{k-1}^{s-2}=\frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-1-(s-1))!}+\frac{(k-1)!}{(s-2)!(k-1-(s-2))!}=\frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!}+\frac{(k-1)!}{(s-2)!(k+1-s)!}=$$

$$=\frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!}+\frac{(k-1)!}{\frac{(s-1)!}{(s-1)}(k-s)!(k+1-s)}=\frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!}\Big(1+\frac{s-1}{k+1-s}\Big)=$$

$$=\frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!}\Big(\frac{k+1-s+s-1}{k+1-s}\Big)=\frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!}\frac{k}{k+1-s}=\frac{k!}{(s-1)!(k+1-s)!}$$

то $C_{k-1}^{s-1}+C_{k-1}^{s-2}=C_{k}^{s-1}=\dfrac{k!}{(s-1)!(k+1-s)!}$ (9)

Учитывая (9) в правой части (8) $\sum_{s=2}^{k}(C_{k-1}^{s-1}+C_{k-1}^{s-2})D_t^{k+1-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s)j}{\bar{x}}+C_{k-1}^{0}D_t^{k}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(1)j}{\bar{x}}+$

$$+C_{k-1}^{k-1}D_t^{0}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(k+1)j}{\bar{x}}=\sum_{s=2}^{k}C_{k}^{s-1}D_t^{k+1-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s)j}{\bar{x}}+D_t^{k}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(1)j}{\bar{x}}+D_t^{0}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(k+1)j}{\bar{x}}=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k+1}C_{k+1-1}^{s-1}D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s)j}{\bar{x}}$$ Теорема доказана.

Замечание 2 Формула (1) заменой $s_1=s-1,\quad s=s_1+1, k-s=k-1-s_1,\quad k-1\ge s_1\ge 0$

$$D_t^k x^i(\bar{x})=\overset{(k)i}{x}(\bar{x})=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s)j}{\bar{x}}\ ,C_l^s=\frac{l!}{s!(l-s)!},l!=\prod_{k=1}^{l}k,l\ge s$$

Может быть представлена в виде

$$D_t^k x^i(\bar{x})=\overset{(k)i}{x}(\bar{x})=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s)j}{\bar{x}}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k-1}C_{k-1}^{s}D_t^{k-1-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s+1)j}{\bar{x}}$$

Математическая постановка задачи. Ставится следующая задача:

Пусть $L:T^nX_m\to\Re$. $L(x,\dots,\overset{(n)}{x})$, $p_i^k(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})$ -локальная запись функции L и импульсов $k-ого$ порядков при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения T^nX_m.

Исследовать закон преобразования энергии

$$H=H_n=H_n(L,x)=H(L,x,n)=-L(x,\dot{x}\dots,\overset{(n)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x}=-L(x,\dots,\overset{(n)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^iD_t^kx^i$$

$\overset{(k)i}{x}=D_t^kx^i$ ранга n при замене локальной системы координат $x=x(\bar{x})$ в базе X_m расслоения скоростей T^nX_m.

$$x=(x^1,x^2,\dots,x^m),\qquad \bar{x}=(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\dots,\bar{x}^m)\qquad \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})=L(x(\bar{x}),D_tx(\bar{x}),\dots,D_t^nx(\bar{x}))$$

$p_{k,n}^i=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}})$ -импульс k-ого порядка

По теореме о сложной функции $\frac{\partial L(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial x^{(l+k)i}}=\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(p)j}{\bar{x}}}\frac{\partial\overset{(p)j}{\bar{x}}(x)}{x^{(l+k)i}}$

$$\bar{H}_n(\bar{L},\bar{x})=\bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)=-\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\bar{p}_{k,n}^{\,i}\overset{(k)i}{\bar{x}}=-\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\bar{p}_{k,n}^{\,i}\overset{(k)i}{\bar{x}}=$$

$$=-\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{1}D_t^l(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(l+k)i}{\bar{x}}})\overset{(k)i}{\bar{x}}\qquad(10)$$

$$H_n(L,x)=H(L,x,n)=-L(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x})\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^i\overset{(k)i}{x}=-L(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x})\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^i\overset{(k)i}{x}=$$

$$=-L(x(\bar{x}),D_tx(\bar{x}),\dots,D_t^nx(\bar{x}))+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{1}D_t^l(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial x^{(l+k)i}})\overset{(k)i}{x}$$

$$=-\bar L(\bar x,\dot{\bar x}\dots,\overset{(n)}{\bar x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x}\dots,\overset{(n)}{\bar x})}{\partial \overset{(p)j}{\bar x}}\,\frac{\partial \overset{(p)j}{\bar x}}{\partial x^{(l+k)i}}\Big)\overset{(k)i}{x} \qquad (11)$$

По теореме 1 выполнено равенство:

$$\frac{\partial \overset{(p)j}{\bar x}(x,\dot x\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}=\begin{cases}C_p^{l+k}\cdot D_t^{p-(l+k)}\Big(\dfrac{\partial \bar x^{j}(x)}{\partial x^i}\Big),\; C_p^{l+k}=\dfrac{p!}{(l+k)!\cdot(p-(l+k))!},\; g!=\prod\limits_{k=1}^{g}k,\; p\ge l+k\\ 0,\; p<l+k\end{cases} \qquad (12)$$

По теореме 4 $\overset{(k)i}{x}(\bar x)=\sum\limits_{g=1}^{m}\sum\limits_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k-s}\Big(\dfrac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^g}\Big)\overset{(s)g}{\bar x},\; C_l^s=\dfrac{l!}{s!\cdot(l-s)!},\; l!=\prod\limits_{k=1}^{l}k,\; l\ge s$ (13)

