

МАТЕМАТИКА

УДК 517.6:517.958

АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ

канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ
(Полоцкий государственный университет)

Предложен алгоритм решения уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности с восьмым алгебраическим порядком погрешности. Для симметрической пятидиагональной матрицы получены формулы прогонки системы линейных уравнений с краевым условием Дирихле. Доказаны достаточные условия корректности формул прогонки вперед для пятидиагональной симметрической матрицы. Доказано, что аппроксимация узловых значений решения для оператора Пуассона по симметричному шаблону содержит только частные производные четного порядка по каждой из координат.

Ключевые слова: численные методы решения эллиптических уравнений математической физики, достаточные условия корректности формул прогонки пятидиагональной матрицы.

Введение. Задачи с численным решением уравнения Пуассона встречаются во многих физико-технических приложениях, большой класс краевых задач математической физики также сводится к уравнению Пуассона на прямоугольнике. В статье [1] исходная гидродинамическая задача сводится к замкнутой системе четырех уравнений в частных производных относительно функций тока и вихря жидкости, три из которых являются уравнениями параболического типа, а четвертое – уравнение Пуассона относительно функции тока, в котором правая часть представляет собой функцию вихря ($\Delta\psi = \varphi$, [1, с. 60, формула (5)]). Система данных уравнений решается многократно по циклу методом чередующихся направлений, поэтому точность аппроксимации уравнения Пуассона является актуальной задачей в прикладной математике. Важно выработать численные алгоритмы решения уравнения Пуассона с большим алгебраическим порядком погрешности для экономии времени счета и сохранения небольшой нормы погрешности. В работе [2, с. 227] приведена явная разностная формула на девятиточечном шаблоне, позволяющая найти решение уравнения Пуассона методом простой итерации. Симметричным девятиточечным шаблоном можно покрыть весь прямоугольник по общим границам, который является универсальным шаблоном внутри прямоугольника и на его сторонах (границах). Приведенная авторами формула простой итерации дает четвертый порядок невязки уравнения Пуассона в равномерной норме и общую относительную погрешность $10^{-5} - 10^{-6}$. Такой же порядок относительной погрешности приводится в программах для решения эллиптических уравнений у А.А. Самарского [3].

В данной работе нами предложен алгоритм для решения уравнения Пуассона. По формуле простой итерации с шестым порядком погрешности находятся узловые значения решения вблизи четырех вершин прямоугольника. Методом прогонки с трехдиагональной матрицей, устойчивость которой обеспечивает частично неявная разностная формула с шестым порядком погрешности, находятся приграничные узловые значения численного решения. Внутренние узловые значения решения на следующем итерационном слое находятся по частично неявной итерационной формуле с десятым порядком погрешности на симметричном 25 точечном шаблоне с пяти диагональной матрицей прогонки. Кроме аппроксимирующих формул с указанными порядками погрешности нами получено достаточное условие корректности метода прогонки с пяти диагональной матрицей. Приведенный нами алгоритм дает восьмой порядок (при числе узлов порядка 1600) невязки уравнения Пуассона в равномерной норме и общую относительную погрешность $10^{-13} - 10^{-14}$ при одних и тех же параметрах задачи, что и в работе [2]. Приведен пример, решенный аналитически, и написана программа на языке FORTRAN, поддерживающем максимальные размерности массива решения. В отличие от работы [3], где для шаблона граничного разностного оператора можно использовать любое число узлов и добиться равенства порядков погрешности внутреннего и граничного операторов, в данной задаче граничный оператор имеет порядок погрешности на 2 меньше, чем внутренний оператор, так как шаблон граничного оператора имеет меньшее число узлов, чем шаблон внутреннего оператора.

Постановка задачи. В качестве примера для разностной схемы решим уравнение Пуассона на прямоугольнике:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin(x), & 0 < x, y < \pi, \\ u(0, y) = u(\pi, y) = \sin(y), \\ u(x, 0) = u(x, \pi) = \sin(x), \\ 0 \leq x, y \leq \pi. \end{cases} \quad (1)$$

Проведем редукцию линейной задачи (1) [5], т.е. сведем решение (1) к сумме решений 3 простых систем: $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y)$. Первая система содержит одно неоднородное краевое условие:

$$1) \begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, & 0 < x, y < \pi, \\ u_1(0, y) = u_1(\pi, y) = \sin(y), \\ u_1(x, 0) = u_1(x, \pi) = 0, \\ 0 \leq x, y \leq \pi. \end{cases}$$

Решаем задачу 1) методом разделения переменных $u(x, y) = X(x)Y(y)$, $X''Y + XY'' = 0$. Выберем функцию $Y(y) = \sin(y)$, совпадающую с неоднородным граничным условием на первой части границы и автоматически обращающее в 0 решение на второй части границы. Тогда для $X(x)$ имеем

$$X'' \sin(y) - X \sin(y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X'' - X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Общее решение последней краевой задачи находим на множестве гиперболических функций $X(x) = A \operatorname{sh}(x) + B \operatorname{ch}(x)$, $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Используя граничные условия:

$$X(0) = A \operatorname{sh}(0) + B \operatorname{ch}(0) = B = 1; \quad X(\pi) = A \operatorname{sh}(\pi) + \operatorname{ch}(\pi) = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1 - \operatorname{ch}(\pi)}{\operatorname{sh}(\pi)},$$

запишем решение 1) частной задачи: $u_1(x, y) = \left(\left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\pi)}{\operatorname{sh}(\pi)} \right) \operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x) \right) \sin(y)$.

Найдем решение второй частной задачи:

$$2) \begin{cases} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0, & 0 < x, y < \pi, \\ u_2(0, y) = u_2(\pi, y) = 0, \\ u_2(x, 0) = u_2(x, \pi) = \sin(x), \\ 0 \leq x, y \leq \pi. \end{cases}$$

Аналогично, разделяя переменные, выбираем функцию $X(x) = \sin(x)$, автоматически удовлетворяющую первому граничному условию 2) и совпадающую со вторым граничным условием.

$$Y'' \sin(x) - Y \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Y'' - Y = 0 \\ Y(0) = Y(\pi) = 1. \end{cases} \quad (3)$$

Краевые задачи (3) и (2) совпадают с точностью до замены переменных $X \rightarrow Y$, $x \rightarrow y$, поэтому выписываем ответ для задачи 2):

$$u_2(x, y) = \left(\left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\pi)}{\operatorname{sh}(\pi)} \right) \operatorname{sh}(y) + \operatorname{ch}(y) \right) \sin(x).$$

Находим решение третьей задачи с уравнением Пуассона и однородными краевыми условиями:

$$3) \begin{cases} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = \sin(x), & 0 < x, y < \pi \\ u_3(0, y) = u_3(\pi, y) = 0 \\ u_3(x, 0) = u_3(x, \pi) = 0 \\ 0 \leq x, y \leq \pi \end{cases}$$

Разделяя переменные, выбираем функцию аргумента x , повторяющую неоднородность уравнения Пуассона $X(x) = \sin(x)$, $u(x, y) = \sin(x)Y(y)$. При этом автоматически выполняется первое краевое условие задачи 3), решение подставим в уравнение Пуассона:

$$-\sin(x)Y + Y'' \sin(x) = \sin(x) \Leftrightarrow Y'' - Y = 1.$$

$$\begin{cases} Y'' - Y = 1 \\ Y(0) = Y(\pi) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Находим частное решение дифференциального уравнения краевой задачи (4)

$$Y_{part}(y) = -1.$$

Общее решение однородного уравнения следующее:

$$Y(y) = A \operatorname{sh}(y) + B \operatorname{ch}(y).$$

Общее решение неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения есть сумма решений частного неоднородного и общего однородного уравнений

$$Y_H(y) = -1 + A \operatorname{sh}(y) + B \operatorname{ch}(y).$$

Теперь нужно выполнить краевые условия задачи (4):

$$Y_H(0) = -1 + A \operatorname{sh}(0) + B \operatorname{ch}(0) = B - 1 = 0 \Leftrightarrow B = 1, \quad Y_H(\pi) = -1 + A \operatorname{sh}(\pi) + \operatorname{ch}(\pi) = 0 \Leftrightarrow A = \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\pi)}{\operatorname{sh}(\pi)} \right),$$

тогда решение краевой задачи (4) есть

$$u_3(x, y) = \left(-1 + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\pi)}{\operatorname{sh}(\pi)} \right) \operatorname{sh}(y) + \operatorname{ch}(y) \right) \sin(x).$$

Решение исходной задачи (1) есть сумма решений 3 частных задач:

$$\begin{aligned} u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) = & \left(\left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\pi)}{\operatorname{sh}(\pi)} \right) \operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x) \right) \sin(y) + \\ & + \left(\left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\pi)}{\operatorname{sh}(\pi)} \right) \operatorname{sh}(y) + \operatorname{ch}(y) \right) \sin(x) + \left(-1 + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\pi)}{\operatorname{sh}(\pi)} \right) \operatorname{sh}(y) + \operatorname{ch}(y) \right) \sin(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Подстановкой формулы (5) в три уравнения системы (1) убеждаемся, что она является решением задачи (1), а в силу теорем существования и единственности для уравнения Пуассона [5] – единственным решением. Нам понадобится раскладывать в ряд Тейлора сумму узловых значения функций на симметрично расположенных узлах с центральным значением $u_{0,0}$. Для сокращения выкладок докажем следующее **утверждение 1**.

