УДК 519.6

Карабанов Р.Ю., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Богуш Р.П.

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ МОНОТОННО УБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ ФУНКЦИЯМИ В МЕТРИКЕ КВАДРАТИЧНОГО ОТКЛОНЕНИЯ

Научные руководители: Пастухов Ю.Ф, *Пастухов Ю.Ф.,* Богуш Р.П

Полоцкий государственный университет, г. Полоцк, Республика Беларусь

В связи с бурным развитием возможностей вычислительной техники и повсеместным использованием сетей передачи данных задачи обработки информации приобретают особую роль. Увеличиваются объемы обрабатываемой, хранимой и передаваемой информации, что выдвигает задачу сжатия данных на одно их наиболее важных мест среди всех задач обработки информации. Изначально задача сжатия информации предполагала необходимость полного и однозначного восстановления данных. С развитием и распространением цифровых средств мультимедиа (изображения, видео, аудио и т.д.) задачи сжатия стали еще более актуальными. Сжатие изображений с потерями качества - это отдельная группа алгоритмов и программ. Такие алгоритмы позволяют сжимать статические кадры в десятки раз, а видеофильмы в сто раз и более, используя тот факт, что различные детали изображений имеют разную важность для человеческого зрения, а, следовательно, наименее важные детали можно опустить, повысив за счет этого степень сжатия. Существует множество алгоритмов , одним из которых является алгоритм Ллойда, имеющий свои существенные недостатки. В поставленной в данной работе задаче предлагается метод и алгоритм , отличный от алгоритма Ллойда.

Определение. Пусть $n \in \mathrm{N}$. Функция $f_n : [a;b] \to \Re$ $(a<b)$ называется n кусочно постоянной (или n-ступенькой) на $[\mathrm{a,b}]$, если $\exists\, x_1 < x_2 < ... < x_{n-1}$, такие что

$x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < b = x_n$

$f_n(x) = c_i = const \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$, $f_n(x_i) = c_i$ *или* $f_n(x_i) = c_{i+1}$, $c_i \neq c_{i+1}$, $\forall i = \overline{1, n-1}$

Множество n-ступенчатых функций $f_n : [a;b] \to \Re$ $(a<b)$ будем обозначим $S_n[a,b]$

Постановка задачи: Пусть $f : [a,b] \to \Re$, $f \in C^2[a,b]$, $f'(x) < 0 \ \forall x \in [a,b]$.

$n \in \mathrm{N}$.В пространстве n-ступенчатых функций найти наилучшее приближение

$h_n : [a;b] \to \Re$ функции $f : [a,b] \to \Re$ в метрике квадратичного отклонения , то есть такое что $\| f - h_n \|_{\mathrm{C^2[a,b]}} = \min\limits_{f_n \in S_n[a,b]} \| f - f_n \|_{\mathrm{C^2[a,b]}}$ Значит,

$$\| f - h_n \|_{\mathrm{C^2[a,b]}} = \sqrt{\int_a^b (f(x) - h_n(x))^2 dx} = \min_{f_n \in S_n[a,b]} \sqrt{\int_a^b (f(x) - f_n(x))^2 dx} = \min_{f_n \in S_n[a,b]} \| f - f_n \|_{\mathrm{C^2[a,b]}}$$

Пусть $h_n(x) = c_k$ при $x \in (B_{k-1}, B_k)$ $k = \overline{1,n}$

Функция $G(B_1, ..., B_{n-1}, C_1, ..., C_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{B_{k-1}}^{B_k} (f(x) - c_k)^2 dx$ описывает квадрат отклонения (ошибки) функции $h_n : [a;b] \to \Re$ от функции $f : [a,b] \to \Re$ отклонения. Необходимое условие экстремума функции $G(B_1, ..., B_{n-1}, C_1, ..., C_n)$ описывается системой уравнений: $G'_{B_i} = 0$, $i = \overline{1, n-1}$, $G'_{C_j} = 0$, $j = \overline{1,n}$,

из которой следует следующая система уравнений:

$$\begin{cases} f(B_i) = \dfrac{1}{2}(C_i + C_{i+1}),\ i = \overline{1, n-1} \\ \int\limits_{B_{j-1}}^{B_j} f(x)dx = C_j(B_j - B_{j-1}),\ j = \overline{1,n} \end{cases} \qquad (1)$$

Система (1) имеет 2n-1 уравнений и 2n-1 неизвестных $B_1, B_2, ..., B_{n-1}, C_1, C_2, ..., C_n$

В алгоритмах сжатия требуется приблизить функцию плотности нормального распределения $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ступенчатыми функциями , таким образом, чтобы ошибка этого приближения была минимально возможной. Для решения этой

задачи ,обычно, применяется алгоритм Ллойда , результат сходимости которого существенно зависит от начальных данных. Поэтому он не дает гарантии минимальности ошибки на множестве всех n-ступенчатых функций на отрезке [a,b]. Условия $f\in C^2[a,b]$, $f'(x)<0\ \forall x\in[a,b]$ гарантируют существование и единственность решения системы (1) для произвольного

натурального n, а также наличие локального минимума для решения системы (1). Учитывая быстрое(экспоненциальное) убывание плотности нормального распределения к 0 в качестве правого края отрезка брались значения 3,4,5, левый край отрезка брался равным 0. Авторами был разработан алгоритм решения системы(1),в предположении ,что последняя ступенька равна 0-лю.(то есть n ненулевых ступенек и одна –последняя равна 0-лю, всего n+1 ступенька) , то есть для системы(2n переменных и 2n уравнений) :

$$\begin{cases} f(B_i)=\frac{1}{2}(C_i+C_{i+1}),\ i=\overline{1,n-1} \\ f(B_n)=\frac{1}{2}C_n \\ \int\limits_{B_{j-1}}^{B_j} f(x)dx=C_j(B_j-B_{j-1}),\ j=\overline{1,n} \end{cases} \qquad (2)$$

Для n+1 ненулевой ступеньки система (1) имеет вид :

$$\begin{cases} f(B_i)=\frac{1}{2}(C_i+C_{i+1}),\ i=\overline{1,n} \\ \int\limits_{B_{j-1}}^{B_j} f(x)dx=C_j(B_j-B_{j-1}),\ j=\overline{1,n+1} \end{cases} \qquad (3)$$