Учитывая (12) и (13) в (11) получим

$$-\bar L(\bar x,\dot{\bar x}\dots,\overset{(n)}{\bar x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x}\dots,\overset{(n)}{\bar x})}{\partial \overset{(p)j}{\bar x}}\,\frac{\partial \overset{(p)j}{\bar x}}{\partial x^{(l+k)i}}\Big)\overset{(k)i}{x}=-\bar L(\bar x,\dot{\bar x}\dots,\overset{(n)}{\bar x})+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\sum_{p=l+k}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x}\dots,\overset{(n)}{\bar x})}{\partial \overset{(p)j}{\bar x}}C_p^{l+k}\cdot D_t^{p-(l+k)}\Big(\frac{\partial \bar x^{j}(x)}{\partial x^i}\Big)(\bar x)\Big)\Big(\sum_{g=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k-s}\Big(\frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^g}\Big)\overset{(s)g}{\bar x}\Big) \qquad (14)$$

Применяя к (14) формулу Лейбница $D_t^a(fg)=\sum\limits_{b=0}^{a}C_a^bD_t^b(f)D_t^{a-b}(g)$, $C_a^b=\dfrac{a!}{b!(a-b)!},\; b!=\prod\limits_{c=1}^{b}c,\; a\ge b$

$$-\bar L(\bar x,\dot{\bar x}\dots,\overset{(n)}{\bar x})+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\sum_{p=l+k}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x}\dots,\overset{(n)}{\bar x})}{\partial \overset{(p)j}{\bar x}}C_p^{l+k}\cdot D_t^{p-(l+k)}\Big(\frac{\partial \bar x^{j}(x)}{\partial x^i}\Big)(\bar x)\Big)\cdot\Big(\sum_{g=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k-s}\Big(\frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^g}\Big)\overset{(s)g}{\bar x}\Big)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}\sum_{p=l+k}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{g=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}\sum_{a=1}^{l}(-1)^l C_p^{l+k}C_{k-1}^{s-1}C_l^aD_t^a\Big(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x}\dots,\overset{(n)}{\bar x})}{\partial \overset{(p)j}{\bar x}}\Big)D_t^{p-(l+k)+l-a}\Big(\Big(\frac{\partial \bar x^{j}(x)}{\partial x^i}\Big)(\bar x)\Big)D_t^{k-s}\Big(\frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^g}\Big)\overset{(s)g}{\bar x}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}\sum_{p=l+k}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{g=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}\sum_{a=1}^{l}(-1)^l C_p^{l+k}C_{k-1}^{s-1}C_l^a\; D_t^a\Big(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x}\dots,\overset{(n)}{\bar x})}{\partial \overset{(p)j}{\bar x}}\Big)D_t^{p-k-a}\Big(\Big(\frac{\partial \bar x^{j}(x)}{\partial x^i}\Big)(\bar x)\Big)D_t^{k-s}\Big(\frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^g}\Big)\overset{(s)g}{\bar x} \qquad (15)$$

Установить связь между соотношениями (10) и (14) или эквивалентным (14) выражению (15) является целью данной работы**.**

Теорема 5 (о дифференциальной связи энергии ранга n с импульсами 0-ого порядка ранга n)

Пусть $L:T^nX_m\to\Re$ $L(x,\dots,\overset{(n)}{x})$, $p_{i,n}^k(x,\dot x,\dots,\overset{(2n-k)}{x})$ -локальная запись функции L и импульсов $k-ого$ порядков при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения T^nX_m. $k=\overline{1,n}$ $i=\overline{1,m}$

$$H_n(L,x)=H(L,x,n)=-L(x,\dot x\dots,\overset{(n)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^i(x,\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x}=-L(x,\dots,\overset{(n)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^i(x,\dots,\overset{(2n-k)}{x})D_t^kx^i$$

-энергия системы, состояние которой описывается функцией $L:T^nX_m\to\Re$ в локальной системе координат (x) в базе X_m расслоения T^nX_m. Тогда

$$D_t(H(L,x,n)+L(x,\dot{x}\dots,\overset{(n)}{x}))=D_t(-L(x,\dot{x}\dots,\overset{(n)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}(x,\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x}+L(x,\dot{x}\dots,\overset{(n)}{x}))=$$

$$=D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}(x,\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x})=\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p^i_{0,n}(x,\dots,\overset{(2n)}{x})\overset{,i}{x} \qquad (16)$$

$p^i_{0,n}=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+k)i}})$ - импульс 0-ого порядка $\overset{,i}{x}=\overset{(1)i}{x}=D_t x^i$

Доказательство.

$$D_t(H(L,x,n)+L(x,\dot{x}\dots,\overset{(n)}{x}))=D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}(x,\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x})=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{k,n}(x,\dots,\overset{(2n-k)}{x}))\overset{(k)i}{x}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}(x,\dots,\overset{(2n-k)}{x})D_t\overset{(k)i}{x}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{k,n}(x,\dots,\overset{(2n-k)}{x}))\overset{(k)i}{x}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}(x,\dots,\overset{(2n-k)}{x})D_t\overset{(k)i}{x}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{k,n}(x,\dots,\overset{(2n-k)}{x}))\overset{(k)i}{x}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}(x,\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}= \qquad (17)$$

Во второй части (15) сделаем замену $l=k+1 \quad k=l-1 \quad n+1\geq l\geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{k,n}(x,\dots,\overset{(2n-k)}{x}))\overset{(k)i}{x}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}(x,\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k+1)i}{x}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{k,n}(x,\dots,\overset{(2n-k)}{x}))\overset{(k)i}{x}+$$