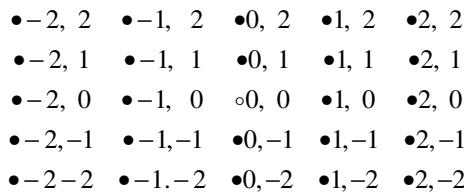
Утверждение 1. Пусть множество узлов шаблона с центром (0,0) можно разбить на прямоугольники с вершинами в данных узлах и сторонами, параллельными координатным осям, тогда разложение оператора Лапласа в ряд имеет только производные с четным порядком по каждой из координат.

Доказательство. Обозначим координаты 4 вершин прямоугольника $(h_1, h_2), (h_1, -h_2), (-h_1, -h_2), (-h_1, h_2)$ соответственно с узловыми значениями $u_{1,2}, u_{1,-2}, u_{-1,-2}, u_{-1,2}$. В силу равноудаления узлов от центра и симметрии шаблона аппроксимация оператора Лапласа содержит узловые значения $u_{1,2}, u_{1,-2}, u_{-1,-2}, u_{-1,2}$ с равными весами. По формуле Ньютона – Лейбница имеем

$$\begin{aligned}
 u_{1,2} + u_{1,-2} + u_{-1,-2} + u_{-1,2} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^m \frac{1}{m!} C_m^k h_1^k h_2^{m-k} \frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}} + \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{m-k}}{m!} C_m^k h_1^k h_2^{m-k} \frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}} + \right. \\
 &+ \left. \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^m}{m!} C_m^k h_1^k h_2^{m-k} \frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}} + \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{m!} C_m^k h_1^k h_2^{m-k} \frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^m \frac{1}{m!} \left(C_m^k h_1^k h_2^{m-k} \frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}} \times \right. \right. \\
 &\times \left. \left. \left(1 + (-1)^{m+k} + (-1)^m + (-1)^k \right) \right) \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \frac{1}{m!} C_m^k h_1^k h_2^{m-k} \frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}} \left\{ \begin{array}{l} 1 - (-1)^k - 1 + (-1)^k = 0, m = 2l + 1 \\ 2 + 2(-1)^k = \begin{cases} 0, k = 2s + 1 \\ 4, k = 2s \end{cases}, m = 2l \end{array} \right\} = \\
 &= 4u_{0,0} + 4 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=0}^l \frac{C_{2l}^{2s}}{(2l)!} h_1^{2s} h_2^{2l-2s} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial y^{2l-2s}}. \tag{6}
 \end{aligned}$$

В формуле (6) частные производные $\frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s} \partial y^{2l-2s}}$ вычисляются в центральном узле (0,0). Множество узлов шаблона разбивается на четверки вершин, и согласно формуле (6) разложение в ряд Тейлора содержит производные только четного порядка $2l$ (и четного порядка по каждой переменной $2s, 2l - 2s$). Тогда разложение оператора Лапласа в ряд с учетом всех узлов шаблона содержит только производные четных порядков $2s, 2l - 2s$ (хотя каждая четверка вершин имеет свой весовой коэффициент в квадратурной формуле). Что и завершает доказательство **утверждения 1**.

Аппроксимация внутреннего оператора. Для аппроксимации уравнения Пуассона на внутренних узлах равномерной прямоугольной сетки исследуем симметричный 25 точечный шаблон, центральный узел указан белым кружком, ось y направим вниз, ось x вправо, координаты узлов в масштабах (h_1, h_2) отмечены на рисунке целыми числами:



Для удобства выберем одинаковый шаг сетки по обоим переменным, т.е. случай $h_1 = h_2 = h$. В таком случае равномерная сетка на прямоугольнике имеет различное число узлов на его сторонах. Аппроксимируем оператор Лапласа линейной квадратурной формулой:

$$\begin{aligned}
 u_{xx} + u_{yy} \equiv \Delta u \equiv f(x, y) &= \frac{1}{h^2} \left(C_0 u_{0,0} + C_1 (u_{0,1} + u_{0,-1} + u_{1,0} + u_{-1,0}) + C_2 (u_{1,1} + u_{1,-1} + u_{-1,1} + u_{-1,-1}) + \right. \\
 &+ C_3 (u_{0,2} + u_{0,-2} + u_{2,0} + u_{-2,0}) + C_4 (u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,-2} + u_{-2,1} + u_{-1,2} + u_{2,-1} + u_{-1,-2} + u_{-2,-1}) + \\
 &\left. + C_5 (u_{2,2} + u_{2,-2} + u_{-2,2} + u_{-2,-2}) \right). \tag{7}
 \end{aligned}$$

Формула (7) использует все 25 узловых значений шаблона.

Разложим в ряд Тейлора суммы четверок узловых значений с точностью до $O(h^{10})$ по формуле (6):

$$u_{0,1} + u_{0,-1} + u_{1,0} + u_{-1,0} = 4u_{0,0} + h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{h^4}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{h^6}{360} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \frac{h^8}{20160} \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + O(h^{10}). \quad (8)$$

Аналогично

$$u_{1,1} + u_{-1,1} + u_{1,-1} + u_{-1,-1} = 4u_{0,0} + 2h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{h^4}{6} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{h^6}{180} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + 15 \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 15 \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \frac{h^8}{10080} \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + 28 \frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} + 70 \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} + 28 \frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + O(h^{10}). \quad (9)$$

Заменим в формуле (8) $h \rightarrow 2h$ и получим выражение (10)

$$u_{0,2} + u_{0,-2} + u_{2,0} + u_{-2,0} = 4u_{0,0} + 4h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{4h^4}{3} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{8h^6}{45} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \frac{4h^8}{315} \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + O(h^{10}). \quad (10)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} & u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,-2} + u_{-2,1} + u_{-1,2} + u_{2,-1} + u_{-1,-2} + u_{-2,-1} = \\ & = 8u_{0,0} + \frac{4(1^2 + 2^2)}{2!} h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{h^4}{24} \left(4(1^4 + 2^4) \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + 4 \cdot 6(1^2 2^2 + 2^2 \cdot 1^2) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \\ & + \frac{h^6}{720} \left(4(1^6 + 2^6) \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + 4 \cdot 15 \cdot (1^2 2^4 + 2^2 \cdot 1^4) \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{h^8}{40320} \left(1028 \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + 4 \cdot 28 \cdot 68 \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \partial y^6} \right) + 4 \cdot 70 \cdot 32 \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^4 \partial x^4} \right) \right) + O(h^{10}) = \\ & = 8u_{0,0} + 10h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{h^4}{6} \left(17 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + 48 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \\ & + \frac{h^6}{180} \left(65 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + 300 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) \right) + \\ & + \frac{h^8}{10080} \left(257 \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + 1904 \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \partial y^6} \right) + 2240 \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} \right) + O(h^{10}). \end{aligned} \quad (11)$$

Заменим в формуле (9) $h \rightarrow 2h$ и получим следующую формулу:

$$u_{2,2} + u_{2,-2} + u_{-2,2} + u_{-2,-2} = 4u_{0,0} + 8h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{8h^4}{3} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{16h^6}{45} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + 15 \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 15 \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \frac{8h^8}{315} \left(\left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + 28 \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \partial y^6} \right) + 70 \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} \right) + O(h^{10}). \quad (12)$$

Подставляя в формулу (7) разложения (8)–(12) и группируя слагаемые по степеням h , получим

$$\begin{aligned} \Delta u \equiv f(x, y) &= \frac{u_{0,0}}{h^2} (C_0 + 4C_1 + 4C_2 + 4C_3 + 8C_4 + 4C_5) + \Delta u (C_1 + 2C_2 + 4C_3 + 10C_4 + 8C_5) + \\ &+ h^2 \left(\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) \left(\frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} + \frac{4C_3}{3} + \frac{17C_4}{6} + \frac{8C_5}{3} \right) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} (C_2 + 8C_4 + 16C_5) \right) + \\ &+ h^4 \left(\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) \left(\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} + \frac{8C_3}{45} + \frac{65C_4}{180} + \frac{16C_5}{45} \right) + \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) \left(\frac{15}{180} C_2 + \frac{300}{180} C_4 + \frac{16}{3} C_5 \right) \right) + \\ &+ h^6 \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) \left(\frac{C_1}{20160} + \frac{C_2}{10080} + \frac{4C_3}{315} + \frac{257C_4}{10080} + \frac{8C_5}{315} \right) + \\ &+ h^6 \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \partial y^6} \right) \left(\frac{28}{10080} C_2 + \frac{1904}{10080} C_4 + \frac{224}{315} C_5 \right) + \\ &+ h^6 \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} \left(\frac{70}{10080} C_2 + \frac{2240}{10080} C_4 + \frac{560}{315} C_5 \right) + O(h^8). \end{aligned} \tag{13}$$

Замечание 1. Формула (13) аппроксимирует уравнение Пуассона с точностью до $O(h^8)$.

