УДК 514

ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ,СОХРАНЯЮЩИЕ ВАРИАЦИОННУЮ ЗАДАЧУ СО СТАРШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ПОЛОЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ

Аннотация **.** Введенное в работе определение компоненты импульса вдоль струи и сохранение компоненты импульса ранга n вдоль струи порядка n-1 на экстремалях уравнения Эйлера-Лагранжа для групп преобразований, сохраняющих вариационную задачу, является прямым и естественным обобщением определения компоненты импульса первого ранга вдоль векторного поля(струи нулевого порядка) ,связанного с однопараметрической группой преобразований, сохраняющих функцию Лагранжа, зависящую от производных нулевого и первого порядков Для экстремалей уравнения Эйлера-Лагранжа доказано свойство сохранения компоненты импульса ранга n вдоль струи порядка n-1, связанной с группой преобразований, сохраняющей вариационную задачу со старшими производными.

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x))p_{k,n}^i)=0$$

$S:\Re\times X_m\to X_m \qquad S_\tau : X_m \to X_m, \forall\tau\in\Re$ -однопараметрическая группа преобразований, сохраняющая функцию $L:T^nX_m\to\Re \quad : \quad \dfrac{d}{d\tau}L(S_\tau(x),D_tS_\tau(x),D_t^2S_\tau(x),\ldots,D_t^{(n)}S_\tau(x))|_{\tau=0}=0 \ \forall x\in X_m$

$j_x^{n-1}X^i(x)=(X^i(x),D_t^1X^i(x),D_t^2X^i(x),\ldots,D_t^{n-1}X^i(x))$ - струя порядка n-1, связанная

, с группой преобразований $S_\tau : X_m\to X_m,\ X^i(x)=\dfrac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0} \quad i=\overline{1,m}$

Ключевые слова: уравнения Эйлера-Лагранжа, гладкие многообразия, расслоенное пространство скоростей , импульс системы, тензор энергии, тензор обобщенного импульса ,невырожденная функция

Введение.

Э. Галуа предложил классифицировать алгебраические уравнения по их группам симметрии. Ф. Клейн предложил взять идею симметрии в качестве единого принципа при построении различных геометрий. Выйдя за пределы геометрии, эта идея, развиваясь, сделала очевидным тот факт, что принцип симметрии служит той единственной основой, которая может объединить все разрозненные части огромного здания современной математики. Клейн развил свою концепцию в физике и механике. Программа Клейна как задача поиска различных форм симметрии выходит за рамки не только геометрии, но и всей математики в целом, превращается в проблему поиска единого принципа для всего естествознания В 1872 г. Феликс Клейн представил сенату Эрлангенского университета и философскому факультету этого университета своё «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований», получившее название «Эрлангенской программы». Клейн рассматривает иерархию многообразий - пространств любого числа измерений и соответственных геометрий, положив в основу их определения понятия инварианта, введённое в математику за двадцать лет да этого. В элементарной геометрии преобразованиями, переходами от одних переменных к другим служат прежде всего движения, переносы и вращения геометрических фигур, когда сами фигуры, расстояния между образующими их точками не меняются. Пространство, в котором происходят подобные переносы, называется метрическим, его инвариант - расстояние, определённое, например, теоремой Пифагора: вводятся прямоугольные координаты, разности между старыми и новыми координатами переносимой точки рассматриваются как катеты прямоугольного треугольника, расстоянием между новым и старым положением точек становится гипотенуза этого треугольника, её квадрат равен сумме квадратов разностей координат. Это - инвариант Эвклидовой геометрии. Есть более сложные геометрии, где инвариантами служат иные выражения: в проективной геометрии инварианты - уже не расстояния между точками, не величина и форма геометрической фигуры, а только форма, - соотношения между расстояниями, треугольник при проективном преобразовании может стать меньше, по остается подобным себе. Содержание истории философии -

преобразование самых общих понятий, самые радикальные изменения, охватывающие основные представления о мире и методы его познания».

Фундаментальность законов сохранения заключается в их универсальности. Они справедливы при изучении любых физических процессов (механических, тепловых, электромагнитных и др.). Они одинаково применимы в релятивистском и нерелятивистском движении, в микромире, где справедливы квантовые представления, и в макромире, с его классическими представлениями.

Законы сохранения имеют важное значение не только в механике, но и в физике вообще. Научное и методологическое значение законов сохранения определяет их исключительная общность и универсальность. Благодаря той особой роли, которую играют законы сохранения в физике, они являются важнейшим элементом современной научной картины мира.
Дифференциально-геометрическое рассмотрение импульса и энергии в физической и математической постановке изложено в литературе [1–10, 12-16]. Свойства тензора энергии-импульса при простейших линейных преобразованиях координат-времени объясняет законы сохранения импульса в макроскопической системе. Но тензор энергии-импульса в дифференциальной форме является инвариантным относительно произвольного невырожденного преобразования координат, что приводит к локальным законам сохранения энергии-импульса, например, в физике элементарных частиц. Функция Лагранжа определяет некоторую вариационную задачу, например, минимизацию интеграла действия в механической системе и динамику этой системы (уравнения Эйлера – Лагранжа) [6]. Если интегрант (подынтегральная функция в простейшей вариационной задаче) вырожден относительно переменных времени либо координат, то это вырождение приводит соответственно к закону сохранения энергии, либо импульса относительно данной координаты [7]. Представленная работа является продолжением работ [9, 10,13,16].