$$+\sum_{l=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}p^i_{l-1,n}(x,\dots,\overset{(2n-(l-1))}{x})\overset{(l)i}{x}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{k,n}(x,\dots,\overset{(2n-k)}{x}))\overset{(k)i}{x}+\sum_{k=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k-1,n}(x,\dots,\overset{(2n-(k-1))}{x})\overset{(k)i}{x}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{1,n}(x,\dots,\overset{(2n-1)}{x}))\overset{(1)i}{x}+\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{k,n}(x,\dots,\overset{(2n-k)}{x}))\overset{(k)i}{x}+\sum_{k=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k-1,n}(x,\dots,\overset{(2n-(k-1))}{x})\overset{(k)i}{x}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{1,n}(x,\dots,\overset{(2n-1)}{x}))\overset{(1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^i_{n,n}(x,\dots,\overset{(2n-n)}{x})\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{k,n}(x,\dots,\overset{(2n-k)}{x}))\overset{(k)i}{x}+$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k-1,n}(x,\dots,\overset{(2n-(k-1))}{x})\overset{(k)i}{x}=\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{1,n}(x,..,\overset{(2n-1)}{x}))\overset{(1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^i_{n,n}(x,..,\overset{(2n-n)}{x})\overset{(n+1)i}{x}+$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{m}(D_t(p^i_{k,n}(x,..,\overset{(2n-k)}{x}))+p^i_{k-1,n}(x,..,\overset{(2n-(k-1))}{x}))\overset{(k)i}{x} \qquad (18)$$

По теореме 3 $D_t(p^i_{k,n}(x,..,\overset{(2n-k)}{x}))=\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}-p^i_{k-1,n}(x,..,\overset{(2n-(k-1))}{x})$ поэтому

$$D_t(p^i_{k,n}(x,..,\overset{(2n-k)}{x}))+p^i_{k-1,n}(x,..,\overset{(2n-(k-1))}{x})=\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k-1)i}{x}} \qquad (19)$$

При $k=1$ $D_t(p^i_{1,n}(x,..,\overset{(2n-1)}{x}))+p^i_{1-1,n}(x,..,\overset{(2n-(1-1))}{x})=\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(1-1)i}{x}}$, $D_t(p^i_{1,n})=\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^i}-p^i_{0,n}$ (20)

$$p^i_{n,n}(x,..,\overset{(2n-n)}{x})=\sum_{l=0}^{n-n}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+n)i}})=\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)i}}$$

(21)

Преобразуем (18) , учитывая (19),(20),(21)

$$\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{1,n}(x,\dots,\overset{(2n-1)}{x}))\overset{(1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^i_{n,n}(x,\dots,\overset{(2n-n)}{x})\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{m}(D_t(p^i_{k,n}(x,\dots,\overset{(2n-k)}{x}))+p^i_{k-1,n}(x,\dots,\overset{(2n-(k-1))}{x}))\overset{(k)i}{x}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m} D_t\,(p^{i}_{1,n}(x,...,\overset{(2n-1)}{x}))\overset{(1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)i}}\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m} D_t\,(p^{i}_{1,n}(x,...,\overset{(2n-1)}{x}))\overset{(1)i}{x}+\sum_{k=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}=\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{i}}-p^{i}_{0,n}(x,...,\overset{(2n-0)}{x})\Big)\overset{(1)i}{x}+$$

$$+\sum_{k=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{i}}\overset{(1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{0,n}\overset{(1)i}{x}+\sum_{k=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{0,n}(x,...,\overset{(2n-0)}{x})\overset{(1)i}{x}=\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{0,n}(x,...,\overset{(2n-0)}{x})\dot{x}^{i}$$

Теорема доказана.

Замечание 3 Первая сумма в правой части (16) заменой $k_1=k-1, k=k_1+1,\quad n\ge k_1\ge 0$ может быть представлена в виде

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}$$

Имеет место следующая простая:

Теорема 6. $x=(x^1,x^2,...,x^m), \bar{x}=(\bar{x}^1,\bar{x}^2,...,\bar{x}^m)$

Пусть $x^i=S^i(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_m)\quad S:(\bar{x})\to(x)$, -невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^pX_m\ i,k=\overline{1,m},\ S^{-1}:(x)\to(\bar{x})$-обратное отображение, тогда

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^k}=\delta^i_k\qquad \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^i(x)}{\partial x^j}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}=\delta^i_k\qquad \delta^k_i=\begin{cases}1, i=k\\ 0, i\ne k\end{cases}-\text{символ Кронеккера}\qquad (22)$$

Доказательство. $x^i=x^i(\bar{x}^1(x),\bar{x}^2(x),...,\bar{x}^m(x))$ По теореме о сложной функции

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^k}=\delta^i_k=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^k}$$ аналогично доказывается равенство $$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^k}=\delta^i_k=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^i(x)}{\partial x^j}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}$$

Теорема доказана

Докажем, что каждая из сумм в формуле (16) является геометрическим инвариантом, то есть не зависит от выбора локальной системы координат (x) в базе X_m расслоения скоростей T^nX_m. Имеет место следующая

Теорема 7 (об инвариантах G_1, G_2) Пусть $L:T^nX_m\to\Re\ L(x,...,\overset{(n)}{x}),\ p^k_{i,0}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})$-локальная запись функции L и импульсов $0-ого$ порядка при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения T^nX_m. $i=\overline{1,m}$. Тогда функции

$$G_1(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x}\ \overset{(n+1)}{x})=\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}\quad \text{и}\ G_2(x,\dot{x},...,\overset{(2n)}{x})=\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{0,n}(x,\dot{x},...,\overset{(2n)}{x})\dot{x}^{i}\qquad (23)$$

$$p^{i}_{0,n}=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D^l_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}}\Big)$$ - импульс 0-ого порядка $\quad \overset{,i}{x}=\overset{(1)i}{x}=D_t x^i$

при замене локальных координат (x) в базе X_m расслоения T^nX_m преобразуется как тензоры 0-го ранга, то есть не зависят от выбора локальных координат (являются геометрическими инвариантами (сохранение энергии при замене локальных координат))

Доказательство. По теореме о сложной функции $\overset{,i}{x} = \overset{(1)i}{x} = D_t x^i(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} \dot{\bar{x}}^k$

По теореме 2 импульсы 0-ого порядка ранга n преобразуются как тензоры типа (0,1) (ковекторы):