Левая и правая части формулы (13) должны быть равны с точностью до $O(h^8)$. В пределе при $h \rightarrow 0$ коэффициент $(C_0 + 4C_1 + 4C_2 + 4C_3 + 8C_4 + 4C_5) = 0$ при $\frac{u_{0,0}}{h^2}$, иначе первое слагаемое правой части формулы (13) стремится к бесконечности. Коэффициент при Δu равен единице для тождественности выражения (13) с нулевой степенью по h^0 : $(C_1 + 2C_2 + 4C_3 + 10C_4 + 8C_5 = 1)$. Так как

$$f_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2},$$

то в скобке при h^2 в формуле (13) могут присутствовать только частные производные f_{xx} , f_{yy} (частные производные четного порядка и по x , и по y), следовательно, получаем уравнение:

$$2 \left(\frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} + \frac{4C_3}{3} + \frac{17C_4}{6} + \frac{8C_5}{3} \right) = C_2 + 8C_4 + 16C_5.$$

Учитывая операторное равенство для $\Delta^3 u$, сведем к нему коэффициент в формуле (13) при h^4 :

$$\Delta^3 u \equiv \Delta^2 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^3 u = \left(\frac{\partial^6}{\partial x^6} + 3 \left(\frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} \right) + \frac{\partial^6}{\partial y^6} \right) u = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4},$$

получим условие на коэффициенты $3 \left(\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} + \frac{8C_3}{45} + \frac{65C_4}{180} + \frac{16C_5}{45} \right) = \frac{15}{180} C_2 + \frac{300}{180} C_4 + \frac{16}{3} C_5$.

Учитывая операторное равенство для $\Delta^4 u$, сведем к нему коэффициенты в формуле (13) при h^6 :

$$\Delta^4 u \equiv \Delta^3 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^4 u = \left(\frac{\partial^8}{\partial x^8} + 4 \left(\frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} \right) + 6 \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + \frac{\partial^8}{\partial y^8} \right) u.$$

Получим два уравнения на коэффициенты:

$$4\left(\frac{C_1}{20160} + \frac{C_2}{10080} + \frac{4C_3}{315} + \frac{257C_4}{10080} + \frac{8C_5}{315}\right) = \frac{28}{10080}C_2 + \frac{1904}{10080}C_4 + \frac{224}{315}C_5,$$

$$6\left(\frac{C_1}{20160} + \frac{C_2}{10080} + \frac{4C_3}{315} + \frac{257C_4}{10080} + \frac{8C_5}{315}\right) = \frac{70}{10080}C_2 + \frac{2240}{10080}C_4 + \frac{560}{315}C_5.$$

Объединим все написанные условия на коэффициенты в неоднородную систему линейных уравнений, предварительно проводя элементарные преобразования:

$$\begin{cases} C_0 + 4C_1 + 4C_2 + 4C_3 + 8C_4 + 4C_5 = 0 \\ C_1 + 2C_2 + 4C_3 + 10C_4 + 8C_5 = 1 \\ C_1 - 4C_2 + 16C_3 - 14C_4 - 64C_5 = 0 \\ C_1 - 8C_2 + 64C_3 - 70C_4 - 512C_5 = 0 \\ C_1 - 12C_2 + 256C_3 - 438C_4 - 3072C_5 = 0 \\ 3C_1 - 64C_2 + 768C_3 - 698C_4 - 16384C_5 = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Система линейных неоднородных уравнений (14) имеет единственное решение

$$C_0 = -\frac{173}{70}, C_1 = \frac{8}{21}, C_2 = \frac{8}{45}, C_3 = \frac{1}{30}, C_4 = \frac{4}{315}, C_5 = \frac{1}{2520}. \quad (15)$$

Используя явный вид коэффициентов (15) перепишем формулу (7):

$$\frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} + \frac{4C_3}{3} + \frac{17C_4}{6} + \frac{8C_5}{3} = \frac{1}{2}(C_2 + 8C_4 + 16C_5) = \frac{4}{45} + \frac{16}{315} + \frac{8}{2520} = \frac{1}{7}$$

$$\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} + \frac{8C_3}{45} + \frac{65C_4}{180} + \frac{16C_5}{45} = \frac{1}{3}\left(\frac{15}{180}C_2 + \frac{300}{180}C_4 + \frac{16}{3}C_5\right) = \frac{8}{1620} + \frac{40}{5670} + \frac{16}{22680} = \frac{4}{315}$$

$$\frac{C_1}{20160} + \frac{C_2}{10080} + \frac{4C_3}{315} + \frac{257C_4}{10080} + \frac{8C_5}{315} = \frac{1}{4}\left(\frac{28}{10080}C_2 + \frac{1904}{10080}C_4 + \frac{224}{315}C_5\right) = \frac{1}{8100} + \frac{68}{113400} + \frac{1}{14175} = \frac{1}{1260}.$$

В итоге получим

$$\begin{aligned} f_{0,0} + h^2 \frac{\Delta f}{7} + \frac{4h^4}{315}(\Delta f)^2 + \frac{h^6}{1260}(\Delta f)^3 = \\ = \frac{1}{h^2} \left(-\frac{173}{70}u_{0,0} + \frac{8}{21}(u_{0,1} + u_{0,-1} + u_{1,0} + u_{-1,0}) + \frac{8}{45}(u_{1,1} + u_{1,-1} + u_{-1,1} + u_{-1,-1}) \right) + \\ + \frac{1}{30}(u_{0,2} + u_{0,-2} + u_{2,0} + u_{-2,0}) + \frac{4}{315}(u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,-2} + u_{-2,1} + u_{-1,2} + u_{2,-1} + u_{-1,-2} + u_{-2,-1}) + \\ + \frac{1}{2520}(u_{2,2} + u_{2,-2} + u_{-2,2} + u_{-2,-2}) + O(h^8). \end{aligned} \quad (16)$$

Замечание 2. Из формулы (16) видно, что квадратурная формула уравнения Пуассона для внутренних узлов сетки содержит степенной ряд относительно аргумента $h^2\Delta f$ – это результат того, что точный дифференциальный оператор Δu заменяется приближенной квадратурной формулой с точностью $O(h^{2l})$. Как видно из выражения (16), старшая степень степенного ряда равна $l-1$.

Выразим из формулы (16) центральное узловое значение $u_{0,0}$ и присвоим ему верхний индекс итерации на единицу больше, чем остальным узловым значениям решения, тогда получим формулу простой итерации:

$$\begin{aligned}
 u_{0,0}^{k+1} = & \frac{70}{173} \left[\frac{8}{21} (u_{0,1}^k + u_{0,-1}^k + u_{1,0}^k + u_{-1,0}^k) + \frac{8}{45} (u_{1,1}^k + u_{1,-1}^k + u_{-1,1}^k + u_{-1,-1}^k) + \right. \\
 & + \frac{1}{30} (u_{0,2}^k + u_{0,-2}^k + u_{2,0}^k + u_{-2,0}^k) + \frac{4}{315} (u_{1,2}^k + u_{2,1}^k + u_{1,-2}^k + u_{-2,1}^k + u_{-1,2}^k + u_{2,-1}^k + u_{-1,-2}^k + u_{-2,-1}^k) + \\
 & \left. + \frac{1}{2520} (u_{2,2}^k + u_{2,-2}^k + u_{-2,2}^k + u_{-2,-2}^k) - h^2 \left(f_{0,0} + h^2 \frac{\Delta f}{7} + \frac{4h^4}{315} (\Delta f)^2 + \frac{h^6}{1260} (\Delta f)^3 \right) \right] + O(h^{10}).
 \end{aligned} \tag{17}$$

С точки зрения устойчивости численного решения предпочтительнее использовать неявные итерационные формулы [4], тем более что, тождественно преобразуя формулу (16), мы не изменим порядок ее погрешности. Запишем в вертикальном разрезе узловые значения $u_{0,-2}^{k+1}, u_{0,-1}^{k+1}, u_{0,0}^{k+1}, u_{0,1}^{k+1}, u_{0,2}^{k+1}$ проходящем через узел (0,0) в левой части уравнения на $k+1$ слое итерации, а в правую часть перенесем все остальные слагаемые, в которой узловые значения решения находятся в слое с номером итерации k .