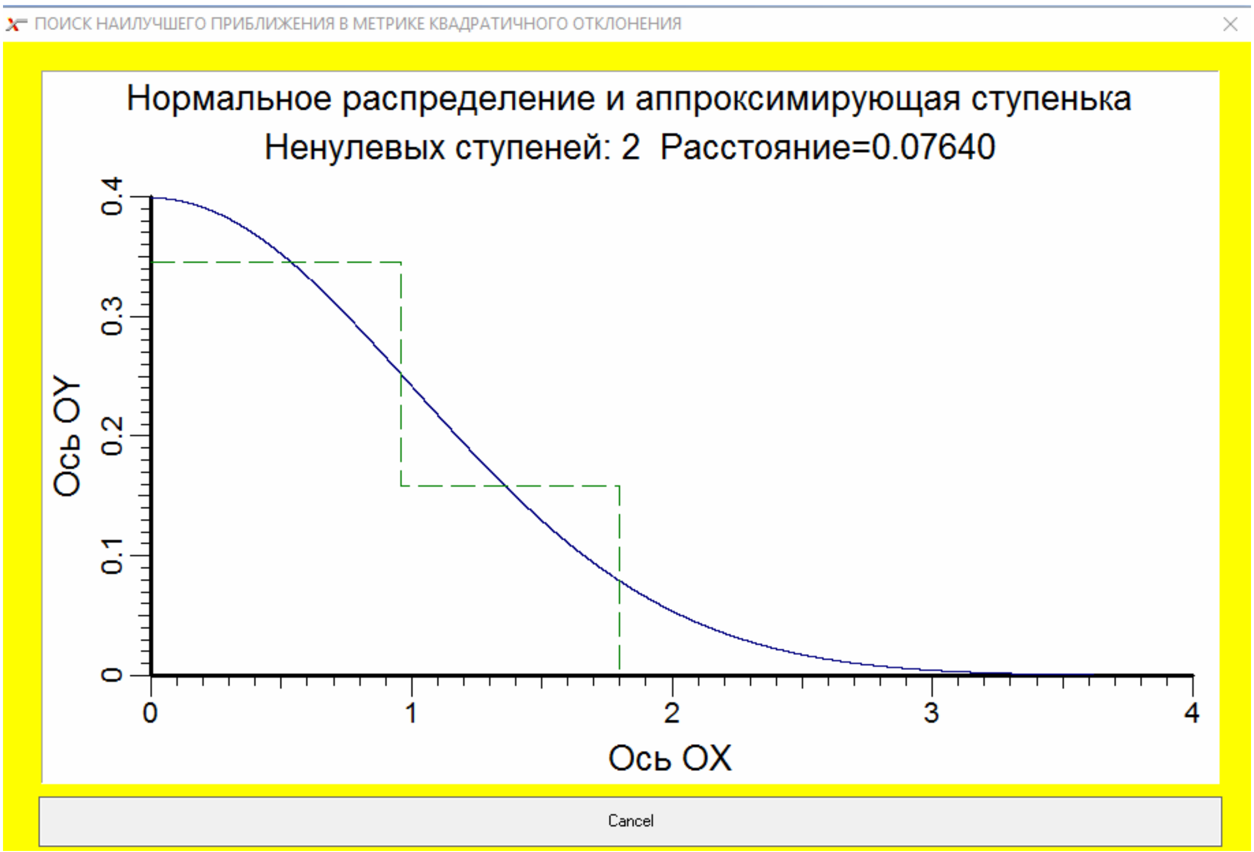
И содержит 2n+1 уравнений и 2n+1 переменных.

Для реализации этого алгоритма(решения системы (2)) написано консольное приложение , результат работы которого прилагается ниже для различных n(количество ненулевых ступенек) n=1:

```
 Введите значения правой границы отрезка интегрирования (3,4,5 ...)
4
 Введите число ступенек
1
 Введите количество отрезков разбиения для расчета интеграла
 По умолчанию количество отрезков разбиения для расчета интеграла=1000
1000
 Начало работы программы.
 B(           1 )=   1.40000000000000      C(           1 )=
  0.299459529118725
 Оценка приближения к решению =   4.597847245269016E-006
 Ошибка(квадрат расстояния)-интеграл квадрата раности f(x) и ступенчатой функции
  =   1.550102591437796E-002
 Расстояние  =   0.124503116083004
```

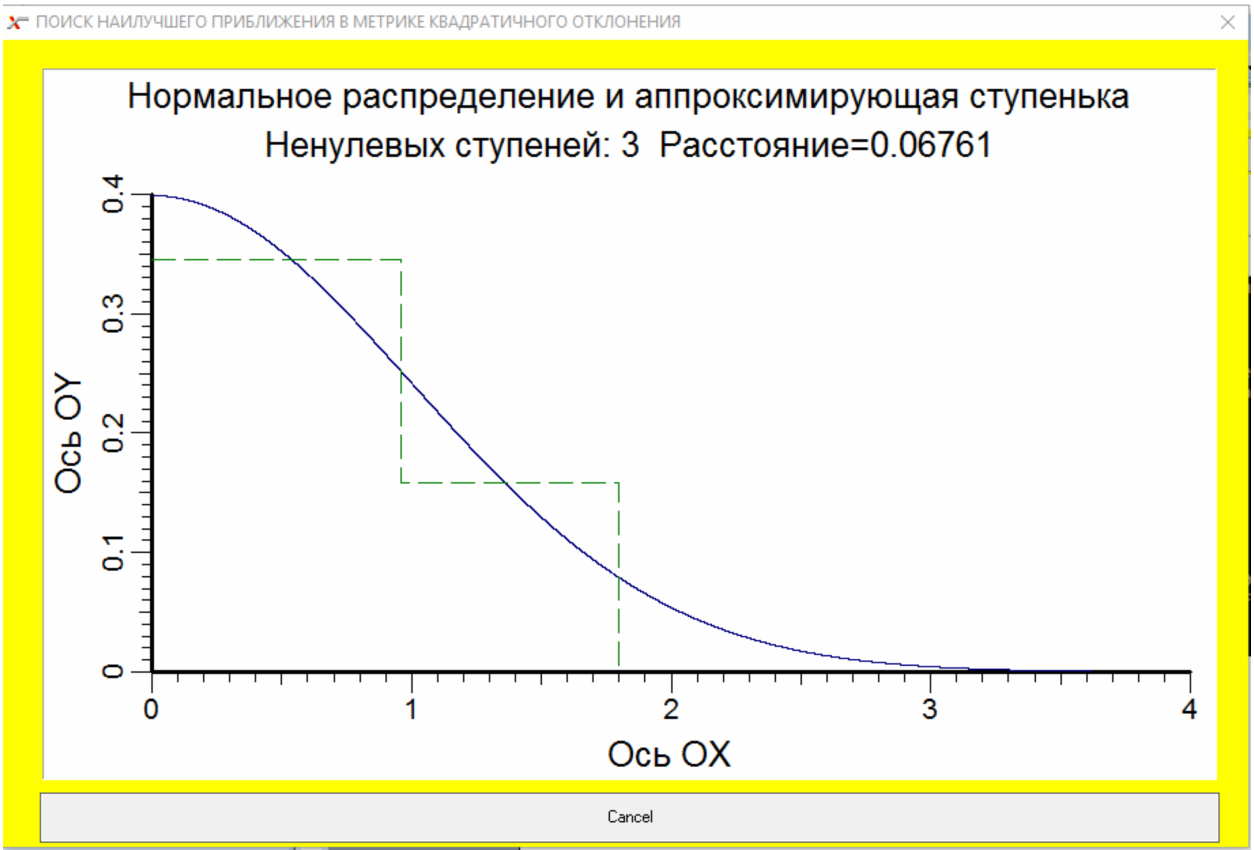
n=2:

```
 Введите значения правой границы отрезка интегрирования (3,4,5 ...)
4
 Введите число ступенек
2
 Введите количество отрезков разбиения для расчета интеграла
 По умолчанию количество отрезков разбиения для расчета интеграла=1000
1000
 Начало работы программы.
 B(           1 )=  0.960000000000000      C(           1 )=
  0.345283742222032
 B(           2 )=   1.79839999999991      C(           2 )=
  0.158004939974185
 Оценка приближения к решению =   3.505823175355138E-004
 Ошибка(квадрат расстояния)-интеграл квадрата раности f(x) и ступенчатой функции
  =   5.836434326529892E-003
 Расстояние  =   7.639655965113804E-002
```