$p_0^i(n)(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{j=1}^{m} \overline{p_0^j}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}}) \cdot \frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^i}$ Подставим это равенство в $G_2(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n)}{x}) = \sum_{i=1}^{m} p_{0,n}^i \dot{x}^i$

$$G_2(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n)}{x}) = \sum_{i=1}^{m} p_{0,n}^i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})\dot{x}^i = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m} \overline{p_0^j}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}}) \cdot \frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^i})\dot{x}^i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \overline{p_0^j}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}}) \cdot \frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^i} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\dot{\bar{x}}^k = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{k=1}^{m} \overline{p_0^j}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}}) \cdot \dot{\bar{x}}^k) \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} = \quad (24)$$

$$= \sum_{j=1}^{m}(\sum_{k=1}^{m} \overline{p_0^j}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}}) \cdot \dot{\bar{x}}^k)\delta_k^j = \sum_{j=1}^{m} \overline{p_0^j}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}}) \cdot \dot{\bar{x}}^j = \bar{G}_2(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{\bar{x}}) \quad \text{где}$$

$\delta_i^k = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases} - \text{символ Кронеккера}$. Для n=1 имеет место

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} \overset{(k)i}{x} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i}\overset{,i}{x} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}\ddot{x}^i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} + \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial \dot{\bar{x}}^k}{\partial x^i})\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\dot{\bar{x}}^l + \quad (25)$$

$$+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial \dot{\bar{x}}^k}{\partial \dot{x}^i}\ddot{x}^i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} + \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}D_t(\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}))\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\dot{\bar{x}}^l + \quad (26)$$

$$+ \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}(D_t(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l})\dot{\bar{x}}^l + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}D_t(\dot{\bar{x}}^l)) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\dot{\bar{x}}^l + \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\ddot{\bar{x}}^l) + \quad (27)$$

$$+ \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\dot{\bar{x}}^l(D_t(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l})\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} + D_t(\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i})\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^k}\delta_l^k\dot{\bar{x}}^l + \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\delta_l^k\ddot{\bar{x}}^l) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\dot{\bar{x}}^l(D_t(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i})) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^k}\dot{\bar{x}}^k + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \bar{L}(\bar{x}\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\ddot{\bar{x}}^k + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\dot{\bar{x}}^l D_t(\delta_l^k) = \quad (28)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^k}\dot{\bar{x}}^k + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\ddot{\bar{x}}^k = \bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}}) \quad D_t(\delta_l^k) = 0, \delta_i^k = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases} - \text{символ Кронеккера}$$

Доказано.

В (27),(28) была применена теорема 6 $\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} = \delta_i^k = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases} - \text{символ Кронеккера}$

В (25),(26) была применена теорема 1: $\frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \dot{\bar{x}}^i} = \frac{\partial \overset{(1)k}{x}}{\partial \overset{(1)i}{\bar{x}}} = C_1^1 \cdot D_t^{1-1} \cdot \frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = 1 \cdot D_t^0 \cdot \frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}$

$$\frac{\partial \dot{x}^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=\frac{\partial \overset{(1)k}{x}}{\partial \overset{(\underline{0})i}{x}}=C_1^0\cdot D_t^{1-0}\cdot\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=1\cdot D_t^1\cdot\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=D_t\,\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}$$

$$\frac{\partial x^k}{\partial \dot{\bar{x}}^i}=\frac{\partial D_t^0 x^k(\bar{x})}{\partial D_t^1 \bar{x}^i}=\frac{\partial \overset{(0)k}{x}(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{(1)i}}=\delta_1^0\cdot\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=0$$

Общий случай.

$$G_1(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x}\,\overset{(n+1)}{x})=\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}$$

По теореме 4 $D_t^k x^i(\bar{x})=\overset{(k)i}{x}(\bar{x})=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(\underline{s})j}{x}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k-1}C_{k-1}^{s}D_t^{k-1-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(\underline{s+1})j}{x}$

$$D_t^{k+1}x^i(\bar{x})=\overset{(k+1)i}{x}(\bar{x})=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k+1-1}C_{k+1-1}^{s}D_t^{k+1-1-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(\underline{s+1})j}{x}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}C_k^s D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(\underline{s+1})j}{x}$$

Поэтому $\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}C_k^s D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(\underline{s+1})j}{x})$ (29)

$\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}=\sum_{p=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(\underline{n})}{x})}{\partial \overset{(\underline{p})d}{x}}\frac{\partial \overset{(\underline{p})d}{x}}{\partial \overset{(k)i}{x}}$ По теореме 1выполнено равенство (30)

$$\frac{\partial \overset{(\underline{p})d}{x}(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}=\begin{cases}C_p^k\cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}),C_p^k=\frac{p!}{k!\cdot(p-k)!},k!=\prod_{g=1}^{k}g,\ p\ge k\\ 0,\ p<k\end{cases}\tag{31}$$

Подставим (31) в (30):

$$\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}=\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(\underline{n})}{x})}{\partial \overset{(\underline{p})d}{x}}C_p^k\cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i})\tag{32}$$

и полученный результат (32) подставим в (29)

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}C_k^s D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(\underline{s+1})j}{x})=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(\underline{n})}{x})}{\partial \overset{(\underline{p})d}{x}}C_p^k\cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}))(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}C_k^s D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(\underline{s+1})j}{x})=\tag{33}$$

Так как $\overset{(\underline{s+1})j}{x}=D_t^s(\overset{(\underline{1})j}{x})=D_t^s(\dot{\bar{x}}^j)$ $\quad C_k^s D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(\underline{s+1})j}{x}=C_k^s D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})D_t^s(\overset{(\underline{1})j}{x})$ и

$D_t^a(fg)=\sum_{b=0}^{a}C_a^b D_t^b(f)D_t^{a-b}(g)$, $C_a^b=\frac{a!}{b!(a-b)!}$, $b!=\prod_{c=1}^{b}c$, $a\ge b$ (формула Лейбница), то

$$\sum_{s=0}^{k}C_k^s D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(\underline{s+1})j}{x}=\sum_{s=0}^{k}C_k^s D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})D_t^s(\overset{(\underline{1})j}{x})=D_t^k(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}D_t^1(\bar{x}^j))=D_t^k(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(\underline{1})j}{x})=\tag{34}$$