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{30} u_{0,-2}^{k+1} + \frac{8}{21} u_{0,-1}^{k+1} - \frac{173}{70} u_{0,0}^{k+1} + \frac{8}{21} u_{0,1}^{k+1} + \frac{1}{30} u_{0,2}^{k+1} = \\
 & - \frac{8}{21} (u_{-1,0}^k + u_{1,0}^k) - \frac{1}{30} (u_{-2,0}^k + u_{2,0}^k) - \frac{8}{45} (u_{1,1}^k + u_{1,-1}^k + u_{-1,1}^k + u_{-1,-1}^k) - \\
 & - \frac{4}{315} (u_{1,2}^k + u_{2,1}^k + u_{1,-2}^k + u_{-2,1}^k + u_{-1,2}^k + u_{2,-1}^k + u_{-1,-2}^k + u_{-2,-1}^k) - \\
 & - \frac{1}{2520} (u_{2,2}^k + u_{2,-2}^k + u_{-2,2}^k + u_{-2,-2}^k) + h^2 \left(f_{0,0} + h^2 \frac{\Delta f}{7} + \frac{4h^4}{315} (\Delta f)^2 + \frac{h^6}{1260} (\Delta f)^3 \right) + O(h^{10}).
 \end{aligned} \tag{18}$$

Неоднородная линейная система уравнений (18) относительно неизвестных узловых значений $u_{j,i}^{k+1}$ имеет пятидиагональную матрицу системы, которую можно решить методом прогонки. Рассмотрим сетку (множество из $n+1$ произвольных узлов) $\omega_{n+1} = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$. Запишем систему линейных уравнений с пятидиагональной матрицей в общем виде:

$$A_{1k} x_{k-2} + A_{2k} x_{k-1} - C_k x_k + B_{1k} x_{k+1} + B_{2k} x_{k+2} = F_k, k = \overline{2, n-2}. \tag{19}$$

Граничными условиями для (20) являются заданные значения решения в двух приграничных слоях, т.е. x_0, x_1, x_{n-1}, x_n - известны, $x_k, k = \overline{2, n-2}$ подлежат решению с использованием (19). В разностном уравнении (19) максимальная разность индексов равна 4, что соответствует краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения 4 порядка, а задание 4 приграничных значений функций является аналогом граничного условия 1 рода (Дирихле) для уравнения 2 порядка с 2 известными концевыми значениями функции на отрезке.

Решение системы линейных уравнений (19) ищем в виде

$$x_k = \lambda_{1k} x_{k+1} + \lambda_{2k} x_{k+2} + v_k, k = \overline{n-2, 2}, \tag{20}$$

тогда из формулы (20)

$$x_{k-1} = \lambda_{1k-1} x_k + \lambda_{2k-1} x_{k+1} + v_{k-1}, x_{k-2} = \lambda_{1k-2} x_{k-1} + \lambda_{2k-2} x_k + v_{k-2}. \tag{21}$$

Подставим x_{k-2}, x_{k-1} в систему линейных уравнений (19), используя выражение (21)

$$\begin{aligned}
 & A_{1k} (\lambda_{1k-2} (\lambda_{1k-1} x_k + \lambda_{2k-1} x_{k+1} + v_{k-1}) + \lambda_{2k-2} x_k + v_{k-2}) + \\
 & + A_{2k} (\lambda_{1k-1} x_k + \lambda_{2k-1} x_{k+1} + v_{k-1}) - C_k x_k + B_{1k} x_{k+1} + B_{2k} x_{k+2} = F_k \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow x_k = \frac{x_{k+1} (B_{1k} + A_{2k} \lambda_{2k-1} + A_{1k} \lambda_{1k-2} \lambda_{2k-1})}{C_k - A_{1k} \lambda_{1k-2} \lambda_{1k-1} - A_{1k} \lambda_{2k-2} - A_{2k} \lambda_{1k-1}} + \\
 & + \frac{x_{k+2} B_{2k}}{C_k - A_{1k} \lambda_{1k-2} \lambda_{1k-1} - A_{1k} \lambda_{2k-2} - A_{2k} \lambda_{1k-1}} + \frac{A_{1k} \lambda_{1k-2} v_{k-1} + A_{1k} v_{k-2} + A_{2k} v_{k-1} - F_k}{C_k - A_{1k} \lambda_{1k-2} \lambda_{1k-1} - A_{1k} \lambda_{2k-2} - A_{2k} \lambda_{1k-1}}.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Сравнивая формулы (20) и (22), получим значения прогоночных коэффициентов:

$$\lambda_{1k} = \frac{B_{1k} + A_{2k}\lambda_{2k-1} + A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{2k-1}}{C_k - A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1} - A_{1k}\lambda_{2k-2} - A_{2k}\lambda_{1k-1}}, \quad \lambda_{2k} = \frac{B_{2k}}{C_k - A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1} - A_{1k}\lambda_{2k-2} - A_{2k}\lambda_{1k-1}}, \quad (23)$$

$$v_k = \frac{A_{1k}\lambda_{1k-2}v_{k-1} + A_{1k}v_{k-2} + A_{2k}v_{k-1} - F_k}{C_k - A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1} - A_{1k}\lambda_{2k-2} - A_{2k}\lambda_{1k-1}}, \quad k = \overline{2, n-2}.$$

Кроме того, из формулы (20) ($k = 0, 1$) следует, что

$$x_0 = \lambda_{10}x_1 + \lambda_{20}x_2 + v_0, \quad x_1 = \lambda_{11}x_2 + \lambda_{21}x_3 + v_1, \quad x_{n-2} = \lambda_{1n-2}x_{n-1} + \lambda_{2n-2}x_n + v_{n-2}. \quad (24)$$

Из формул (24) видно, что x_0, x_1 принимают фиксированные значения (условие Дирихле) при любых соседних узловых значениях, если положить $v_0 = x_0, \lambda_{10} = \lambda_{20} = 0, v_1 = x_1, \lambda_{11} = \lambda_{21} = 0$.

После определения коэффициентов $v_0, \lambda_{10}, \lambda_{20}, v_1, \lambda_{11}, \lambda_{21}$ формулы (23) дают остальные коэффициенты $\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, v_k$ (**формулы прогонки вперед** $k = \overline{2, n-2}$). Зная x_{n-1}, x_n по формуле (24) находим x_{n-2} , так как $\lambda_{1n-2}, \lambda_{2n-2}, v_{n-2}$ найдены по формуле (23) прогонкой вперед. Используя (20) находим все неизвестные узловые значения (**формулы прогонки назад** $k = \overline{n-2, 2}$). То есть доказано **утверждение 2**.

Утверждение 2. Решение линейной системы уравнений с пятидиагональной матрицей (19) и известными фиксированными значениями x_0, x_1, x_{n-1}, x_n задается алгоритмом – формулы прогонки вперед (23) с краевыми условиями ($v_0 = x_0, \lambda_{10} = \lambda_{20} = 0, v_1 = x_1, \lambda_{11} = \lambda_{21} = 0$) и формулы прогонки назад (20).