Основные определения и математические объекты.

Пусть X_m - гладкое многообразие размерности m , $T^n X_m$ - гладкое расслоенное пространство скоростей порядка n с базой расслоения X_m.

$L : T^n X_m \to \Re$ -невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$. [9]

Теорема 1[11].Пусть $\bar{x}^i = S^i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $S:(x) \to (\bar{x})$, -невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m, p \ge \max(s, l)$ $i = \overline{1,m}$, тогда

$$\frac{\partial x^{(l)i}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \ldots, \overset{(l)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(s)j}{\bar{x}}} = \begin{cases} C_l^s \cdot D_t^{l-s}\left(\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right), C_l^s = \dfrac{l!}{s! \cdot (l-s)!}, l! = \prod\limits_{k=1}^{l} k, l \ge s \\ 0, l < s \end{cases} \tag{1}$$

Определение 1. Система функций $P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(2\min(n,p)-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \ldots, \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad k = \overline{0,n}, i = \overline{1,m}$$

называется обобщенным импульсом ранга n для функции $L : T^p X_m \to \Re$ в локальных координатах (x) базы X_m расслоения $T^p X_m$ где

$L(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(p)}{x})$ - локальная запись функции L при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$

Функция $p_{k,n}^i$ называются $k - ой$ компонентой обобщенного импульса P_n ранга n по $i -$ой координате или импульсами порядка k (k -импульсами) по $i -$ой координате
обобщенного импульса P_n ранга n.

Функция $p^i_{k,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2\min(n,p)-k)}{x})$ называются $k-ой$ компонентой обобщенного импульса P_n ранга n по $i-$ой координате или импульсами порядка k (k-импульсами) по $i-$ой координате
обобщенного импульса P_n ранга n.

Замечание 1. Обобщенный импульс ранг n определен для функций $L : T^p X_m \to \Re$

Из определения $p^i_k(n) = \sum\limits_{l=0}^{n-k} (-1)^l D^l_t (\dfrac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$ следует, что

при $k > p, l \ge 0 \Rightarrow l+k > p \Rightarrow \dfrac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и все $p^i_k(n) \equiv 0$ (тривиальные импульсы) ,то есть для нетривиальных импульсов $k \le p$ Поскольку $k \le n, k \le p \Rightarrow k \le \min(n,p)$, то в определении2 можно считать ,что $k = \overline{0,\min(n,p)}, i = \overline{1,m}$

Максимальный порядок производной по t в $p^i_k(n)$ равен $l+k+k = 2\cdot l + k$

При $l+k > p \Rightarrow \dfrac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и коэффициент при производной $\overset{(l+k)i}{x}$ равен 0, значит, при определении максимального порядка производной по t можно считать $l+k \le p$, кроме того

$$l \le n-k \Leftrightarrow l+k \le n \Rightarrow l+k \le \min(n,p) \Rightarrow l \le \min(n,p)-k \Rightarrow 2\cdot l + k \le 2\cdot(\min(n,p)-k)+k =$$
$$= 2\cdot\min(n,p) - 2\cdot k + k = 2\cdot\min(n,p)-k$$

Хотя более грубая оценка порядка старшей производной по t в $p^i_k(n)$ дает

$$l \le n-k \Leftrightarrow l+k \le n \Rightarrow 2\cdot l + k \le 2\cdot(n-k)+k = 2\cdot n - 2\cdot k + k = 2\cdot n - k$$

При $p > n, l+k \le n-k+k = n$ максимальный порядок производной по t в $L(x,\dots,\overset{(p)}{x})$) больше максимального порядка производной по t переменной по которой производится частное дифференцирование в $p^i_k(n) = \sum\limits_{l=0}^{n-k} (-1)^l D^l_t (\dfrac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$.

При $p < n$, поскольку $l+k \le n-k+k = n$ при $l+k > p$ $\dfrac{\partial L(x,..\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и часть членов в сумме $\sum\limits_{l=0}^{n-k} (-1)^l D^l_t (\dfrac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$ будет тождественно равна 0.Пограничным является случай $p = n$, именно тот случай будет рассмотрен в дальнейшем без ограничения общности рассмотрения.

При $p = n$ В локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$ получаем импульсы в преобразовании Остроградского:

$$p^i_{0,n} = \sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D^l_t (\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}) = \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^i} - D_t(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \dot{x}^i}) + \dots + (-1)^n D^n_t(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}})$$

нуль-импульс(функционал в уравнении Эйлера-Лагранжа).