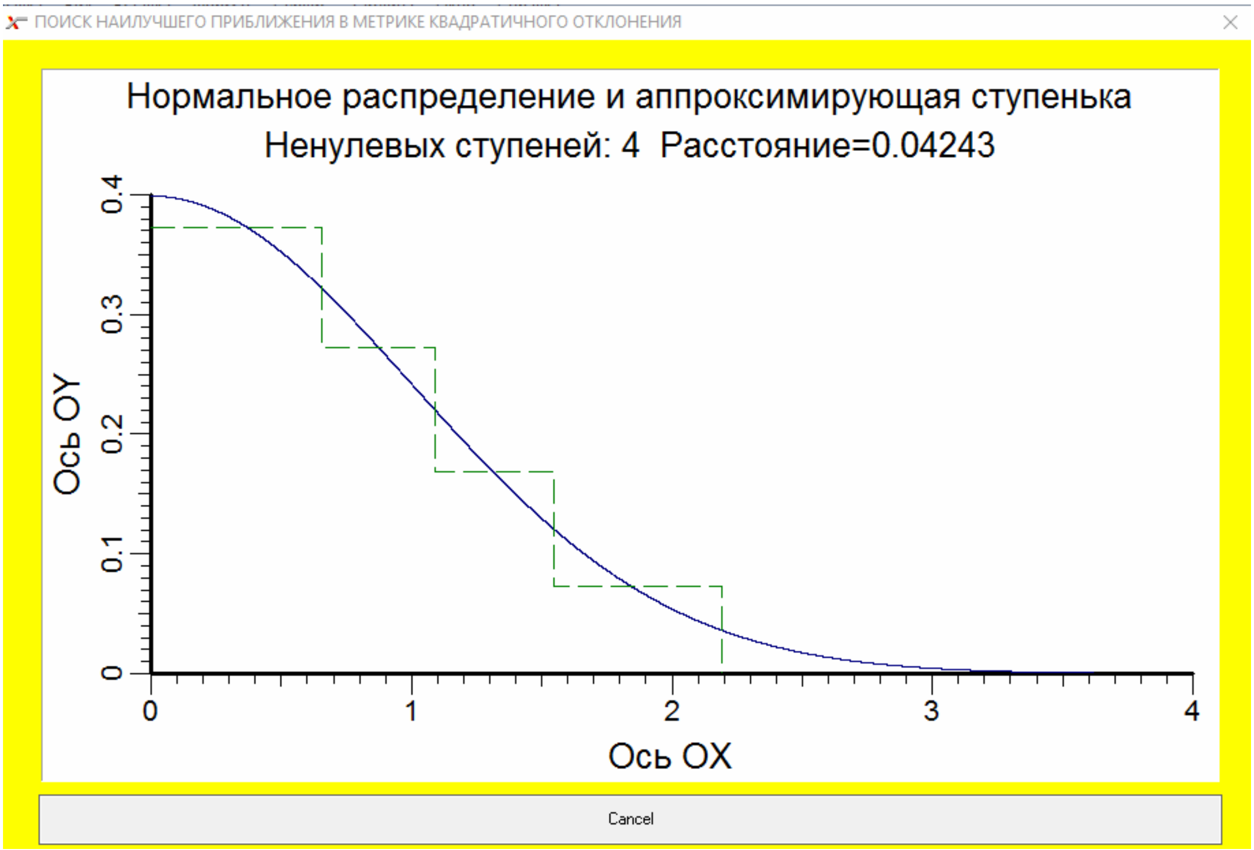
n=3:

```
E:\Lloyd_dialog\Release\Kvant.exe
 Введите значения правой границы отрезка интегрирования (3,4,5 ...)
4
 Введите число ступенек
3
 Введите количество отрезков разбиения для расчета интеграла
 По умолчанию количество отрезков разбиения для расчета интеграла=1000
1000
 Начало работы программы.
 B(           1 )=  0.960000000000000      C(           1 )=
  0.345283742222032
 B(           2 )=   1.79839999999991      C(           2 )=
  0.158004939974185
 B(           3 )=   3.99990000000411      C(           3 )=
  3.505823175355138E-004
 Оценка приближения к решению =   8.281478175268376E-005
 Ошибка(квадрат расстояния)-интеграл квадрата раности f(x) и ступенчатой функции
  =   4.571328086171328E-003
 Расстояние  =   6.761159727569915E-002
```