Коэффициенты неявного разностного уравнения (18) свяжем с прогоночными коэффициентами (19):

$$A_{1k} = \frac{1}{30}, \quad A_{2k} = \frac{8}{21}, \quad C_k = \frac{173}{70}, \quad B_{1k} = \frac{8}{21}, \quad B_{2k} = \frac{1}{30}, \quad F_k = -\frac{8}{21}(u_{-1,0}^k + u_{1,0}^k) - \frac{1}{30}(u_{-2,0}^k + u_{2,0}^k) -$$

$$-\frac{8}{45}(u_{1,1}^k + u_{1,-1}^k + u_{-1,1}^k + u_{-1,-1}^k) - \frac{4}{315}(u_{1,2}^k + u_{2,1}^k + u_{1,-2}^k + u_{-2,1}^k + u_{-1,2}^k + u_{2,-1}^k + u_{-1,-2}^k + u_{-2,-1}^k) -$$

$$-\frac{1}{2520}(u_{2,2}^k + u_{2,-2}^k + u_{-2,2}^k + u_{-2,-2}^k) + h^2 \left(f_{0,0} + h^2 \frac{\Delta f}{7} + \frac{4h^4}{315}(\Delta f)^2 + \frac{h^6}{1260}(\Delta f)^3 \right), \quad k = \overline{2, n-2}.$$

Утверждение 3. Пусть пятидиагональная матрица линейной системы уравнений (19) с краевым условием Дирихле (известны $x_0, x_1, x_{n-1}, x_n \Leftrightarrow \lambda_{10} = \lambda_{11} = \lambda_{20} = \lambda_{21} = 0$) является:

1) симметрической: $A_{1k} = B_{2k}, A_{2k} = B_{1k}, k = \overline{2, n-2} (A_{1k} \neq 0, A_{2k} \neq 0)$;

2) удовлетворяет условию $\frac{3}{2}(|A_{1k}| + |A_{2k}| + |B_{1k}| + |B_{2k}|) < |C_k| (k = \overline{2, n-2})$,

$$\frac{3}{2}(|A_{21}| + |B_{11}| + |B_{21}|) < |C_1| (k = 1), \quad \frac{3}{2}(|B_{10}| + |B_{20}|) < |C_0| (k = 0),$$

$$\frac{3}{2}(|A_{1n-1}| + |A_{2n-1}| + |B_{1n-1}|) < |C_{n-1}| (k = n-1), \quad \frac{3}{2}(|A_{1n}| + |A_{2n}|) < |C_n| (k = n).$$

Второе условие можно назвать **строгим полуторным диагональным преобладанием**, тогда:

1) $|\lambda_{1k}| < 1, |\lambda_{2k}| < 1, k = \overline{2, n-2}$;

2) формулы прогоночных коэффициентов (23) корректны.

Доказательство:

1) Доказательство первой части **утверждения 3** проведем по индукции. Для базы индукции $k = 0, 1, 2$ из формул прогоночных коэффициентов (23) имеем:

$$|\lambda_{10}| = |\lambda_{11}| = 0 < 1, \quad |\lambda_{12}| = \left| \frac{B_{12} + A_{22}\lambda_{21} + A_{12}\lambda_{10}\lambda_{21}}{C_2 - A_{12}\lambda_{10}\lambda_{11} - A_{12}\lambda_{20} - A_{22}\lambda_{11}} \right| = \left| \frac{B_{12}}{C_2} \right| < \left| \frac{C_2}{C_2} \right| = 1,$$

$$|\lambda_{20}| = |\lambda_{21}| = 0 < 1, \quad |\lambda_{22}| = \left| \frac{B_{22}}{C_2 - A_{12}\lambda_{10}\lambda_{11} - A_{12}\lambda_{20} - A_{22}\lambda_{11}} \right| = \left| \frac{B_{22}}{C_2} \right| < \left| \frac{C_2}{C_2} \right| = 1.$$

Если $|\lambda_{1k-1}| < 1, |\lambda_{2k-1}| < 1, |\lambda_{1k-2}| < 1, |\lambda_{2k-2}| < 1$, то согласно (23) и утверждению 3 при $k = \overline{2, n-2}$:

$$|\lambda_{2k}| = \frac{|B_{2k}|}{|C_k - A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1} - A_{1k}\lambda_{2k-2} - A_{2k}\lambda_{1k-1}|} < \frac{|B_{2k}|}{|C_k| - |B_{2k}| - |A_{1k}| - |A_{2k}|} < \\ < \frac{|B_{2k}|}{|B_{1k}| + \frac{1}{2}(|B_{2k}| + |B_{1k}| + |A_{1k}| + |A_{2k}|)} < \frac{|B_{2k}|}{|B_{2k}|} = 1. \\ |\lambda_{1k}| = \left| \frac{B_{1k} + A_{2k}\lambda_{2k-1} + A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{2k-1}}{C_k - A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1} - A_{1k}\lambda_{2k-2} - A_{2k}\lambda_{1k-1}} \right| < \frac{|B_{1k}| + |A_{2k}| + |A_{1k}|}{|C_k| - |B_{2k}| - |A_{1k}| - |A_{2k}|} < \\ < \frac{|B_{1k}| + |A_{2k}| + |A_{1k}|}{|B_{1k}| + \frac{1}{2}(|B_{2k}| + |B_{1k}| + |A_{1k}| + |A_{2k}|)} = \frac{|B_{1k}| + |A_{2k}| + |A_{1k}|}{|B_{1k}| + |A_{1k}| + |A_{2k}|} = 1,$$

т.е. из $|\lambda_{1k-1}| < 1, |\lambda_{2k-1}| < 1, |\lambda_{1k-2}| < 1, |\lambda_{2k-2}| < 1 \Rightarrow |\lambda_{1k}| < 1, |\lambda_{2k}| < 1$.

Что и требовалось доказать.

2) Для корректности формул (23) достаточно, чтобы знаменатель формул не обращался в 0.

С учетом доказанного первого утверждения $|\lambda_{10}| = |\lambda_{11}| = 0 < 1, |\lambda_{20}| = |\lambda_{21}| = 0 < 1, |\lambda_{1k}| < 1,$

$|\lambda_{2k}| < 1, k = \overline{2, n-2}$, тогда $\forall k = \overline{2, n-2}$, имеем

$$|C_k - A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1} - A_{1k}\lambda_{2k-2} - A_{2k}\lambda_{1k-1}| > |C_k| - |B_{2k}| - |A_{1k}| - |A_{2k}| > |B_{1k}| + \frac{1}{2}(|B_{2k}| + |B_{1k}| + |A_{1k}| + |A_{2k}|) > 0.$$

Другими словами, знаменатели трех формул (23) сохраняют знак и в 0 не обращаются.

Что и требовалось доказать.

Замечание 3. Непосредственной проверкой убеждаемся, что коэффициенты линейной системы уравнений (25) удовлетворяют условию корректности (**утверждение 3**):

$$\frac{173}{70} \approx 2,471 > \frac{3}{2} 2 \left(\frac{1}{30} + \frac{8}{21} \right) \approx 1,242 - \text{невяная система разностных уравнений (25) с пятидиаго-}$$

нальной симметрической матрицей устойчива относительно прогоночных формул (20), (23), (24).

Аппроксимация граничного оператора. Для шаблона граничного оператора рассмотрим симметричный 15-точечный шаблон, координатные оси x, y направлены вверх и вправо, центральный узел с координатами (0,0) выделен светлым кружком. Левая граница прямоугольной области имеет координату $x = -1$ и включает 5 узлов, расположенных на ней.

$$\begin{array}{ccc} \bullet -1, 2 & \bullet 0, 2 & \bullet 1, 2 \\ \bullet -1, 1 & \bullet 0, 1 & \bullet 1, 1 \\ \bullet -1, 0 & \bullet 0, 0 & \bullet 1, 0 \\ \bullet -1, -1 & \bullet 0, -1 & \bullet 1, -1 \\ \bullet -1, -2 & \bullet 0, -2 & \bullet 1, -2 \end{array}$$

Рассмотрим случай с одинаковым шагом сетки по обоим переменным $h_1 = h_2 = h$. Оператор Лапласа является линейным оператором, который можно аппроксимировать квадратурной формулой (более того, погрешность аппроксимации является линейным оператором) в силу леммы [6]. Аппроксимируем оператор Лапласа линейной квадратурной формулой:

$$u_{xx} + u_{yy} \equiv \Delta u \equiv f(x, y) = \frac{1}{h^2} (C_0 u_{0,0} + C_1 (u_{0,1} + u_{0,-1} + u_{1,0} + u_{-1,0}) + C_2 (u_{1,1} + u_{-1,1} + u_{1,-1} + u_{-1,-1}) + \\ + C_3 (u_{0,2} + u_{0,-2}) + C_4 (u_{1,2} + u_{-1,2} + u_{-1,-2} + u_{1,-2})). \quad (26)$$

Используем формулу (6) для разложения в ряд Тейлора суммы 4-х узловых значений в вершинах прямоугольника:

$$\begin{aligned} u_{1,2} + u_{-1,2} + u_{-1,-2} + u_{1,-2} &= 4u_{0,0} + 2h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \\ &+ \frac{h^4}{6} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 24 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 16 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{h^6}{180} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + 60 \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 240 \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + 64 \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \\ &+ \frac{h^8}{10080} \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + 112 \frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} + 1120 \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} + 1792 \frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \partial y^6} + 256 \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) + O(h^{10}). \end{aligned} \quad (27)$$

$$u_{0,2} + u_{0,-2} = 2u_{0,0} + 4h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{4h^4}{3} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{8h^6}{45} \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} + \frac{4h^8}{315} \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} + O(h^{10}). \quad (28)$$