Теорема2[9](дифференциальная связь импульсов k-ого и (k-1)-ого порядков). $L : T^n X_m \to \Re -$ невырожденная функция Лагранжа ,. $L(x,\dots,\overset{(n)}{x})$, $p^i_{k,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})$, $p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k+1)}{x}$ -локальная запись функции L и импульсов $k-ого$ и $(k-1)$ порядков при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$. Тогда

$$D_t p^i_{k,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k+1)}{x}) \qquad (2)$$

Где $p^i_{k,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}})$ -импульс k-ого порядка

$p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k+1)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-(k-1)}(-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k-1)i}})$ -импульс (k-1) –ого порядка

Имеет место следующая

Теорема 3(о связи импульсов $k-ого$ порядка рангов n и $n+1$). Пусть $L: T^p X_m \to \Re$.

$L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})$ - локальная запись функции $L: T^p X_m \to \Re$ при выборе локальных координат в базе расслоения X_m ,

$p^i_{k,n} = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$ $k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m}$ -импульс k-ого порядка ранга n

$p^i_{k,n+1} = \sum_{l=0}^{n+1-k}(-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$ - импульс k-ого порядка ранга n +1

Тогда имеет место следующее соотношение: $p^i_{k,n+1} = p^i_{k,n} + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})$ (3)

Доказательство:

$$p^i_{k,n+1} = \sum_{l=0}^{n+1-k}(-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}) + (-1)^{n+1-k} D_t^l (\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1-k+k)i}{x}}) =$$

$$\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}) + (-1)^{n+1-k} D_t^l (\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) = p^i_{k,n} + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})$$

Теорема доказана.

Теорема 4 $x = (x^1, x^2, \dots, x^m), \bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^m)$

Пусть $x^i = S^i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)$ $S: (\bar{x}) \to (x)$, -невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m$ $i,k=\overline{1,m}$, $S^{-1}: (x) \to (\bar{x})$ -обратное отображение , тогда

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^k} = \delta^i_k \qquad \sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{x}^i(x)}{\partial x^j}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} = \delta^i_k \qquad \delta^k_i = \begin{cases} 1, i=k \\ 0, i\neq k \end{cases} - символ\ Кронеккера \qquad (4)$$

Доказательство. $x^i = x^i(\bar{x}^1(x), \bar{x}^2(x), \dots, \bar{x}^m(x))$ По теореме о сложной функции

$\frac{\partial x^i}{\partial x^k} = \delta^i_k = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^k}$ аналогично доказывается равенство $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^k} = \delta^i_k = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{x}^i(x)}{\partial x^j}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}$

Теорема доказана

Определение . Однопараметрическая группа преобразований

$S:\Re\times X_m\to X_m$, $S_\tau:X_m\to X_m,\forall\tau\in\Re$ сохраняет лагранжиан $L:T^nX_m\to\Re$,если

$$\frac{d}{d\tau}L(S_\tau(x),D_tS_\tau(x),D_t^2S_\tau(x),\ldots,D_t^{(n)}S_\tau(x))|_{\tau=0}=0\ \forall x\in X_m$$

$D_t^kS_\tau(x)|_{\tau=0}:X_m\to T^kX_m$ - оператор $k-$кратного полного дифференцирования по переменной t

С каждой однопараметрической группой преобразований можно связать однопараметрическое семейство векторных полей $X^i(x,\tau))=\frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau},\ \forall\tau\in\Re$ $X^i(x)=\frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$ $i=\overline{1,m}$ (струй 0 -ого порядка) и однопараметрическое семейство струй порядка

$n-1$: $j_x^{n-1}X^i(x,\tau)=(X^i(x,\tau),D_t^1X^i(x,\tau),D_t^2X^i(x,\tau),\ldots,D_t^{n-1}X^i(x,\tau))$,

которые будем называть связанными(индуцированные) с группой преобразований $S_\tau:X_m\to X_m$.

Векторное поле $X^i(x)=\frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$ и струю порядка

$n-1$: $j_x^{n-1}X^i(x,\tau)=(X^i(x,\tau),D_t^1X^i(x,\tau),D_t^2X^i(x,\tau),\ldots,D_t^{n-1}X^i(x,\tau))$

также будем называть связанными(индуцированные) с группой преобразований $S_\tau:X_m\to X_m$.