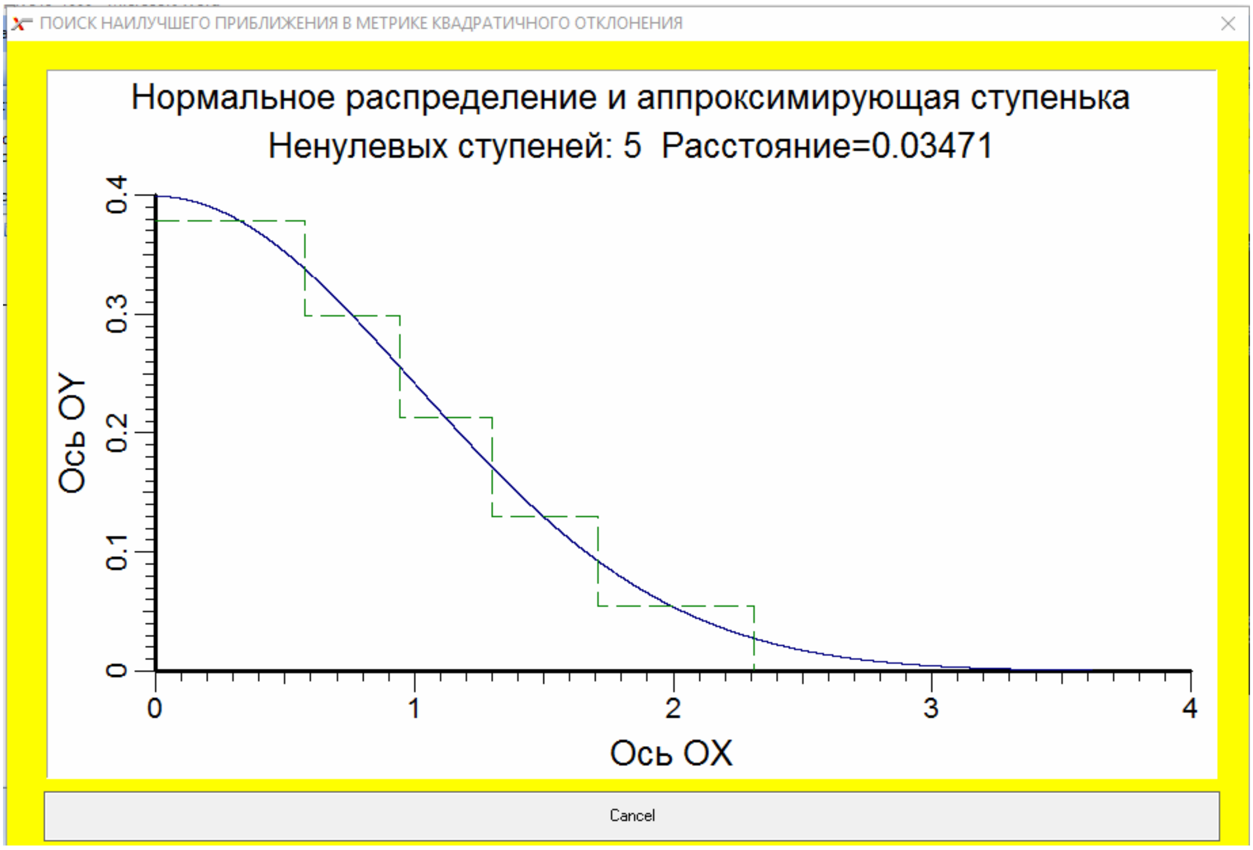
n=4:

```
 Введите значения правой границы отрезка интегрирования (3,4,5 ...)
4
 Введите число ступенек
4
 Введите количество отрезков разбиения для расчета интеграла
 По умолчанию количество отрезков разбиения для расчета интеграла=1000
5000
 Начало работы программы.
 B(            1 )=  0.652800000000000      C(            1 )=
  0.372330557883899
 B(            2 )=   1.08959999999995      C(            2 )=
  0.272437083733527
 B(            3 )=   1.54809999999990      C(            3 )=
  0.168256514920482
 B(            4 )=   2.19060000000025      C(            4 )=
  7.246894684134761E-002
 Оценка приближения к решению =   4.045567800570193E-005
 Ошибка(квадрат расстояния)-интеграл квадрата раности f(x) и ступенчатой функции
  =   1.799948303941550E-003
 Расстояние  =   4.242579762292690E-002
```



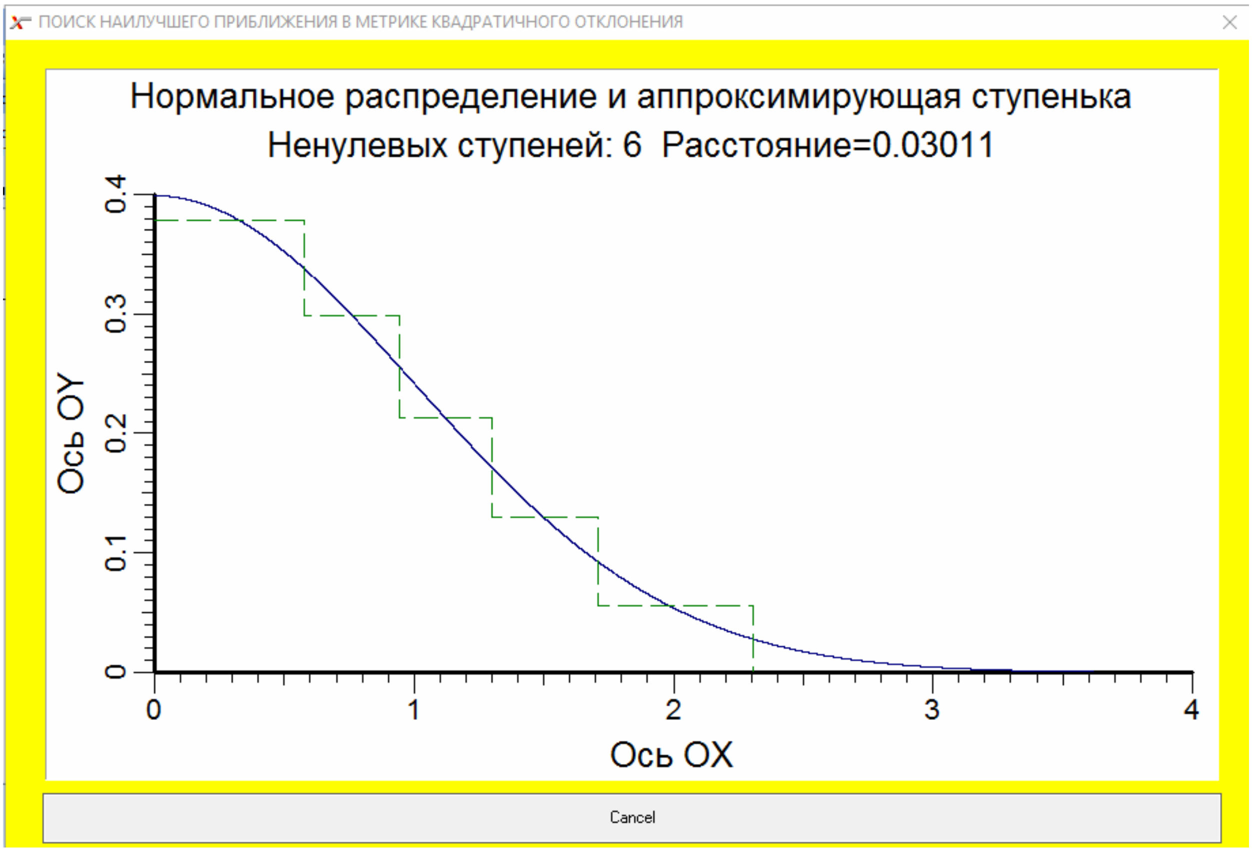
n=5:

```
 Введите значения правой границы отрезка интегрирования (3,4,5 ...)
4
 Введите число ступенек
5
 Введите количество отрезков разбиения для расчета интеграла
 По умолчанию количество отрезков разбиения для расчета интеграла=1000
5000
 Начало работы программы.
 B(             1 )=  0.575200000000000      C(             1 )=
  0.377993704112117
 B(             2 )=  0.944099999999959      C(             2 )=
  0.298238427013449
 B(             3 )=   1.30119999999992      C(             3 )=
  0.212726790979676
 B(             4 )=   1.71089999999988      C(             4 )=
  0.129475893548580
 B(             5 )=   2.31220000000050      C(             5 )=
  5.515792813440659E-002
 Оценка приближения к решению =   7.556887111546257E-005
 Ошибка(квадрат расстояния)-интеграл квадрата раности f(x) и ступенчатой функции
  =   1.204489523911350E-003
 Расстояние  =   3.470575635123589E-002
```