Подставим разложения (27), (28), (8), (9) в формулу (26) и сгруппируем слагаемые по степеням h^{2l} :

$$\begin{aligned} \Delta u \equiv f(x, y) &= \frac{u_{0,0}}{h^2} (C_0 + 4C_1 + 4C_2 + 2C_3 + 4C_4) + \Delta u (C_1 + 2C_2 + 2C_4) + \\ &+ u_{yy} (4C_3 + 6C_4) + h^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \left(\frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} + \frac{C_4}{6} \right) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \left(\frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} + \frac{4}{3} C_3 + \frac{8C_4}{3} \right) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} (C_2 + 4C_4) \right) + \\ &+ h^4 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \left(\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} + \frac{C_4}{180} \right) + \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} \left(\frac{15}{180} C_2 + \frac{C_4}{3} \right) + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \left(\frac{15}{180} C_2 + \frac{4C_4}{3} \right) + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \left(\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} + \frac{8C_3}{45} + \frac{64C_4}{180} \right) \right) + \\ &+ h^6 \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} \left(\frac{C_1}{20160} + \frac{C_2}{10080} + \frac{C_4}{10080} \right) + \frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} \left(\frac{28}{10080} C_2 + \frac{112}{10080} C_4 \right) + \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} \left(\frac{70}{10080} C_2 + \frac{1120}{10080} C_4 \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \partial y^6} \left(\frac{28}{10080} C_2 + \frac{1792}{10080} C_4 \right) + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \left(\frac{C_1}{20160} + \frac{C_2}{10080} + \frac{4C_3}{315} + \frac{256C_4}{10080} \right) \right) + O(h^8). \end{aligned} \quad (29)$$

Левая и правая части формулы (29) должны быть равны с точностью до $O(h^8)$. В пределе при $h \rightarrow 0$ коэффициент $C_0 + 4C_1 + 4C_2 + 2C_3 + 4C_4 = 0$ при $\frac{u_{0,0}}{h^2}$, иначе первое слагаемое правой части стремится к бесконечности. Коэффициент при Δu равен единице для тождественности выражения (29) с нулевой степенью по h : $(C_1 + 2C_2 + 2C_4 = 1)$. Коэффициент при u_{yy} должен быть равен 0, т.е. $4C_3 + 6C_4 = 0$. Все остальные слагаемые в формуле (29) необходимо выразить через частные производные четного порядка (и по x , и по y) от правой части уравнения Пуассона – функции $f(x, y)$. Так как в скобке при h^2 могут присутствовать только частные производные f_{xx}, f_{yy} , то в общем случае получаем

$$B_1 f_{xx} + B_2 f_{yy} = B_1 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + B_2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = B_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + (B_1 + B_2) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + B_2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}.$$

В силу последнего уравнения в (29) имеем связь $\frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} + \frac{C_4}{6} + \frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} + \frac{4}{3} C_3 + \frac{8C_4}{3} = (C_2 + 4C_4)$.

Найдем связь коэффициентов в (29) с h^4 . Вообще говоря, сумма со всеми четными производными $f(x, y)$

$$\begin{aligned} B_1 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + B_2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + B_3 \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} &= B_1 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} \right) + B_2 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) + B_3 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial y^4 \partial x^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) = \\ &= B_1 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + (B_1 + B_2) \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + (B_2 + B_3) \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + B_3 \frac{\partial^6 u}{\partial y^6}. \end{aligned}$$

В силу последнего уравнения в скобке с h^4 в формуле (29) получаем уравнение связи:

$$\frac{15}{180}C_2 + \frac{C_4}{3} - \left(\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} + \frac{C_4}{180} \right) = \frac{15}{180}C_2 + \frac{4C_4}{3} - \left(\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} + \frac{8C_3}{45} + \frac{64C_4}{180} \right) \Leftrightarrow 32C_3 - 117C_4 = 0.$$

По сравнению с формулой (13), у которой восьмой алгебраический порядок погрешности формулы (29) равен шести, т.е. h^6 . Объединим все условия на коэффициенты в систему линейных уравнений, предварительно приводя элементарные преобразования:

$$\begin{cases} C_0 + 4C_1 + 4C_2 + 2C_3 + 4C_4 = 0 \\ C_1 + 2C_2 + 2C_4 = 1 \\ 4C_3 + 6C_4 = 0 \\ C_1 - 4C_2 + 8C_3 - 7C_4 = 0 \\ 32C_3 - 117C_4 = 0 \end{cases} \quad (30)$$

Система линейных неоднородных уравнений (30) имеет единственное решение

$$C_0 = -\frac{10}{3}, C_1 = \frac{2}{3}, C_2 = \frac{1}{6}, C_3 = 0, C_4 = 0, \frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} = \frac{1}{12}, \frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} = \frac{1}{360}, \frac{15}{180}C_2 = \frac{1}{72}. \quad (31)$$

Перепишем формулу (29) с найденными коэффициентами из (31)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} \left(-\frac{10}{3}u_{0,0} + \frac{2}{3}(u_{0,1} + u_{0,-1} + u_{1,0} + u_{-1,0}) + \frac{1}{6}(u_{1,1} + u_{-1,1} + u_{1,-1} + u_{-1,-1}) \right) = \\ & = \Delta u + h^2 \left(\frac{1}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \frac{1}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + h^4 \left(\frac{1}{360} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right) + \frac{1}{72} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) \right) + O(h^6) = \\ & = f + \frac{h^2}{12} \Delta f + h^4 \left(\frac{1}{360} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right) + \frac{1}{90} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + O(h^6) = \\ & = f_{0,0} + \frac{h^2}{12} \Delta f + h^4 \left(\frac{\Delta f^2}{360} + \frac{1}{180} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + O(h^6). \end{aligned} \quad (32)$$

Из формулы (32) явно выразим $u_{0,0}^{k+1}$ центральное узловое значение на $k+1$ слое итерации, остальные узловые значения расположим на k слое итерации:

$$\begin{aligned} u_{0,0}^{k+1} &= \frac{1}{5} \left(u_{0,1}^k + u_{0,-1}^k + u_{1,0}^k + u_{-1,0}^k \right) + \frac{1}{20} \left(u_{1,1}^k + u_{-1,1}^k + u_{1,-1}^k + u_{-1,-1}^k \right) - \\ & - \frac{3}{10} h^2 f_{0,0} - h^4 \frac{\Delta f}{40} - h^6 \frac{\Delta f^2}{1200} - \frac{h^6}{600} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + O(h^8). \end{aligned} \quad (33)$$

Формула простой итерации, приведенная в сборнике [2], отличается от полученной нами формулы (33) отсутствием последних двух слагаемых, поэтому у нас порядок погрешности на 2 выше, а формула точнее. Из формулы (32) легко получить неявную формулу для линейной системы уравнений с трехдиагональной матрицей прогонки, получаемую как частный случай из системы линейных уравнений (19) ($A_k = B_{2k} = 0$):

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}u_{0,-1}^{k+1} - \frac{10}{3}u_{0,0}^{k+1} + \frac{2}{3}u_{0,1}^{k+1} = -\frac{1}{6} \left(u_{1,1}^k + u_{-1,1}^k + u_{1,-1}^k + u_{-1,-1}^k \right) - \\ & - \frac{2}{3} \left(u_{1,0}^k + u_{-1,0}^k \right) + h^2 \left(f_{0,0} + \frac{h^2}{12} \Delta f + h^4 \left(\frac{\Delta f^2}{360} + \frac{1}{180} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (34)$$

$$A_k x_{k-1} - C_k x_k + B_k x_{k+1} = F_k, \quad A_k = B_k = \frac{2}{3}, \quad C_k = \frac{10}{3},$$

$$F_k = -\frac{1}{6} \left(u_{1,1}^k + u_{1,-1}^k + u_{-1,1}^k + u_{-1,-1}^k \right) - \frac{2}{3} \left(u_{1,0}^k + u_{-1,0}^k \right) +$$

$$+ h^2 \left(f_{0,0} + \frac{h^2}{12} \Delta f + h^4 \left(\frac{\Delta f^2}{360} + \frac{1}{180} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right), \quad k = \overline{1, n-1}.$$
(35)

Из выражений (21), (23) получим формулы прогонки назад:

$$x_k = \lambda_k x_{k+1} + v_k, \quad k = \overline{n-1, 1}$$
(36)

и формулы прогонки вперед.

$$\lambda_k = \frac{B_k}{C_k - A_k \lambda_{k-1}}, \quad v_k = \frac{A_k v_{k-1} - F_k}{C_k - A_k \lambda_{k-1}}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad \lambda_0 = 0, \quad v_0 = x_0.$$
(37)

Условие устойчивости выполнено автоматически [4].

$$|A_k| + |B_k| < |C_k|, \quad k = \overline{n-1, 1}, \quad \Leftrightarrow \frac{4}{3} < \frac{10}{3}.$$

Метод прогонки с несимметричной трехдиагональной матрицей был использован авторами и в работе [7].