$=D_t^k(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\dot{\bar{x}}^j)$ Подставляем (34) в (33):

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}C_p^k\cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}))(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}C_k^s D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s+1)j}{x})=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}C_p^k\cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}))(\sum_{j=1}^{m}D_t^{k}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x}) \quad (35)$$

Так как $\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=k}^{n}a_{kp}=\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}a_{kp}$ при $n\geq p\geq k\geq 0$, то сумму в (35) запишем в эквивалентном виде:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}C_p^k\cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}))(\sum_{j=1}^{m}D_t^{k}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x})=$$

$$=\sum_{p=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{k=0}^{p}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}C_p^k\cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}))(\sum_{j=1}^{m}D_t^{k}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x}))=$$

$$=\sum_{p=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{d=1}^{m}\sum_{k=0}^{p}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}C_p^k\cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}))(\sum_{j=1}^{m}D_t^{k}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x}))=$$

$$=\sum_{p=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{p}C_p^k\cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i})D_t^{k}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x}) \quad (36)$$

По формуле Лейбница: $\sum_{k=0}^{p}C_p^k\cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i})D_t^{k}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x})=D_t^p(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x})$ Поэтому

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{p}C_p^k\cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i})D_t^{k}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x})=$$

$$=\sum_{p=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}\sum_{j=1}^{m}D_t^p(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x})=\sum_{p=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}\sum_{i=1}^{m}D_t^p(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x}) \quad (37)$$

Преобразуем последнюю сумму в (37): $\sum_{i=1}^{m}D_t^p(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x})=D_t^p(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x})$ (38)

По теореме 6 $\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}=\delta_j^d \quad \delta_j^d=\begin{cases}1, d=j\\0, d\neq j\end{cases}-\text{символ Кронеккера}$

$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x}=\overset{(1)j}{x}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}=\overset{(1)j}{x}\delta_j^d$,значит, $D_t^p(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x})=D_t^p(\overset{(1)j}{x}\delta_j^d)$ (39)

Подставляем полученное в (39) выражение в сумму (37):

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}\sum_{i=1}^{m}D_t^p(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x})=\sum_{p=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}D_t^p(\overset{(1)j}{x}\delta_j^d)=$$

$$=\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}D_t^p(\overset{(1)j}{x}\delta_j^d)=\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}D_t^p(\overset{(1)j}{x})=\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}D_t^{p+1}(\bar{x}^j)=$$

$$=\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}\overset{(p+1)j}{x}=\bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{x})$$

Этот результат может быть получен и другим способом:

$$C_p^k C_k^s=\frac{p!}{k!(p-k)!}\frac{k!}{s!(k-s)!}=\frac{p!}{k!(p-k)!s!(k-s)!}=\frac{p!}{s!(p-s)!}\frac{(p-s)!}{(k-s)!(p-s-(k-s))!}=C_p^k C_{p-s}^{p-k}$$

$$C_p^k=\frac{p!}{k!(p-k)!},\ p!=\prod_{c=1}^{p}c,\ p\ge k$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}C_p^k\cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}))(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}C_k^s D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s+1)j}{x})= \tag{40}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}C_p^s\cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}))(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}C_{p-s}^{k-s} D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s+1)j}{x})=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n}C_p^s\cdot\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}(\sum_{s=0}^{n}\overset{(s+1)j}{x}\sum_{k=s}^{p}C_{p-s}^{k-s}D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i})) \tag{41}$$

При замене пределов суммирования в (41) было использовано, что $n\ge p\ge k\ge s\ge 0$:

так как $\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=k}^{n}\sum_{s=0}^{k}a_{kps}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{k}\sum_{p=k}^{n}a_{kps}=\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}\sum_{s=0}^{k}a_{kps}=\sum_{p=0}^{n}\sum_{s=0}^{p}\sum_{k=s}^{p}a_{kps}=\sum_{s=0}^{n}\sum_{k=s}^{n}\sum_{p=k}^{n}a_{kps}=\sum_{s=0}^{n}\sum_{p=s}^{n}\sum_{k=s}^{p}a_{kps}$

В последней сумме в (41) сделаем замену $u=k-s,\ 0\le u\le k-s,\ p-k=p-s-(k-s)=p-s-u$, применим формулу Лейбница $D_t^{p-s}(fg)=\sum_{u=0}^{p-s}C_{p-s}^{u}D_t^{u}(f)D_t^{p-s-u}(g)$, $C_{p-s}^{u}=\frac{(p-s)!}{u!(p-s-u)!},\ u!=\prod_{c=1}^{u}c,\ p-s\ge u$

и теорему 6 $\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}=\delta_j^d$, $\quad\delta_j^d=\begin{cases}1, d=j\\0, d\ne j\end{cases}-\text{символ Кронеккера}$

$$\sum_{k=s}^{p}C_{p-s}^{k-s}D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i})=\sum_{u=0}^{p-s}C_{p-s}^{u}D_t^{u}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})D_t^{p-s-u}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i})=D_t^{p-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i})=$$

$$=D_t^{p-s}(\delta_j^d)=\begin{cases}1, d=j\ \text{и}\ \ p=s\\0, d\ne j\ \text{или}\ \ p\ne s\end{cases}=\delta_j^d\delta_p^s,\qquad \delta_p^s=\begin{cases}1, p=s\\0, p\ne s\end{cases}-\text{символ Кронеккера} \tag{42}$$

Равенство (42) получено на основании того, что $\delta_j^d=\begin{cases}1, d=j\\0, d\ne j\end{cases}=const$ и $D_t^{p-s}(const)=\begin{cases}0, p-s>0\\const, p-s=0\end{cases}$ (43)

(производная от постоянной равна 0, если ее порядок больше 0 и равна постоянной, если порядок равен 0)

Подставляем полученный в (42) результат в (41)

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n}C_p^s\cdot\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}(\sum_{s=0}^{n}\overset{(s+1)j}{x}\sum_{k=s}^{p}C_{p-s}^{k-s}D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}))=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n}\cdot\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}(\sum_{s=0}^{n}C_p^s\overset{(s+1)j}{x}\delta_j^d\delta_p^s)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}C_p^p\overset{(p+1)j}{x}\delta_j^d\delta_p^p=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}\overset{(p+1)j}{x}\delta_j^d=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}\overset{(p+1)j}{x}\delta_j^j=$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n} \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} \overset{(p+1)j}{\bar{x}} == \bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{\bar{x}})$$ Теорема доказана.