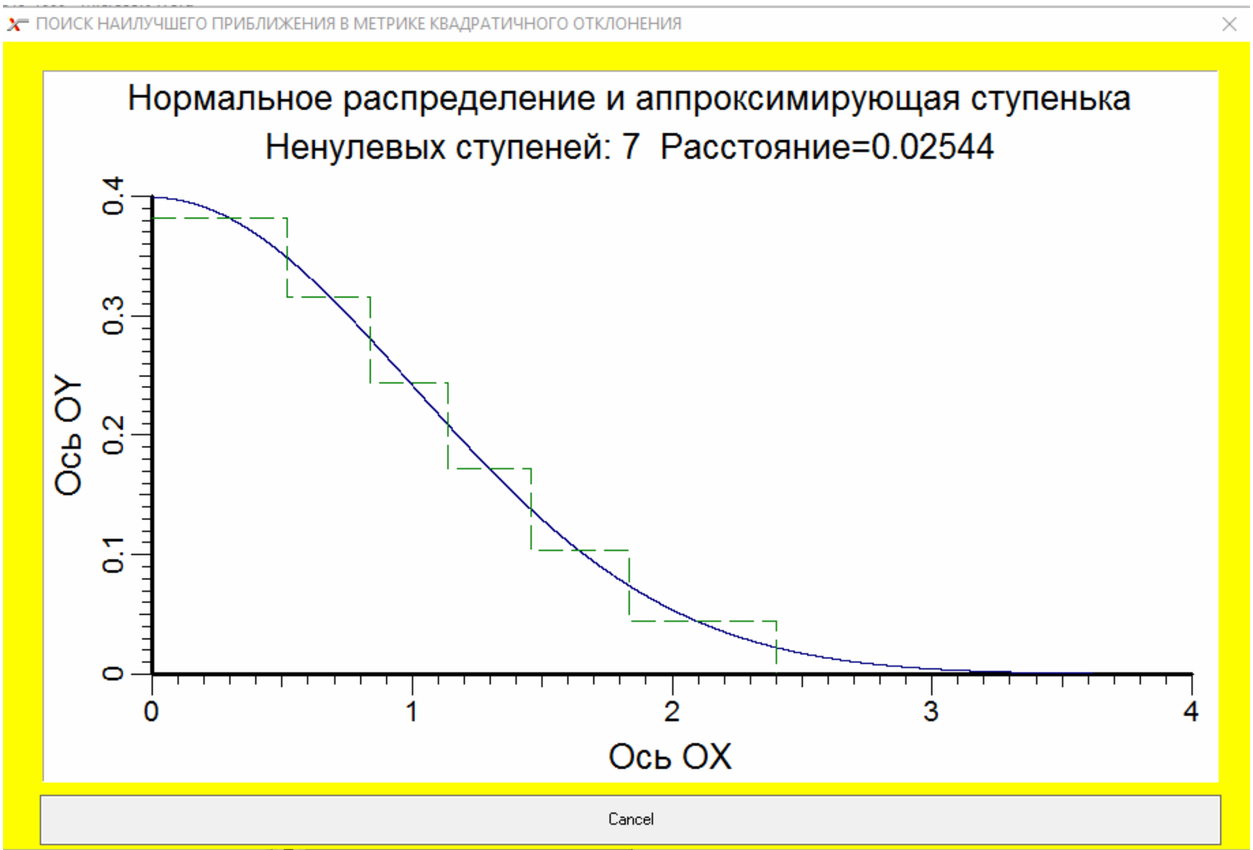
n=6:

```
 Введите значения правой границы отрезка интегрирования (3,4,5 ...)
4
 Введите число ступенек
6
 Введите количество отрезков разбиения для расчета интеграла
 По умолчанию количество отрезков разбиения для расчета интеграла=1000
5000
 Начало работы программы.
 B(             1 )=  0.574400000000000      C(             1 )=
  0.378049135684471
 B(             2 )=  0.942699999999959      C(             2 )=
  0.298494025530830
 B(             3 )=   1.29909999999992      C(             3 )=
  0.213146500745529
 B(             4 )=   1.70759999999988      C(             4 )=
  0.129991781562451
 B(             5 )=   2.30520000000049      C(             5 )=
  5.568641444839570E-002
 B(             6 )=   3.99990000000406      C(             6 )=
  2.933572795657605E-004
 Оценка приближения к решению =   2.558974378288474E-005
 Ошибка(квадрат расстояния)-интеграл квадрата раности f(x) и ступенчатой функции
  =   9.064514773310237E-004
 Расстояние  =    3.010733261733799E-002
```



n=7:

```
 Введите значения правой границы отрезка интегрирования (3,4,5 ...)
4
 Введите число ступенек
7
 Введите количество отрезков разбиения для расчета интеграла
 По умолчанию количество отрезков разбиения для расчета интеграла=1000
5000
 Начало работы программы.
 B(            1 )=  0.517600000000000      C(            1 )=
  0.381822467361898
 B(            2 )=  0.840799999999964      C(            2 )=
  0.316030928651549
 B(            3 )=   1.13999999999993      C(            3 )=
  0.244279858216868
 B(            4 )=   1.45569999999990      C(            4 )=
  0.172335721877368
 B(            5 )=   1.83349999999986      C(            5 )=
  0.104225629321806
 B(            6 )=   2.40190000000068      C(            6 )=
  4.435129029221124E-002
 B(            7 )=   3.99990000000406      C(            7 )=
  2.339166606432977E-004
 Оценка приближения к решению =   3.385087513958470E-005
 Ошибка(квадрат расстояния)-интеграл квадрата раности f(x) и ступенчатой функции
  =   6.471460240442470E-004
 Расстояние  =   2.543906492079154E-002
```