Программа для решения уравнения Пуассона написана на FORTRAN:

```

program puasson; use dfimsl
integer(8), parameter :: n=120, n1=60, m=20000; integer(8) :: i, j, k, kk
real(8) :: u(0:m+1, 0:n1+1, 0:n+1), a, b, d, pi, x, y
real(8) :: res(0:n1+1, 0:n+1), delta(0:n1+1, 0:n+1), max, fif1(0:n+1), fif0(0:n+1), fif10(0:n+1), fif11(0:n+1)
real(8) :: c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8, nu00(0:n+1), ll(0:n+1)
real(8) :: c(0:n+1), fif(0:n+1), l1(0:n+1), l2(0:n+1), nu(0:n+1), nu0(0:n+1), l(0:n+1)
real(8) :: cch, ssh, a1(0:n+1), a2(0:n+1), b1(0:n+1), b2(0:n+1), f, laplf1, laplf2, laplf
real(8) :: h1, h2, h, aa(0:n+1), bb(0:n+1), c0(0:n+1)
real(8) :: ss1, ss2, aa1, aa2, bb1, bb2, cc, c11, c22, c33, c44, c55, c66
cch(x) = (dexp(x) + dexp(-x)) / 2d0; ssh(x) = (dexp(x) - dexp(-x)) / 2d0
aa1(x, y) = dsin(y); aa2(x, y) = dsin(y); bb1(x, y) = dsin(x)
bb2(x, y) = dsin(x); f(x, y) = dsin(x)
laplf1(h1, x, y) = -h1 * h1 * dsin(x); ss1(h1, x, y) = h1 * h1 * h1 * h1 * dsin(x)
ss2(h1, x, y) = -h1 * h1 * h1 * h1 * h1 * dsin(x); laplf(h1, x, y) = -h1 * h1 * dsin(x)
max = -1000d0; pi = 2d0 * dasin(1d0); a = 0d0; b = 2d0 * pi; cc = 0d0; d = pi
h1 = (b - a) / dfloat(n); h2 = (d - cc) / dfloat(n1)
do i = 1, n - 1, 1; do j = 1, n1 - 1, 1
u(0, j, i) = 0d0
enddo; enddo
do k1 = 0, m, 1; do i = 0, n, 1; do j = 0, n1, 1
x = a + h1 * dfloat(i); y = cc + h1 * dfloat(j)
if (i == 0 .or. i == n .or. j == 0 .or. j == n1) then
u(k1, 0, i) = bb1(x, cc); u(k1, n1, i) = bb2(x, d); u(k1, j, 0) = aa1(a, y); u(k1, j, n) = aa2(b, y)
endif; enddo; enddo; enddo
do kk = 0, n1, 1
a1(kk) = 1d0 / 30d0; a2(kk) = 8d0 / 21d0; b1(kk) = 8d0 / 21d0; b2(kk) = 1d0 / 30d0; c(kk) = 173d0 / 70d0
enddo
do k = 0, m, 1; do i = 1, n - 1, 1; do j = 1, n1 - 1, 1
if ((i == 1 .and. j == 1) .or. (i == 1 .and. j == n1 - 1) .or. (i == n - 1 .and. j == 1) .or. (i == n - 1 .and. j == n1 - 1)) then
y = cc + h1 * dfloat(j); x = a + h1 * dfloat(i)
c1 = 2d - 1 * (u(k, j - 1, i) + u(k, j + 1, i) + u(k, j, i - 1) + u(k, j, i + 1))
c2 = 5d - 2 * (u(k, j + 1, i + 1) + u(k, j + 1, i - 1) + u(k, j - 1, i - 1) + u(k, j - 1, i + 1))
c3 = -(3d - 1) * h1 * h1 * f(x, y) - (2.5d - 2) * h1 * h1 * laplf(h1, x, y) - ss1(h1, x, y) * h1 * h1 / 1200d0
u(k + 1, j, i) = c1 + c2 + c3
endif; enddo; enddo
l(1) = 0d0; l(n1 - 1) = 0d0; ll(1) = 0d0; ll(n1 - 1) = 0d0; nu0(1) = u(k + 1, 1, 1)
nu0(n1 - 1) = u(k + 1, n1 - 1, 1); nu00(1) = u(k + 1, 1, n1 - 1); nu00(n1 - 1) = u(k + 1, n1 - 1, n1 - 1)

```

```

do kk=1,n1-1,1
bb(kk)=240d0; aa(kk)=240d0;c0(kk)=1200d0
enddo
do j=2,n1-2,1
y=cc+h1*dfloat(j);x=a+h1*dfloat(i)
c4=-60d0*(u(k,j+1,2)+u(k,j+1,0)+u(k,j-1,0)+u(k,j-1,2));c5=-240d0*(u(k,j,2)+u(k,j,0))
c6=h1*h1*360d0*f(a+h1,y)+30d0*h1*h1*laplf(h1,a+h1,y)+ss1(h1,a+h1,y)*h1*h1
fif(j)=c4+c5+c6; l(j)=bb(j)/(c0(j)-aa(j)*l(j-1));nu0(j)=(aa(j)*nu0(j-1)-fif(j))/(c0(j)-aa(j)*l(j-1))
c44=-60d0*(u(k,j+1,n)+u(k,j+1,n-2)+u(k,j-1,n)+u(k,j-1,n-2));c55=-240d0*(u(k,j,n)+u(k,j,n-2))
c66=h1*h1*360d0*f(b-h1,y)+30d0*h1*h1*laplf(h1,b-h1,y)+ss1(h1,b-h1,y)*h1*h1
fif1(j)=c44+c55+c66; ll(j)=bb(j)/(c0(j)-aa(j)*ll(j-1));nu00(j)=(aa(j)*nu00(j-1)-fif1(j))/(c0(j)-aa(j)*ll(j-1))
enddo
do j=n1-2,2,-1
u(k+1,j,1)=l(j)*u(k,j+1,1)+nu0(j);u(k+1,j,n-1)=ll(j)*u(k,j+1,n-1)+nu00(j)
enddo
l(1)=0d0;l(n-1)=0d0;ll(1)=0d0;ll(n-1)=0d0;nu0(1)=u(k+1,1,1)
nu0(n-1)=u(k+1,1,n-1);nu00(1)=u(k+1,n1-1,1);nu00(n-1)=u(k+1,n1-1,n-1)
do kk=1,n-1,1
bb(kk)=240d0;aa(kk)=240d0;c0(kk)=1200d0
enddo
do i=2,n-2,1
x=a+h1*dfloat(i);y=cc+h1*dfloat(j)
c4=-60d0*(u(k,2,i+1)+u(k,0,i+1)+u(k,0,i-1)+u(k,2,i-1));c5=-240d0*(u(k,2,i)+u(k,0,i))
c6=h1*h1*360d0*f(x,cc+h1)+30d0*h1*h1*laplf(h1,x,cc+h1)+ss1(h1,x,cc+h1)*h1*h1
fif0(i)=c4+c5+c6; l(i)=bb(i)/(c0(i)-aa(i)*l(i-1));nu0(i)=(aa(i)*nu0(i-1)-fif0(i))/(c0(i)-aa(i)*l(i-1))
c44=-60d0*(u(k,n1,i+1)+u(k,n1-2,i+1)+u(k,n1,i-1)+u(k,n1-2,i-1))
c55=-240d0*(u(k,n1,i)+u(k,n1-2,i))
c66=h1*h1*360d0*f(x,d-h1)+30d0*h1*h1*laplf(h1,x,d-h1)+ss1(h1,x,d-h1)*h1*h1
fif10(i)=c44+c55+c66; ll(i)=bb(i)/(c0(i)-aa(i)*ll(i-1));nu00(i)=(aa(i)*nu00(i-1)-fif10(i))/(c0(i)-aa(i)*ll(i-1))
enddo
do i=n-2,2,-1
u(k+1,1,i)=l(i)*u(k,1,i+1)+nu0(i);u(k+1,n1-1,i)=ll(i)*u(k,n1-1,i+1)+nu00(i)
enddo
do i=2,n-2,1
l1(0)=0d0;l1(1)=0d0;l2(0)=0d0;l2(1)=0d0;l1(n1)=0d0;l2(n1)=0d0;l1(n1-1)=0d0;
l2(n1-1)=0d0;nu(n1-1)=u(k+1,n1-1,i);nu(n1)=u(k+1,n1,i);nu(1)=u(k+1,1,i);nu(0)=u(k+1,0,i)
do j=2,n1-2,1
x=a+h1*dfloat(i); y=cc+h1*dfloat(j);c1=-((8d0/21d0)*(u(k,j,i+1)+u(k+1,j,i-1))
c2=-((8d0/45d0)*(u(k,j+1,i+1)+u(k+1,j-1,i-1)+u(k,j-1,i+1)+u(k+1,j+1,i-1))
c11=-((1d0/30d0)*(u(k,j,i+2)+u(k+1,j,i-2))
c3=-((4d0/315d0)*(u(k+1,j+1,i-2) + u(k,j+1,i+2) + u(k+1,j-1,i-2) + u(k,j-1,i+2))
c33=-((4d0/315d0)*(u(k+1,j+2,i-1) + u(k,j+2,i+1) + u(k+1,j-2,i-1) + u(k,j-2,i+1))
c22=-((1d0/2520d0)*(u(k,j+2,i+2)+u(k+1,j-2,i-2)+u(k,j-2,i+2)+u(k+1,j+2,i-2))
c5=h1*h1*(f(x,y) + (1d0/7d0)*(laplf1(h1,x,y)) + (4d0/315d0)*ss1(h1,x,y)+(1d0/1260d0)*ss2(h1,x,y))
fif11(j)=c1+c2+c11+c3+c33+c22+c5
l1(j)=(a1(j)*l1(j-2)*l2(j-1)+a2(j)*l2(j-1)+b1(j) )/(c(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a2(j)*l1(j-1) -a1(j)*l2(j-2) )
l2(j)=b2(j)/(c(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2) -a2(j)*l1(j-1) )
nu(j)=(a1(j)*l1(j-2)*nu(j-1)+a2(j)*nu(j-1)+a1(j)*nu(j-2)-fif11(j))/(c(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2) -a2(j)*l1(j-1) )
enddo
do j=n1-2,2,-1
u(k+1,j,i)=l1(j)*u(k,j+1,i)+l2(j)*u(k,j+2,i)+nu(j)
enddo; enddo; enddo
do j=0,n1,1;do i=0,n,1
x=a+h1*dfloat(i);y=cc+h2*dfloat(j)
!c1=(cch(x)+ssh(x)*(1d0-cch(pi))/ssh(pi))*dsin(y)
!c2= dsin(x)*(cch(y)+ssh(y)*(1d0-cch(pi))/ssh(pi))
!c3= dsin(x)*(cch(y)-1d0+ssh(y)*(1d0-cch(pi))/ssh(pi))
c1=(cch(x)+ssh(x)*(1d0-cch(2d0*pi))/ssh(2d0*pi))*dsin(y);c2= dsin(x)*(cch(y)+ssh(y)*(1d0-cch(pi))/ssh(pi))
c3= dsin(x)*(cch(y)-1d0+ssh(y)*(1d0-cch(pi))/ssh(pi));res(j,i)=c1+c2+c3;delta(j,i)= u(m,j,i)- res(j,i)
if( delta(j,i)<0d0)then
delta(j,i)=- delta(j,i);endif
if( delta(j,i)>max)then
max=delta(j,i);endif; enddo; enddo;
print*,"norma C =",max;end program puasson