Математическая постановка задачи. Ставится следующая задача:

Пусть $L:T^nX_m\to\Re$ -гладкая функция, заданная в расслоенном пространстве скоростей T^nX_m многообразия X_m $L(x,\ldots,\overset{(n)}{x}),\ p_i^k(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x})$ -локальная запись функции L и импульсов $k-ого$ порядков при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения T^nX_m. $p_{k,n}^i=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^lD_t^l(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l+k)i}{x}})$ $k=\overline{1,n},i=\overline{1,m}$ -

$S:\Re\times X_m\to X_m$ $S_\tau:X_m\to X_m,\forall\tau\in\Re$ -однопараметрическая группа преобразований, сохраняющая функцию $L:T^nX_m\to\Re$: $\frac{d}{d\tau}L(S_\tau(x),D_tS_\tau(x),D_t^2S_\tau(x),\ldots,D_t^{(n)}S_\tau(x))|_{\tau=0}=0\ \forall x\in X_m$

Задача данной работы- установить закон сохранения компоненты импульса

$p_{k,n}^i=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^lD_t^l(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l+k)i}{x}})$ $k=\overline{1,n},i=\overline{1,m}$ -(импульсы k-ого порядка ранга n)

вдоль струи : $j_x^{n-1}X^i(x)=(X^i(x),D_t^1X^i(x),D_t^2X^i(x),\ldots,D_t^{n-1}X^i(x))$

, связанной с группой преобразований $S_\tau:X_m\to X_m$, $X^i(x)=\frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$ $i=\overline{1,m}$,

на экстремалях уравнения Эйлера-Лагранжа $p_{0,n}^i=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^lD_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}})=0$

,то есть показать, что $D_t(\sum_{i=1}^m\sum_{k=1}^nD_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i)=0$ при условиях $p_{0,n}^i=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^lD_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}})=0$ и

$$\frac{d}{d\tau}L(S_\tau(x),D_tS_\tau(x),D_t^2S_\tau(x),\ldots,D_t^{(n)}S_\tau(x))|_{\tau=0}=0\ \forall x\in X_m$$

Имеет место следующая

Теорема 5 Пусть $S:\Re\times X_m\to X_m$,$S_\tau:X_m\to X_m,\forall\tau\in\Re$ однопараметрическая группа преобразований $L:T^nX_m\to\Re$- гладкая функция в расслоенном пространстве скоростей T^nX_m на гладком многообразии X_m

$$p^i_{0,n} = \sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D^l_t \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}}\right)$$ - импульс 0-ого порядка(функционал в уравнении Эйлера-Лагранжа) $X^i(x,\tau) = \dfrac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}$ Тогда

$$\frac{dL(S_\tau(x), D_t S_\tau(x), D^2_t S_\tau(x), \ldots, D^{(n)}_t S_\tau(x))}{d\tau} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D^k_t (X^i(x,\tau)) \tag{5}$$

Доказательство.

$$\frac{dL(S_\tau(x), D_t S_\tau(x), D^2_t S_\tau(x), \ldots, D^{(n)}_t S_\tau(x))}{d\tau} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^i} \frac{dS^i_\tau(x)}{d\tau} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \dot{x}^i} \frac{d(D^1_t S^i_\tau(x))}{d\tau} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \ddot{x}^i} \frac{d(D^2_t S^i_\tau(x))}{d\tau} + \ \ldots \ + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}} \frac{d(D^n_t S^i_\tau(x))}{d\tau} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} \frac{d(D^k_t S^i_\tau(x))}{d\tau} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D^k_t \left(\frac{dS^i_\tau(x)}{d\tau}\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D^k_t (X^i(x,\tau))$$

В частности при n=1 $$\frac{dL(S_\tau(x), D_t S_\tau(x))}{d\tau} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(1)}{x})}{\partial x^i} X^i(x,\tau) + \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(1)}{x})}{\partial \ddot{x}^i} D_t (X^i(x,\tau))\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(1)}{x})}{\partial x^i} X^i(x,\tau) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(1)}{x})}{\partial \ddot{x}^i} D_t (X^i(x,\tau)) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(1)}{x})}{\partial x^i} X^i(x,\tau) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(1)}{x})}{\partial \ddot{x}^i} D_t (X^i(x,\tau)) =$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(1)}{x})}{\partial x^i} X^i(x,\tau) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(1)}{x})}{\partial \ddot{x}^i} \frac{\partial X^i(x,\tau)}{\partial x^k} \ddot{x}^k$$

Теорема доказана

Имеет место следующая

Теорема 6 Пусть $S : \Re \times X_m \to X_m$ $S_\tau : X_m \to X_m, \forall \tau \in \Re$ - группа преобразований в X_m

$L : T^n X_m \to \Re$ - гладкая вещественнозначная функция в расслоении скоростей $T^n X_m$

$$p^i_{k,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D^l_t \left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad i = \overline{1,m}$$ -импульсы k-ого порядка ранга n

$X^i(x,\tau)) = \dfrac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}$ -однопараметрическое семейство векторных полей ,индуцированное группой $S_\tau : X_m \to X_m$

Тогда имеет место равенство

$$D_t \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} D^{k-1}_t (X^i(x,\tau)) p^i_{k,n}\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D^k_t (X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau) p^i_{0,n} \tag{6}$$

Доказательство.