Теорема 8 (Инвариантность энергии относительно замены координат). Пусть $L: T^n X_m \to \Re$ - гладкая функция. $L(x,\dots,\overset{(n)}{x})$, $p_{i,n}^{k}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x}), H_n(L,x)$-локальная запись функции L, импульсов $k-ого$ порядка и энергии ранга n соответственно при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$.

$$H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x}\dots,\overset{(n)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{i,n}^{k}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x}$$

$\bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})$, $\overline{p_{k,n}^{j}}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}}), \bar{H}_n(\bar{L},\bar{x})$-локальная запись функции L, импульсов $k-ого$ порядка и энергии ранга n соответственно при выборе локальных координат $(\bar{x})$ в базе X_m расслоения $T^n X_m$.

$$\bar{H}_n(\bar{L},\bar{x}) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) = \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \overline{p_{k,n}^{j}}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})\overset{(k)i}{\bar{x}}$$

Тогда $H(L,x,n) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)$ Энергия системы –тензор 0-ого ранга (не зависит от выбора локальных координат, то есть является инвариантным геометрическим объектом).

Доказательство.

$L(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x})\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x})) = \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})$ $x = x(\bar{x}) = S(\bar{x})$ - невырожденная замена координат в базе X_m расслоения $T^n X_m$.

$$D_t(H(L,x,n) - \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)) = D_t(-L(x,\dot{x}\dots,\overset{(n)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{i,n}^{k}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x} + \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}}) -$$
$$-\sum_{j=1}^{m}\overline{p_{k,n}^{j}}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})\overset{(k)i}{\bar{x}}) = D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{i,n}^{k}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x} - \sum_{j=1}^{m}\overline{p_{k,n}^{i}}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})\overset{(k)i}{\bar{x}}) =$$
$$= D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{i,n}^{k}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x}) - D_t(\sum_{j=1}^{m}\overline{p_{k,n}^{i}}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})\overset{(k)i}{\bar{x}}) \tag{44}$$

По теореме 5

$$D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{k,n}^{i}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x}) = \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x} - \sum_{i=1}^{m} p_{0,n}^{i}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n)}{x})\overset{,i}{x} = G_1(x,\dot{x},\dots,\overset{(n+1)}{x}) - G_2(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n)}{x})$$

$$D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\overline{p_{k,n}^{j}}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)-k}{\bar{x}})\overset{(k)i}{\bar{x}}) = \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(k-1)i}{\bar{x}}}\overset{(k)i}{x} - \sum_{i=1}^{m}\overline{p_{0,n}^{i}}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)-k}{\bar{x}})\dot{\bar{x}}^{l} =$$
$$= \bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{x}) - \bar{G}_2(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{x})$$

$$D_t(H(L,x,n) - \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)) = D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{k,n}^{i}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x}) - D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\overline{p_{k,n}^{j}}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)-k}{\bar{x}})\overset{(k)i}{\bar{x}}) =$$
$$= G_1(x,\dot{x},\dots,\overset{(n+1)}{x}) - G_2(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n)}{x}) - (\bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{x}) - \bar{G}_2(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{x})) = G_1(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x}\overset{(n+1)}{x}) - \bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{\bar{x}}) -$$
$$- G_2(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n)}{x}) - \bar{G}_2(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{\bar{x}}) = 0 - 0 = 0$$ так как по теореме 7 о G_1, G_2 *инвариантах*

$$G_1(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x}\overset{(n+1)}{x}) = \bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{\bar{x}}) \qquad G_2(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n)}{x}) = \bar{G}_2(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{\bar{x}})$$

$D_t(H(L,x,n)-\bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)) = D_t(H(L(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x})...,\overset{(n)}{x}(\bar{x})),S(\bar{x}),n)-\bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)) = 0$ для любой невырожденной замены координат $x = x(\bar{x}) = S(\bar{x})$ - в базе X_m расслоения $T^n X_m$. Значит,

$H(L,x,n)-\bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) \equiv C = const$ для всех невырожденных замен координат $x = x(\bar{x}) = S(\bar{x})$ - в базе X_m расслоения $T^n X_m$. Рассмотрим тождественное преобразование $x(\bar{x}) = S(\bar{x}) = \bar{x}$

$H(L(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x})...,\overset{(n)}{x}(\bar{x})),S(\bar{x}),n)-\bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)-\bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) = C = 0$ Следовательно,

$\bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)$ Теорема доказана.