```

При $n = n_1 = 20$, $m = 5000$ программа возвращает невязку задачи (1) в равномерной норме

$$\text{norma C} = 1.1751864209253995\text{e-}10,$$

а при $n = n_1 = 40$, $m = 5000$

$$\text{norma C} = 7.476241847825804\text{e-}13,$$

что дает 8-й порядок погрешности $\frac{\|\delta u_1\|_C}{\|\delta u_2\|_C} = \frac{1,1751864209253995\text{e-}10}{7,476241847825804\text{e-}13} \approx 234 \approx 2^8 = 256$ (так как алгебраический

порядок погрешности внутреннего разностного оператора (18) равен 8). Кроме того, при $n = n_1 = 100$, $m = 20000$ программа возвращает норму относительной погрешности

$$\text{norma C} = 6.61378111\text{e-}14,$$

близкую к $1\text{e-}16$, т.е. к двойной точности $\text{real}(8)$, в то время как по формуле простой итерации у авторов [2] ($n = n_1 = 100$, $m = 20000$) получим

$$\text{norma C} = 4.567879487049620\text{e-}6 > 1\text{e-}8$$

(не достигает первой точности $\text{real}(4)$ и порядок погрешности только четвертый), здесь $n+1$, n_1+1 — число узлов по осям x , y и m — число итераций. Решим также численно и аналитически задачу Пуассона на прямоугольнике:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin(x), & 0 < x < 2\pi, 0 < y < \pi \\ u(0, y) = u(2\pi, y) = \sin(y), & 0 \leq y \leq \pi \\ u(x, 0) = u(x, \pi) = \sin(x), & 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

С аналитическим решением:

$$u(x, y) = \left(\left(\frac{1 - \text{ch}(2\pi)}{\text{sh}(2\pi)} \right) \text{sh}(x) + \text{ch}(x) \right) \sin(y) + \\ + \left(\left(\frac{1 - \text{ch}(\pi)}{\text{sh}(\pi)} \right) \text{sh}(y) + \text{ch}(y) \right) \sin(x) + \left(-1 + \left(\frac{1 - \text{ch}(\pi)}{\text{sh}(\pi)} \right) \text{sh}(y) + \text{ch}(y) \right) \sin(x).$$

С учетом того, что высота прямоугольника в 2 раза меньше его ширины: $n = 120$, $n_1 = 60$, $m = 20000$.

Программа возвращает невязку последней задачи в равномерной норме:

$$\text{norma C} = 5.972999872483342\text{e-}14.$$

Результаты:

1. Получены формулы прогонки для пятидиагональной системы линейных уравнений с 4 известными узловыми значениями на концах отрезка и соседних к концам узлах (краевое условие Дирихле).

2. Для симметрической матрицы со строгим полуторным диагональным преобладанием имеет место корректность полученных формул прогонки вперед.

3. Предложен 3-этапный алгоритм для точного решения уравнения Пуассона на прямоугольнике:

а) по формуле простой итерации (33) находят 4 значения $u^{k+1}_{1,n-1}, u^{k+1}_{1,1}, u^{k+1}_{n-1,1}, u^{k+1}_{n-1,n-1}$;

б) по формулам (34)–(37) прогонкой находят $u^{k+1}_{1,j}, u^{k+1}_{n-1,j}, u^{k+1}_{i,1}, u^{k+1}_{i,n-1}$, $i, j = \overline{1, n-1}$;

в) по формулам (20), (23), (25) методом пятидиагональной прогонки и краевым условием Дирихле определяют $u^{k+1}_{i,j}$, $i, j = \overline{2, n-2}$.

4. Доказано утверждение: на симметричных шаблонах аппроксимация оператора Лапласа выражается через частные производные четного порядка от неизвестной функции по каждой переменной.

5. С помощью указанного алгоритма и написанной программы показано, что при небольшом числе узлов равномерной сетки (1600) алгебраический порядок погрешности равен 8.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блохина, Н. С. Влияние ветра на динамику развития термобара в период весеннего прогрева водоема / Н. С. Блохина, Д. А. Соловьёв // Вестник Московского университета. Серия 3, Физика. Астрономия. – 2006. – № 3. – С. 59–63.
2. Методы ускорения газодинамических расчетов на неконструированных сетках / К. Н. Волков [и др.]. – М. : Физматлит, 2013. – 536 с.
3. Согласование порядков аппроксимации дифференциального и граничного операторов в краевой задаче для уравнений в частных производных / А.Ю. Герец [и др.] // Вестник Полоцкого университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 12. – С. 102–109.
4. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики : учеб. пособие / А.А. Самарский, П.Н. Вабишевич. – М. : Изд-во ЛКИ, 2014. – 480 с.
5. Свешников, А.Г. Лекции по математической физике / А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов. – М. : Изд-во МГУ, 1993 – 332 с.
6. Аппроксимация двойных и тройных интегралов во внутренних краевых задачах математической физики / О.В. Голубева [и др.] // Вестник Полоцкого университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 86–104.
7. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. – С. 27–36.

Поступила 19.09.2017

**APPROXIMATION OF THE POISSON EQUATION
ON AN EXTENDED PRECISION RECTANGLE**

D. PASTUKHOV, Y. PASTUKHOV

An algorithm for solving the Poisson equation on an extended precision rectangle with the eighth algebraic order of error is proposed. For a symmetric five-diagonal matrix, formulas are obtained for marching of a linear system with the Dirichlet boundary condition. Sufficient conditions for the correctness of the forward marching formulas for a five-diagonal symmetric matrix are proved. Approximation of the node values solution for the Poisson operator with respect to the symmetric template contains only partial derivatives of even order in each of the coordinates.

Keywords: *numerical methods for solving elliptic equations of mathematical physics, sufficient conditions for the correctness of the formulas for marching a five-diagonal matrix.*