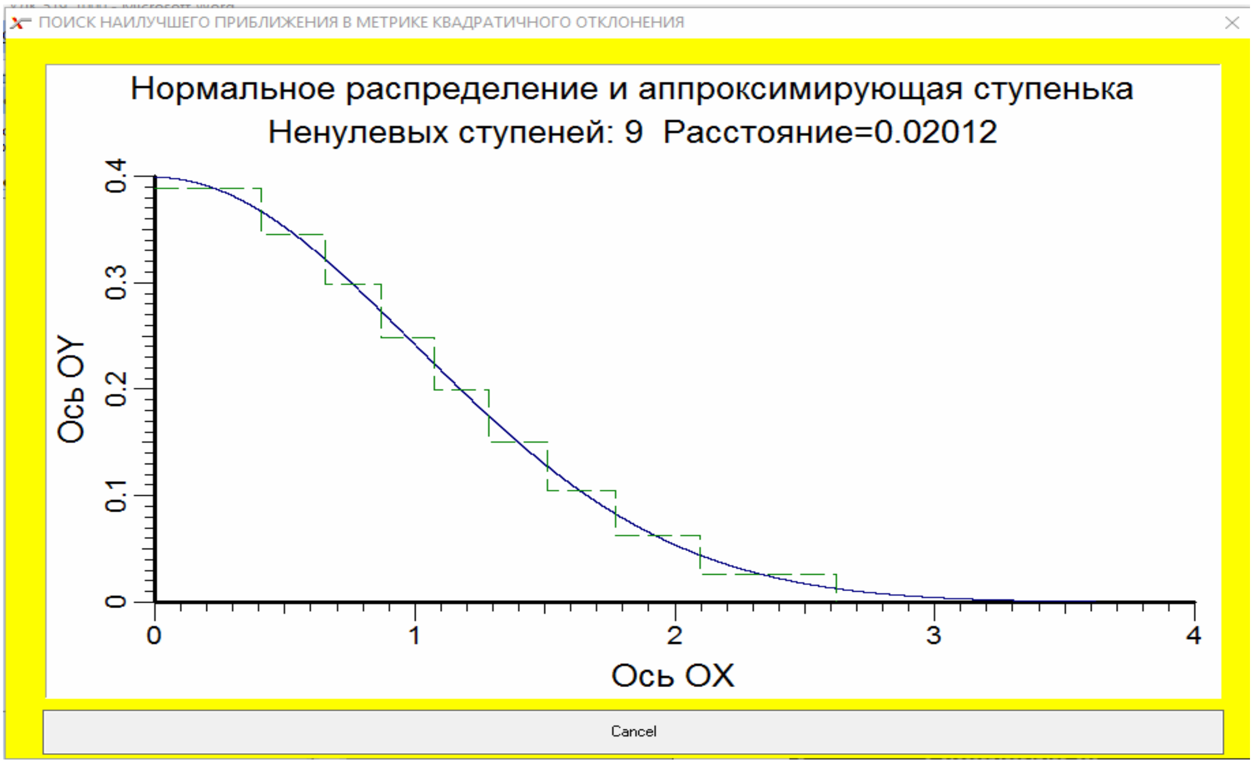


n=8:

```
 Введите значения правой границы отрезка интегрирования (3,4,5 ...)
4
 Введите число ступенек
8
 Введите количество отрезков разбиения для расчета интеграла
 По умолчанию количество отрезков разбиения для расчета интеграла=1000
5000
 Начало работы программы.
 B(           1 )=  0.473600000000000      C(           1 )=
  0.384517340080021
 B(           2 )=  0.763999999999968      C(           2 )=
  0.328720860183452
 B(           3 )=   1.02539999999994      C(           3 )=
  0.267204798979452
 B(           4 )=   1.28889999999991      C(           4 )=
  0.204447163674222
 B(           5 )=   1.57879999999988      C(           5 )=
  0.143250152900076
 B(           6 )=   1.93479999999984      C(           6 )=
  8.619389650531134E-002
 B(           7 )=   2.48020000000085      C(           7 )=
  3.656698449556603E-002
 B(           8 )=   3.99990000000405      C(           8 )=
  2.613646690309210E-004
 Оценка приближения к решению =   6.402866751967099E-006
 Ошибка(квадрат расстояния)-интеграл квадрата раности f(x) и ступенчатой функции
  =   4.838370065112279E-004
 Расстояние  =   2.199629529059900E-002
```