По теореме 2 $$D_t p^i_{k,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k+1)}{x}).$$

$$D_t \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} D^{k-1}_t (X^i(x,\tau)) p^i_{k,n}\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} D_t (D^{k-1}_t (X^i(x,\tau))) p^i_{k,n} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} D^{k-1}_t (X^i(x,\tau)) D_t p^i_{k,n} =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^k(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_{k-1,n}^i(x,\dot x,\dots,\overset{(2n-k+1)}{x})\Big)=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^k(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\Big) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k-1,n}^i(x,\dot x,\dots,\overset{(2n-k+1)}{x}) \quad (7)$$

Вводим новую переменную $k1=k-1 \Rightarrow k=k1+1 \qquad 1\le k\le n \;\Rightarrow\; 0\le k1\le n-1$, подставим в (7) :

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^k(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\Big) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k-1,n}^i(x,\dot x,\dots,\overset{(2n-k+1)}{x})=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^k(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\Big) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k-1,n}^i(x,\dot x,\dots,\overset{(2n-(k-1))}{x})=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^k(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k1=0}^{n-1} D_t^{k1}(X^i(x,\tau))\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k1)i}{x}}\Big) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k1=0}^{n-1} D_t^{k1}(X^i(x,\tau))p_{k1,n}^i(x,\dot x,\dots,\overset{(2n-k1)}{x})=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1} D_t^{k}(X^i(x,\tau))\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\Big) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1} D_t^{k}(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i(x,\dot x,\dots,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^k(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i+$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1} D_t^k(X^i(x,\tau))(p_{k,n}^i-p_{k,n}^i)-\sum_{i=1}^{m} D_t^0X^i(x,\tau)p_{0,n}^i+\sum_{i=1}^{m} D_t^nX^i(x,\tau)p_{n,n}^i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1} D_t^k(X^i(x,\tau))\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\Big)=$$

$$-\sum_{i=1}^{m} D_t^0X^i(x,\tau)p_{0,n}^i+\sum_{i=1}^{m} D_t^nX^i(x,\tau)\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1} D_t^k(X^i(x,\tau))\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\Big)=$$

$$-\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p_{0,n}^i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n} D_t^k(X^i(x,\tau))\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\Big)$$

Этот результат может быть получен и по-другому:

Проведем доказательство индукцией по n

При $n=1$ в формуле (6) получим :

$$p_{k,n}^i=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big) \quad k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m}$$ -импульс k-ого порядка ранга n

$$p_{1,1}^i=\sum_{l=0}^{1-1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+1)i}{x}}\Big)=(-1)^0D_t^0\Big(\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \overset{(0+1)i}{x}}\Big)=\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \overset{(1)i}{x}}=\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^i}$$

$$p_{0,1}^i=\sum_{l=0}^{1-0}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+0)i}{x}}\Big)=(-1)^0D_t^0\Big(\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \overset{(0+0)i}{x}}\Big)+(-1)^1D_t^1\Big(\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \overset{(1+0)i}{x}}\Big)=\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial x^i}-D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^i}\Big)$$

По формуле (6) нужно проверить выполнение равенства

$$D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i\Big)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)p_{0,n}^i$$

При n=1 (6) имеет вид :

$$D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n=1} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i\Big)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n=1}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)p_{0,n=1}^i \quad (8)$$

Преобразуем левую часть (8) :

$$D_t(\sum_{i=1}^{m} D_t^{1-1}(X^i(x,\tau))p_{1,1}^i) = D_t(\sum_{i=1}^{m} D_t^{0}(X^i(x,\tau))p_{1,1}^i) = D_t(\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p_{1,1}^i) = D_t(\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p_{1,1}^i =$$

$$\sum_{i=1}^{m} D_t(X^i(x,\tau))p_{1,1}^i + \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)D_t(p_{1,1}^i) = \sum_{i=1}^{m} D_t(X^i(x,\tau))p_{1,1}^i + \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)D_t(p_{1,1}^i) =$$

$$\sum_{i=1}^{m} D_t(X^i(x,\tau))\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i} + \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}) = D_t(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i} X^i(x,\tau)) \qquad (9)$$

Преобразуем правую часть (8) :

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n=1}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p_{0,n=1}^i = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i}D_t^0(X^i(x,\tau)) + \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}D_t^1(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p_{0,n=1}^i =$$

$$\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i}X^i(x,\tau)) + \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}D_t^1(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i} - D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i})) =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i}X^i(x,\tau) + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}D_t^1(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}) =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}D_t^1(X^i(x,\tau)) + \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}) = D_t(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}X^i(x,\tau)) \qquad (10)$$

Формулы (9),(10) совпадают ,база индукции при n=1 проверена.