Замечание 4 Утверждение теоремы 8 справедливо и для функций $L : T^p X_m \to \Re \quad p \le n$

Так как при $p < n$ можно определить функцию $L_1 : T^n X_m \to \Re$, которая в любой локальной системе Координат (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$ $\quad L_1(x,\dot{x}...,\overset{(n)}{x}) \equiv L(x,\dot{x}...,\overset{(p)}{x})$ для любых $x^{(p+1)},...,\overset{(n)}{x}$. Для функции $L_1(x,\dot{x}...,\overset{(n)}{x})$ утверждение теоремы 8 справедливо. Таким образом, справедлива:

Теорема 9 (Инвариантность энергии относительно замены координат). Пусть $L : T^p X_m \to \Re$ - гладкая функция. $L(x,...,\overset{(p)}{x})$, $p^k_{i,n}$, $H_n(L,x)$ - локальная запись функции L, импульсов $k-ого$ порядка и энергии ранга n соответственно при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

$$H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x}...,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^k_{i,n} \overset{(k)i}{x}$$

$\bar{L}(\bar{x},...,\overset{(p)}{\bar{x}})$, $\overline{p^j_{k,n}}$, $\bar{H}_n(\bar{L},\bar{x})$-локальная запись функции L, импульсов $k-ого$ порядка и энергии ранга n соответственно при выборе локальных координат $(\bar{x})$ в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

$$\bar{H}_n(\bar{L},\bar{x}) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) = \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x}) + \sum_{j=1}^{m} \overline{p^j_{k,n}} \overline{\overset{(k)i}{x}} \quad \text{Тогда} \quad H(L,x,n) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)$$

Замечание 5. Для $n = 1$: $\quad p^i_k(n) = p^i_{k,n}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D^l_t\left(\dfrac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$

$$p^i_1(1) = p^i_{1,1}(x,\dot{x},...,\overset{(2\cdot1-1)}{x}) = \sum_{l=0}^{1-1}(-1)^l D^l_t\left(\frac{\partial L(x,\overset{(1)}{x})}{\partial \overset{(l+1)i}{x}}\right) = \frac{\partial L(x,\overset{(1)}{x})}{\partial \overset{(1)i}{x}} = \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}$$

$L(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x})) = \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}) \quad x = x(\bar{x}) = S(\bar{x})$ - невырожденная замена

$$H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x}...,\overset{(n)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^i_{k,n}(x,...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x}$$

$$H_1(L,x) = H(L,x,1) = -L(x,\dot{x}) + \sum_{k=1}^{1}\sum_{i=1}^{m} p^i_{1,1}\overset{(1)i}{x} = -L(x,\dot{x}) + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^i =$$

$$= -\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^k(x)}{\partial \dot{x}^i} + \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial \dot{\bar{x}}^k(x)}{\partial \dot{x}^i}\right)\dot{x}^i = -\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\dot{\bar{x}}^l = \quad (45)$$

$$= -\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\dot{\bar{x}}^l = -\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\delta^k_l\dot{\bar{x}}^l = -\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\dot{\bar{x}}^k =$$

$$= -\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{m} \overline{p_{1,1}^{k}}\,\dot{\bar{x}}^{k} = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},1) = \bar{H}_1(\bar{L},\bar{x})$$, где $\delta_k^l = \begin{cases}1, k=l\\ 0, k\neq l\end{cases} - символ\ \ Кронеккера$.

В (45) была использована теорема 1:

$$\frac{\partial x^k}{\partial \dot{\bar{x}}^i} = \frac{\partial D_t^0 x^k(\bar{x})}{\partial D_t^1 \bar{x}^i} = \frac{\partial \overset{(0)}{x}{}^k(\bar{x})}{\partial \overset{(1)}{\bar{x}}{}^i} = 0(так\ как\, 0<1)\ , \quad \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \dot{\bar{x}}^i} = \frac{\partial \overset{(1)}{x}{}^k}{\partial \overset{(1)}{\bar{x}}{}^i} = C_1^1 \cdot D_t^{1-1} \cdot \frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = 1 \cdot D_t^0 \cdot \frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}$$

Теорема проверена для $n=1$.

Для $n=2: L(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x}),\ddot{x}(\bar{x})) = \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})$ $x = x(\bar{x}) = S(\bar{x})$ - невырожденная замена

$$p_1^i(2) = p_{1,2}^i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2\cdot 2-1)}{x}) = \sum_{l=0}^{2-1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\overset{(1)}{x},\overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(l+1)i}{x}}\Big) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^i} - D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^i}\Big)$$

$$p_2^i(2) = p_{2,2}^i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2\cdot 2-1)}{x}) = \sum_{l=0}^{2-2}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\overset{(1)}{x},\overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(l+1)i}{x}}\Big) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^i}$$

$$H_2(L,x) + L(x,\dot{x},\ddot{x}) = H(L,x,2) + L(x,\dot{x},\ddot{x}) = \sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{m} p_{k,2}^i(x,\dots,\overset{(2\cdot 2-k)}{x})\overset{(k)i}{x} = \sum_{i=1}^{m}\Big(\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^i} - D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^i}\Big)\Big)\dot{x}^i +$$

$$+\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^i}\ddot{x}^i\Big) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} + \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \ddot{\bar{x}}^k}C_2^1 D_t\Big(\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\Big) - D_t\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \ddot{\bar{x}}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\Big)\Big)\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\dot{\bar{x}}^j$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \ddot{\bar{x}}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\Big(D_t\Big(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\Big)\dot{\bar{x}}^j + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\ddot{\bar{x}}^j\Big) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} + \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \ddot{\bar{x}}^k}D_t\Big(\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\Big) -$$

$$-D_t\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \ddot{\bar{x}}^k}\Big)\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\Big)\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\dot{\bar{x}}^j + \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \ddot{\bar{x}}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\Big(D_t\Big(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\Big)\dot{\bar{x}}^j + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\ddot{\bar{x}}^j\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k} + \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \ddot{\bar{x}}^k}\Big)\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\dot{\bar{x}}^j - D_t\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \ddot{\bar{x}}^k}\Big)\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \bar{x}^j}\dot{\bar{x}}^j +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \ddot{\bar{x}}^k}\ddot{\bar{x}}^j\Big(D_t\Big(\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\Big)\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}D_t\Big(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\Big)\Big) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\Big(\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k} - D_t\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \ddot{\bar{x}}^k}\Big)\Big)\dot{\bar{x}}^j +$$

$$+\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \ddot{\bar{x}}^k}\Big)\delta_j^k\dot{\bar{x}}^j + \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \ddot{\bar{x}}^k}\ddot{\bar{x}}^j D_t\Big(\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\Big) = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k} - D_t\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \ddot{\bar{x}}^k}\Big)\Big)\dot{\bar{x}}^k + \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \ddot{\bar{x}}^k}\ddot{\bar{x}}^k =$$

$$= \bar{H}(\bar{L},\bar{x},2) + \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})\ , \qquad D_t\Big(\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\Big) = D_t(\delta_j^k) = 0\ ,\ \ \delta_j^k = \begin{cases}1, k=j\\ 0, k\neq j\end{cases} - символ\ \ Кронеккера$$

Утверждение теоремы проверено для случая $n=2$.