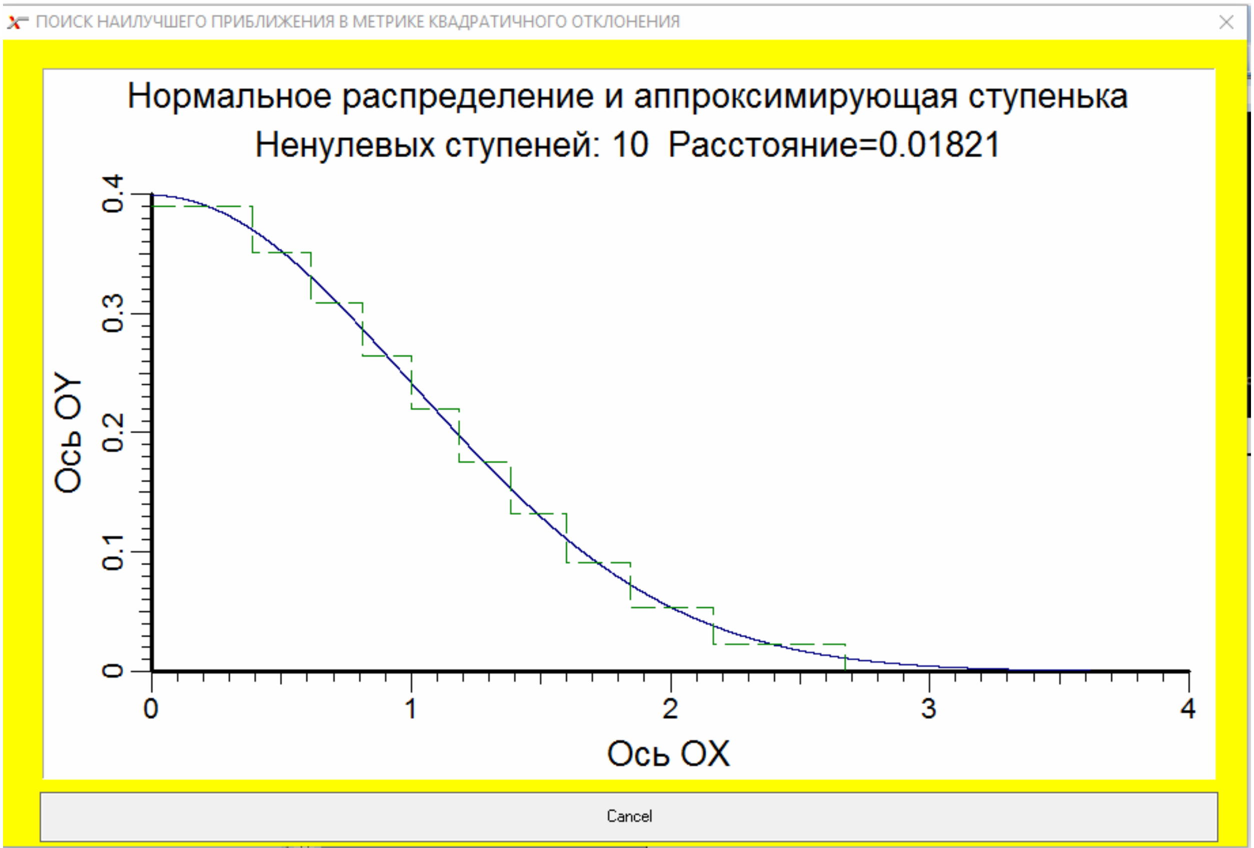
n=9:

```
 Введите значения правой границы отрезка интегрирования (3,4,5 ...)
5
 Введите число ступенек
9
 Введите количество отрезков разбиения для расчета интеграла
 По умолчанию количество отрезков разбиения для расчета интеграла=1000
10000
 Начало работы программы.
 B(           1 )=  0.410000000000000      C(            1 )=
  0.388041527384566
 B(           2 )=  0.655699999999973      C(            2 )=
  0.345521797490082
 B(           3 )=  0.869699999999949      C(            3 )=
  0.298023670158972
 B(           4 )=   1.07529999999993      C(            4 )=
  0.248607819195268
 B(           5 )=   1.28509999999990      C(            5 )=
  0.198960359769005
 B(           6 )=   1.51099999999988      C(            6 )=
  0.150441570195283
 B(           7 )=   1.77039999999985      C(            7 )=
  0.104339193803417
 B(           8 )=   2.09940000000003      C(            8 )=
  6.212926358146212E-002
 B(           9 )=   2.61890000000113      C(            9 )=
  2.594882104489110E-002
 Оценка приближения к решению =   9.016707481943748E-005
 Ошибка(квадрат расстояния)-интеграл квадрата раности f(x) и ступенчатой функции
  =   4.048247614456901E-004
 Расстояние  =   2.012025748954745E-002
```



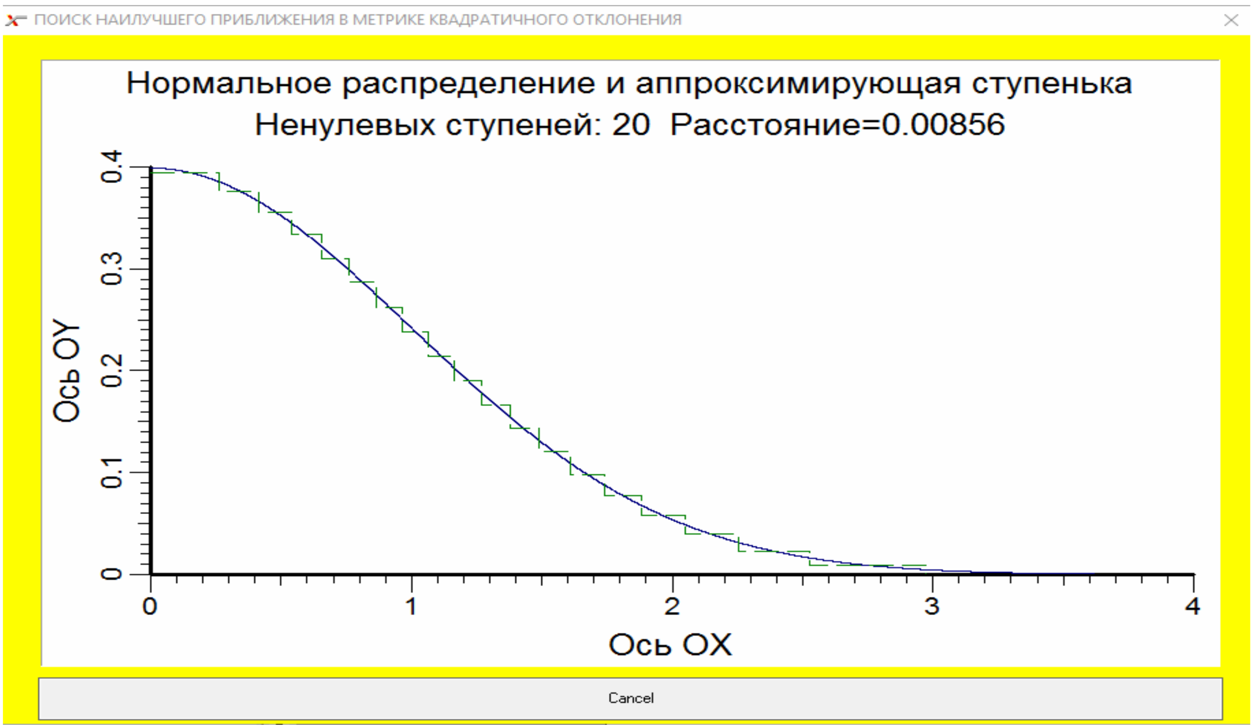
n=10:

```
 Введите значения правой границы отрезка интегрирования (3,4,5 ...)
5
 Введите число ступенек
10
 Введите количество отрезков разбиения для расчета интеграла
 По умолчанию количество отрезков разбиения для расчета интеграла=1000
10000
 Начало работы программы.
 B(           1 )=  0.385500000000000      C(            1 )=
  0.389277553212577
 B(           2 )=  0.614799999999975      C(            2 )=
  0.351469198519648
 B(           3 )=  0.812499999999953      C(            3 )=
  0.309015796659486
 B(           4 )=  0.999699999999932      C(            4 )=
  0.264557538473346
 B(           5 )=   1.18689999999991      C(            5 )=
  0.219529092995313
 B(           6 )=   1.38259999999989      C(            6 )=
  0.174962615116668
 B(           7 )=   1.59689999999987      C(            7 )=
  0.131830168064083
 B(           8 )=   1.84609999999984      C(            8 )=
  9.111349807527061E-002
 B(           9 )=   2.16540000000017      C(            9 )=
  5.405880315811451E-002
 B(          10 )=   2.67490000000125      C(           10 )=
  2.245608561165219E-002
 Оценка приближения к решению =   1.598262819256444E-004
 Ошибка(квадрат расстояния)-интеграл квадрата раноcти f(x) и ступенчатой функции
  =   3.317278517909332E-004
 Расстояние  =   1.821339759053574E-002
```



n=20:

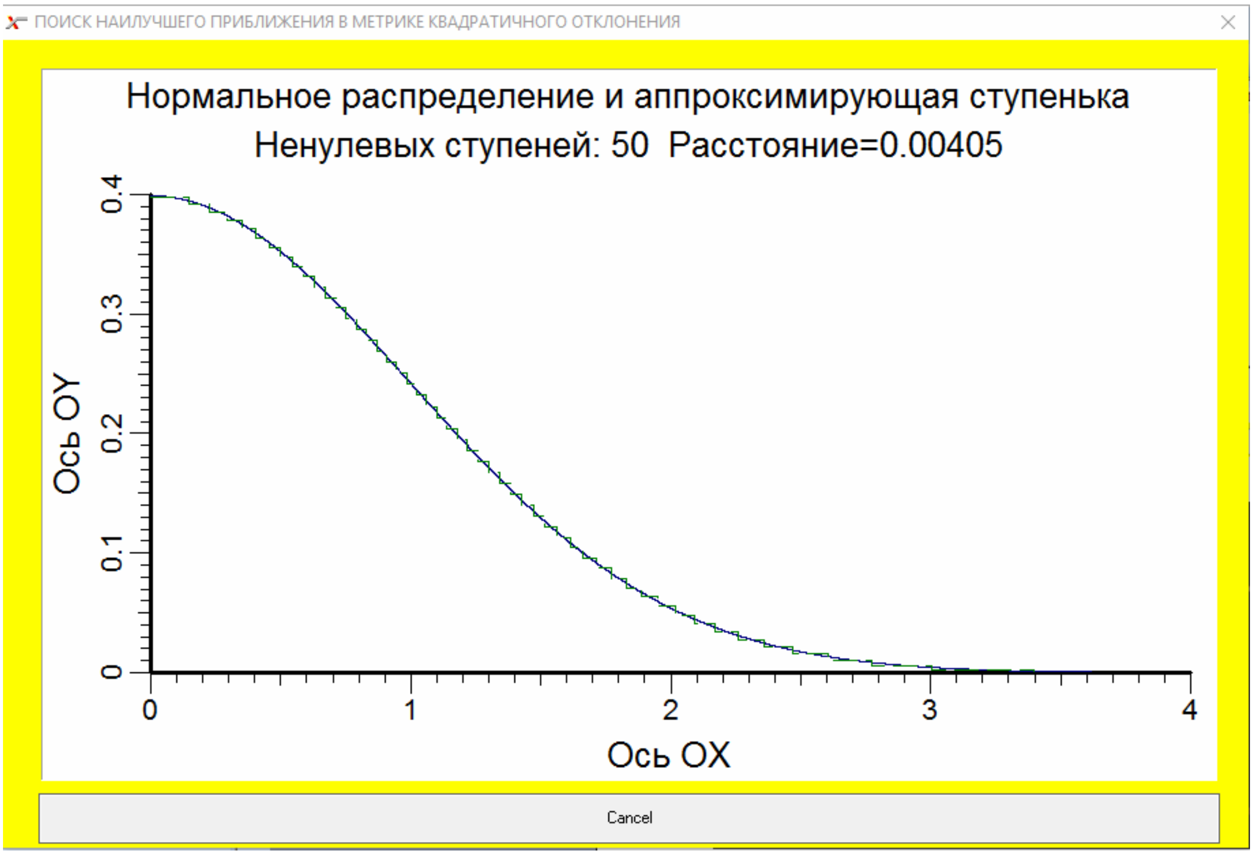
```
 B(           1 )=  0.263500000000000      C(           1 )=
  0.394373389849275
 B(           2 )=  0.415499999999983      C(           2 )=
  0.376287003780576
 B(           3 )=  0.541499999999969      C(           3 )=
  0.355612929419062
 B(           4 )=  0.654999999999957      C(           4 )=
  0.333463919259390
 B(           5 )=  0.761499999999945      C(           5 )=
  0.310376839381682
 B(           6 )=  0.863999999999934      C(           6 )=
  0.286686259655719
 B(           7 )=  0.964499999999923      C(           7 )=
  0.262652844199769
 B(           8 )=   1.06459999999991      C(           8 )=
  0.238461246615538
 B(           9 )=   1.16569999999990      C(           9 )=
  0.214260344020426
 B(          10 )=   1.26909999999989      C(          10 )=
  0.190192714390887
 B(          11 )=   1.37619999999988      C(          11 )=
  0.166422197473850
 B(          12 )=   1.48869999999987      C(          12 )=
  0.143090991906066
 B(          13 )=   1.60869999999985      C(          13 )=
  0.120355447507543
 B(          14 )=   1.73909999999984      C(          14 )=
  9.841129978035396E-002
 B(          15 )=   1.88429999999982      C(          15 )=
  7.745596292805368E-002
 B(          16 )=   2.05159999999992      C(          16 )=
  5.773261555135153E-002
 B(          17 )=   2.25470000000035      C(          17 )=
  3.953174581729160E-002
 B(          18 )=   2.52490000000092      C(          18 )=
  2.327910745420815E-002
 B(          19 )=   2.97040000000186      C(          19 )=
  9.651545387760904E-003
 B(          20 )=   4.99990000000170      C(          20 )=
  3.100993747686374E-005
 Оценка приближения к решению =    2.803501137103858E-005
 Ошибка(квадрат расстояния)-интеграл квадрата раности f(x) и ступенчатой функции
  =   7.323121816438504E-005
 Расстояние  =    8.557524067414888E-003
```



n=30:


ПОИСК НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В МЕТРИКЕ КВАДРАТИЧНОГО ОТКЛОНЕНИЯ
Нормальное распределение и аппроксимирующая ступенька
Ненулевых ступеней: 30 Расстояние=0.00566
Ось OY
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0
1
2
3
4
Ось OX
Cancel

n=50:


ПОИСК НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В МЕТРИКЕ КВАДРАТИЧНОГО ОТКЛОНЕНИЯ
Нормальное распределение и аппроксимирующая ступенька
Ненулевых ступеней: 50 Расстояние=0.00405
Ось OY
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0
1
2
3
4
Ось OX
Cancel

N=100:


ПОИСК НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В МЕТРИКЕ КВАДРАТИЧНОГО ОТКЛОНЕНИЯ
Нормальное распределение и аппроксимирующая ступенька
Ненулевых ступеней: 100 Расстояние=0.00243
Ось OY
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0
1
2
3
4
Ось OX
Cancel

Из приведенных вычислений хорошо видно , что расстояние до наилучшего приближения монотонно убывает с ростом числа (ненулевых) ступенек – от $1{,}8 \bullet 10^{-3}$ (n=4) до $4{,}8 \bullet 10^{-4}$ (n=8)