Пусть утверждение теоремы для n:

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p_{0,n}^i$$

Докажем , что оно верно для n+1 :

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n+1} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n+1}^i) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p_{0,n+1}^i \qquad (11)$$

По теореме 3 (формула 3) $p_{k,n+1}^i = p_{k,n}^i + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})$

$$p_{k,n+1}^i = \sum_{l=0}^{n+1-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}) \Rightarrow p_{n+1,n+1}^i = \sum_{l=0}^{n+1-(n+1)}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}) = \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}$$

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n+1} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n+1}^i) = D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n+1}^i + D_t^{n+1-1}(X^i(x,\tau))p_{n+1,n+1}^i) =$$

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n+1}^i) + D_t^{n}(X^i(x,\tau))p_{n+1,n+1}^i) = D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n+1}^i) + D_t(\sum_{i=1}^{m}(D_t^{n}(X^i(x,\tau))p_{n+1,n+1}^i) =$$

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n+1}^i) + D_t^{n}(X^i(x,\tau))p_{n+1,n+1}^i) = D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n+1}^i) + \sum_{i=1}^{m} D_t(D_t^{n}(X^i(x,\tau))p_{n+1,n+1}^i) \qquad (12)$$

Подставим $p_{k,n+1}^i = p_{k,n}^i + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})$ при $p = n+1$ в первой сумме в (12) :

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n+1})+\sum_{i=1}^{m}D_t(D_t^n(X^i(x,\tau)p^i_{n+1,n+1})=$$

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(p^i_{k,n}+(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}))) + \sum_{i=1}^{m}D_t(D_t^n(X^i(x,\tau))p^i_{n+1,n+1}$$

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n})+D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}))+\sum_{i=1}^{m}D_t(D_t^n(X^i(x,\tau))p^i_{n+1,n+1})=$$

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n})+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}})+\sum_{i=1}^{m}D_t(D_t^n(X^i(x,\tau))\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}) \quad (13)$$

По предположению индукции первое слагаемое в сумме (13) равно :

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)p^i_{0,n} \quad (14)$$

По формуле (3) $p^i_{0,n+1}=p^i_{0,n}+(-1)^{n+1-0}D_t^{n+1-0}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}})=p^i_{0,n}+(-1)^{n+1}D_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}})$ (15)

Преобразуем второе слагаемое в сумме (13) :

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}))=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t(D_t^{k-1}(X^i(x,\tau)))(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}))+$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k}D_t(D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}))=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k}(X^i(x,\tau)))(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}))+$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k}D_t^{n+2-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}})) \quad (16)$$

Вводим новую переменную и, преобразуя второе слагаемое последней суммы(16) , перепишем (16) :

$k1=k-1\Rightarrow k=k1+1\,,1\le k\le n\ \Rightarrow 0\le k1\le n-1,\ n+1-k=n-k1, n+2-k=n+1-k1$:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}))+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k1=0}^{n-1}D_t^{k1}(X^i(x,\tau)))(-1)^{n-k1}D_t^{n+1-k1}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}))=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}))+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1}D_t^{k}(X^i(x,\tau)))(-1)^{n-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}))=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}D_t^{k}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}))+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}D_t^{k}(X^i(x,\tau)))(-1)^{n-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}))+$$

$$\sum_{i=1}^{m}D_t^{n}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-n}D_t^{n+1-n}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}})) +\sum_{i=1}^{m}D_t^{0}(X^i(x,\tau))(-1)^{n-0}D_t^{n+1-0}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}}))=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}((-1)^{n-k}D_t^{k}(X^i(x,\tau))D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}})(-1)^1+1))+\sum_{i=1}^{m}D_t^{n}(X^i(x,\tau))(-1)^1D_t^{n+1-n}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)i}{x}})\ +$$

$$\sum_{i=1}^{m} D_t^0(X^i(x,\tau))(-1)^{n-0} D_t^{n+1-0}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) = (-1)\sum_{i=1}^{m} D_t^n(X^i(x,\tau)) D_t^1(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) +$$

$$\sum_{i=1}^{m} D_t^0(X^i(x,\tau))(-1)^{n} D_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) = (-1)\sum_{i=1}^{m} D_t^n(X^i(x,\tau)) D_t^1(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) + \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)(-1)^n D_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) \quad (17)$$

Рассмотрим последнее слагаемое в сумме (13) :

$$\sum_{i=1}^{m} D_t(D_t^n(X^i(x,\tau))\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) = \sum_{i=1}^{m}(D_t(D_t^n(X^i(x,\tau)))\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}} + D_t^n(X^i(x,\tau))D_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})) =$$

$$\sum_{i=1}^{m}(D_t^{n+1}(X^i(x,\tau)))\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}} + D_t^n(X^i(x,\tau))D_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})) =$$

$$\sum_{i=1}^{m} D_t^{n+1}(X^i(x,\tau)))\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}} + \sum_{i=1}^{m} D_t^n(X^i(x,\tau))D_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) \quad (18)$$

Преобразуем левую часть доказываемого тождества (11) , равную (13) и состоящую из трех слагаемых , равных соответственно правым частям (14),(17),(18) :