Замечание 6. При $p > n$ энергия системы при замене локальных координат, вообще говоря, не сохраняется. Рассмотрим случай $p=2, n=1$(старший порядок производной выше ранга энергии)

$L(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x}),\ddot{x}(\bar{x})) = \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})$ $x = x(\bar{x}) = S(\bar{x})$ - невырожденная замена

$$H_1(L,x)=H(L,x,1)=-L(x,\dot{x},\ddot{x})+\sum_{k=1}^{1}\sum_{i=1}^{m}p^{i}_{1,1}\overset{(1)i}{x}=-L(x,\dot{x},\ddot{x})+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial\dot{x}^{i}}\dot{x}^{i}=$$

$$=-\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial\bar{x}^{k}}\frac{\partial\bar{x}^{k}(x)}{\partial\dot{x}^{i}}+\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^{k}}\frac{\partial\dot{\bar{x}}^{k}(x)}{\partial\dot{x}^{i}}+\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial\ddot{\bar{x}}^{k}}\frac{\partial\ddot{\bar{x}}^{k}(x)}{\partial\dot{x}^{i}}\right)\dot{x}^{i}=$$

$$-\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^{k}}\frac{\partial\bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{i}}{\partial\bar{x}^{l}}\dot{\bar{x}}^{l}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial\ddot{\bar{x}}^{k}}C_2^1D_t^{2-1}\left(\frac{\partial\bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\right)\frac{\partial x^{i}}{\partial\bar{x}^{l}}\dot{\bar{x}}^{l}=$$

$$=-\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^{k}}\frac{\partial\bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{i}}{\partial\bar{x}^{l}}\dot{\bar{x}}^{l}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial\ddot{\bar{x}}^{k}}C_2^1D_t^{2-1}\left(\frac{\partial\bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\right)\frac{\partial x^{i}}{\partial\bar{x}^{l}}\dot{\bar{x}}^{l}=$$

$$=-\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^{k}}\delta^{k}_{l}\dot{\bar{x}}^{l}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial\ddot{\bar{x}}^{k}}C_2^1D_t^{2-1}\left(\frac{\partial\bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\right)\frac{\partial x^{i}}{\partial\bar{x}^{l}}\dot{\bar{x}}^{l}=$$

$$-\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial\dot{\bar{x}}^{k}}\dot{\bar{x}}^{k}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial\ddot{\bar{x}}^{k}}C_2^1D_t^{2-1}\left(\frac{\partial\bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\right)\frac{\partial x^{i}}{\partial\bar{x}^{l}}\dot{\bar{x}}^{l}$$

$$=\bar{H}(\bar{L},\bar{x},1)+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial\ddot{\bar{x}}^{k}}2D_t\left(\frac{\partial\bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\right)\frac{\partial x^{i}}{\partial\bar{x}^{l}} \tag{46}$$

Видно, что 2-ое слагаемое в (46) препятствует сохранению энергии при замене локальных координат (x) в базе X_m расслоения T^nX_m. То есть при $p > n$ энергия системы при замене локальных координат, вообще говоря, не сохраняется.

Литература:

1. В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко Современная геометрия. Методы и приложения, М.,1994,УРСС.
2. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.:Гостехиздат. 1956
3. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М.:Наука,1974.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.:Наука,1974.
5 Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля. - М.:Наука.1973.507с.
6. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика. -М.:Наука.1973.507с.
7. Э. М. Галеев, В.М.Тихомиров Краткий курс теории экстремальных задач. - М.: Издательство МГУ 1989.203 с.
8. Дирак П. Лекции по квантовой механики - М. Мир, 1968.
9.Ехилевский С. Г., Голубева О. В. , Пастухов Ю.Ф. ,Пастухов Д.Ф. ,Обобщение теоремы Гамильтона-Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка, Вестник полоцкого государственного университета, Фундаментальные науки,№12, 2016.
10.Ехилевский С. Г., Голубева О. В. , Пастухов Ю.Ф. ,Пастухов Д.Ф. ,Закон преобразования Обобщенного импульса, Вестник полоцкого государственного университета, Фундаментальные науки,№4 2017.
11 Л.Е. Евтушик, Ю.Г. Лумисте, Н. М. Остиану, А. П. Широков, Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях, Итоги науки и техники. Сер. Пробл. геом., 1979, том 9.
12. В.В.Трофимов, А.Т.Фоменко Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений. Издательство "Факториал", 1995.

TENSOR OF GENERAL ENERGY

Y. PASTUHOV , D. PASTUHOV, S. CHERNOV

Abstract We prove the invariance of energy of rank n of a system whose state is described by a smooth function defined in a stratified velocity space. $L: T^p X_m \to \Re \quad p \le n$.

$L(x,..., \overset{(n)}{x})$, $p_{i,n}^k$, $H_n(L,x)$ - a local function, momentum, and energy of rank n, respectively, when local coordinates (x) are chosen in the base X_m of the bundle $T^p X_m$.

$$H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x}..., \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{i,n}^k \overset{(k)i}{x}$$

$\bar{L}(\bar{x},..., \overline{\overset{(n)}{x}})$, $\overline{p_{k,n}^j}$, $\bar{H}_n(\bar{L},\bar{x})$ – a local function, impulse of order and energy of rank n, respectively, when choosing local coordinates (x) in the base X_m of the bundle $T^p X_m$.

Then $H(L,x,n) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)$