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) + \sum_{i=1}^{m} D_t(D_t^n(X^i(x,\tau))\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p_{0,n}^i + (-1)\sum_{i=1}^{m} D_t^n(X^i(x,\tau))D_t^1(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) +$$

$$\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)(-1)^n D_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) + \sum_{i=1}^{m} D_t^{n+1}(X^i(x,\tau)))\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}} + \sum_{i=1}^{m} D_t^n(X^i(x,\tau))D_t(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p_{0,n}^i + \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)(-1)^n D_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) +$$

$$+\sum_{i=1}^{m} D_t^{n+1}(X^i(x,\tau)))\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}} \quad (19)$$

Учитывая (15)

Объединим первое и последнее слагаемое в сумме (19) ,получим, что левая часть (11) равна:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p_{0,n}^i + \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)(-1)^n D_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p_{0,n}^i + (-1)\sum_{i=1}^{m}(-1)X^i(x,\tau)(-1)^n D_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p_{0,n}^i - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)(-1)^{n+1} D_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)(p_{0,n}^i + (-1)^{n+1} D_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) \quad (20)$$

Преобразуем (20),учитывая (15) :

$$p^i_{0,n+1} = p^i_{0,n} + (-1)^{n+1-0} D_t^{n+1-0}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big) = p^i_{0,n} + (-1)^{n+1} D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\Big(p^i_{0,n} + (-1)^{n+1} D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big) =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau) p^i_{0,n+1} \qquad (21)$$

Полученный результат (21) представляет правую часть доказываемого равенства (11).
Теорема доказана.
Имеет место следующая

Теорема 7 Пусть $L : T^n X_m \to \Re$ -гладкая функция, заданная в расслоенном пространстве скоростей $T^n X_m$ $L(x,\dots,\overset{(n)}{x})$, $p_i^k(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})$ -локальная запись функции L и импульсов $k-ого$ порядков при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$. $p^i_{k,n} = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)$ $k=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}$ -

$S : \Re \times X_m \to X_m$ $S_\tau : X_m \to X_m, \forall \tau \in \Re$ -однопараметрическая группа преобразований, сохраняющая функцию $L : T^n X_m \to \Re$: $\frac{d}{d\tau} L(S_\tau(x), D_t S_\tau(x), D_t^2 S_\tau(x),\dots,D_t^{(n)} S_\tau(x))|_{\tau=0} = 0 \ \forall x \in X_m$

$j_x^{n-1} X^i(x) = (X^i(x), D_t^1 X^i(x), D_t^2 X^i(x),\dots, D_t^{n-1} X^i(x))$ - струя порядка n-1, связанная

, с группой преобразований $S_\tau : X_m \to X_m$, $X^i(x) = \frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$ $i=\overline{1,m}$

Тогда на экстремалях уравнения Эйлера-Лагранжа $p^i_{0,n} = \sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}}\Big) = 0$

Имеет место закон сохранения компоненты импульса вдоль струи

$$D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x)) p^i_{k,n}\Big) = 0$$

Доказательство. По формуле (6) **теоремы 6** при любых $x \in X_m, \tau \in \Re$ выполнено соттношение :

$$D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau)) p^i_{k,n}\Big) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau) p^i_{0,n} \qquad (22)$$

В частности при $\tau = 0$

$$D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))|_{\tau=0}\ p^i_{k,n}\Big) == D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x)) p^i_{k,n}\Big) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x,\tau))|_{\tau=0} - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)|_{\tau=0}\ p^i_{0,n} =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x) p^i_{0,n} \qquad (23)$$

По условию **теоремы 7** $S_\tau : X_m \to X_m, \forall \tau \in \Re$ -однопараметрическая группа преобразований, сохраняет функцию Лагранжа $L : T^n X_m \to \Re$ $: \frac{d}{d\tau} L(S_\tau(x), D_t S_\tau(x), D_t^2 S_\tau(x),\dots,D_t^{(n)} S_\tau(x))|_{\tau=0} = 0 \ \forall x \in X_m$ (24)

По формуле (5) **теоремы 5** имеет место равенство **:**

$$\frac{d}{d\tau}L(S_\tau(x),D_tS_\tau(x),D_t^2S_\tau(x),\ldots,D_t^{(n)}S_\tau(x))=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau)) \qquad (25)$$

которое выполняется при любом τ, в частности при $\tau=0$. Учитывая равенства(24), (25) получим:

$$\frac{d}{d\tau}L(S_\tau(x),D_tS_\tau(x),D_t^2S_\tau(x),\ldots,D_t^{(n)}S_\tau(x))|_{\tau=0}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))|_{\tau=0}=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x))=0$$,поскольку $D_t^k(X^i(x,\tau))|_{\tau=0}=D_t^k(X^i(x,0)=D_t^k(X^i(x)$ (26)

Следовательно, $\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x))=0$ Поскольку $x:\Re\to X_m$ - экстремаль уравнения

Эйлера-Лагранжа , то $p_{0,n}^i=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}})=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}})=0$

Следовательно , $\sum_{i=1}^{m}X^i(x)p_{0,n}^i=\sum_{i=1}^{m}X^i(x)\cdot 0=0$ Подставляя (26),(27) в равенство (23) получим: (27)

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x))p_{k,n}^i)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x)p_{0,n}^i=0-0=0$$

Теорема доказана.

Замечание 1 Введенное в работе определение компоненты импульса вдоль струи и сохранение компоненты импульса ранга n вдоль струи порядка n-1 на экстремалях уравнения Эйлера-Лагранжа для групп преобразований, сохраняющих вариационную задачу, является прямым и естественным обобщением определения компоненты импульса первого порядка вдоль векторного поля(струи нулевого порядка) ,связанного с однопараметрической группой преобразований, сохраняющих функцию Лагранжа, зависящую от производных нулевого и первого порядков.[1, С. 297] В частности на экстремалях уравнения Эйлера-Лагранжа справедлив закон сохранения компоненты импульса первого порядка первого ранга вдоль векторного поля, индуцированного группой , сохраняющих вариационную задачу первого порядка :

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}X^ip_{1,1}^i)=D_t(\sum_{i=1}^{m}X^i\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial\overset{(1)i}{x}})=D_t(\sum_{i=1}^{m}X^i\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial\dot{x}^i})=0$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин, В. А. Современная геометрия. Методы и приложения / В. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. – М. : УРСС, 1994.
2. Рашевский, П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. – М. : Гостехиздат, 1956.
3. Погорелов, А. В. Дифференциальная геометрия / А. В. Погорелов. – М. : Наука, 1974.
4. Арнольд, В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольдь. – М. : Наука, 1974.
5. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 7-е изд., испр. – М. : Наука, 1988. – Т. 2: Теория поля. – 512 с.
6. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 7-е изд., испр. – М. : Наука, 1988. – Т. 1: Механика. – 214 с.
7. Галеев, Э. М. Краткий курс теории экстремальных задач / Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. – М. : Изд-во МГУ, 1989. – 203 с.
8. Дирак, П. Лекции по квантовой механике / П. Дирак. – М. : Мир, 1968.
9. Обобщение теоремы Гамильтона – Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка / С. Г. Ехилевский [и др.] // Вестник полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 125–133.
10. Закон преобразования обобщенного импульса / С. Г. Ехилевский [и др.] // Вестник полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 85–99.

11. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л. Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии» ; ВИНИТИ. – 1979. – Т. 9. – С. 5–246.
12. Трофимов, В. В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко. – М. : Факториал, 1995.
13. Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф.Пастухов, ,Д.Ф Пастухов , С.В. Голубева // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. - 2015. - № 12. - С. 117-123
14. Об эффективном поиске безусловного экстремума гладких функционалов в конечномерных задачах / С.В. Голубева , С. Г. Ехилевский , Д.Ф Пастухов, Ю.Ф.Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. - 2016. - № 4. - С. 119
15. Задача построения построения поля линий тока по температурному / Ю.Ф.Пастухов, ,Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. - 2015. - № 4. - С. 27-36
16. Тензор обобщенной энергии / Ю.Ф.Пастухов, ,Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. - 2017. - № 12. - С. 78-100

GROUPS OF TRANSFORMATION CONSERVING
VARIATIONAL PROBLEM WITH SENIOR DERIVATIVES

POLOTSK STATE UNIVERSITY
Y. PASTUKHOV, D. PASTUKHOV

Annotation. The definition of the momentum component is introduced along the jet and the conservation of components of momentum of rank n along the jet of order n-1 on the extremals of the Euler-Lagrange equation for groups of transformations preserving the variational problem is a direct and natural generalization of the determination of the momentum vector field (zero-order jet) connected with a one-parameter group of transformations preserving Lagrangian function that depends on the derivatives of zero and first orders. For the extremes of the Euler-Lagrange equation, the property of preserving the momentum component of rank n-1, connected with the transformation group preserving the variational problem with higher derivatives.

$$D_t\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x))\,p^i_{k,n}\right)=0$$

$S:\Re\times X_m\to X_m$ $\quad S_\tau : X_m\to X_m, \forall\tau\in\Re$ -is a one-parameter group of transformations that preserves the function: $L:T^nX_m\to\Re$: $\dfrac{d}{d\tau}L(S_\tau(x),D_tS_\tau(x),D_t^2S_\tau(x),\ldots,D_t^{(n)}S_\tau(x))|_{\tau=0}=0\ \forall x\in X_m$

$j_x^{n-1}X^i(x)=(X^i(x),D_t^1X^i(x),D_t^2X^i(x),\ldots,D_t^{n-1}X^i(x))$ - - a jet of order n-1 connected

, with the transformation group $S_\tau : X_m\to X_m$, $X^i(x)=\dfrac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$ $\quad i=\overline{1,m}$