

УДК 530.1

А.А. Соловьёв, О.А. Сперанская, Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов

ВРЕМЕННАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

*Научные руководители: Д.Ф. Пастухов, к.ф.-м.н, О.А. Сперанская,
к.ф.-м.н*

Полоцкий государственный университет

(Республика Беларусь, г. Новоолоцк, anton_solovuo@gmail.com,
dmitrij.pastuhov@mail.ru, pulsar1900@mail.ru)

Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН
(Россия, г. Москва)

В формировании гидродинамических явлений большой интерес представляет начальный промежуток времени их динамики. На важность инициализации нестационарной задачи указывала А.А. Сперанская, профессор Московского государственного университета [1, 2]. В гидродинамических задачах с вязкостью нет простых законов сохранения таких как, например, закон сохранения механической энергии. А в задачах с нелинейными уравнениями и диссипацией возможно явление самоорганизации систем [4]. Согласно И. Пригожину, динамику развития необратимых термодинамических систем определяет принцип минимизации скорости роста энтропии [4]. Проверим применимость принципа Пригожина к гидродинамической задаче, для чего предварительно численно решим её в оболочке ANSYS Fluent.

Рассмотрим гидродинамическую систему из последовательных периодически соединённых цилиндров большего диаметра 20 см и меньшего 10 см равной длины 50 см. В симметричной геометрической модели использовалось 7 цилиндров: 4 малого и 3 большего диаметров. Скорость воды на входной трубе равнялась 30 см/с. На этапе создания геометрии линии соединения между цилиндрами скруглялись параметром *blend* с фиксированным радиусом 0,5 мм. Для ускорения времени счёта в 2 раза решателем использовалась осевая симметрия модели. Параметры сетки выбирались по умолчанию со средним разрешением. В решателе нами

использовалась стандартная модель $k-\epsilon(2eqn)$ жидкости из двух уравнений (устойчивая в лабораторных задачах) с учётом уравнения обмена энергией. Выбран также нестационарный режим модели transient с временным шагом $\tau = 3 \cdot 10^{-2}$ с для сохранения поля скорости и поля температуры. Для анализа гидродинамической задачи с вязкостью можно пренебречь нагреванием жидкости, но важно учесть поле распределения скорости и турбулентной вязкости. Интенсивность турбулентности на входе и на выходе модели равна нулю. Благодаря этому можно было выяснить механизм зарождения турбулентности во времени, обусловленный влиянием геометрии модели. Результаты численного решения задачи представлены на рисунках 1, 2, 3, 4 – суть поле скорости и поле турбулентной вязкости в моменты времени $t = 3 \cdot 10^{-2}; 1,56$ с.

На этапе решения использовалась двойная точность решения, когда решатель переходит к следующей временной итерации, если относительная погрешность по всем 8 переменным, входящим в систему гидродинамических уравнений, будет ниже 10^{-3} . Поле турбулентной вязкости совпадало с полем эффективной вязкости, т.е. молекулярной вязкостью в задаче можно было пренебречь.

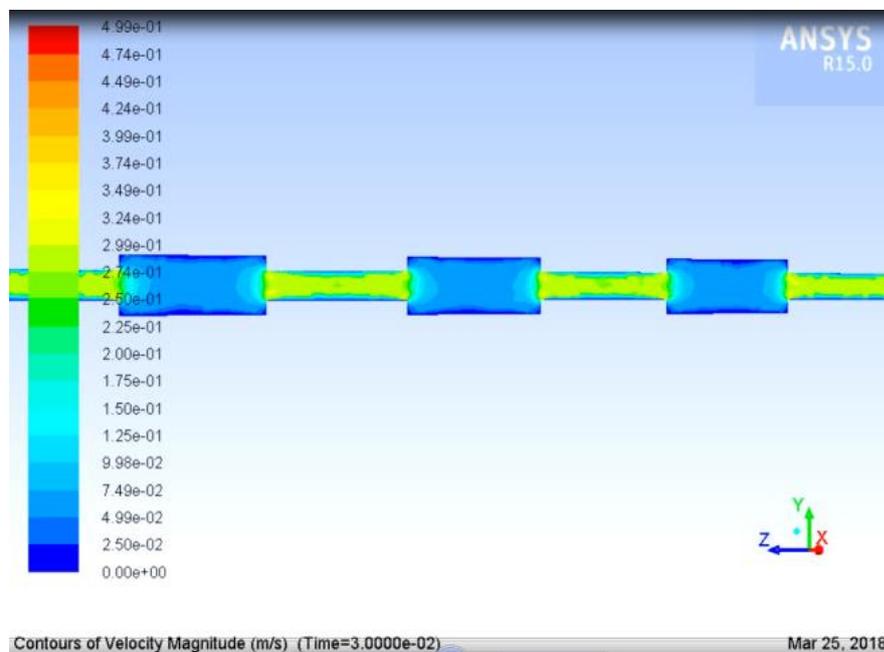


Рис.1. Поле скорости в момент времени $t = 3 \cdot 10^{-2}$ с.

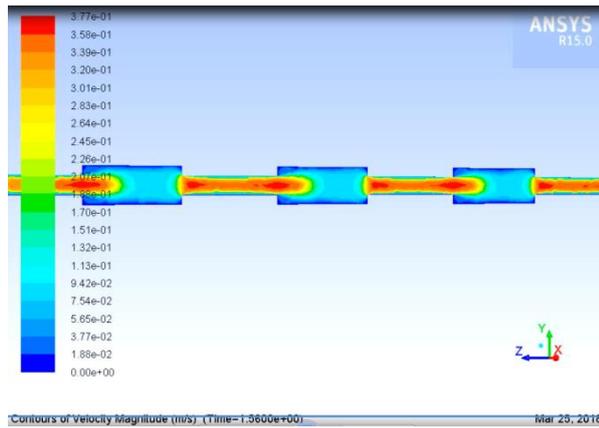


Рис.2. Поле скорости в момент времени $t = 1,56$ с.

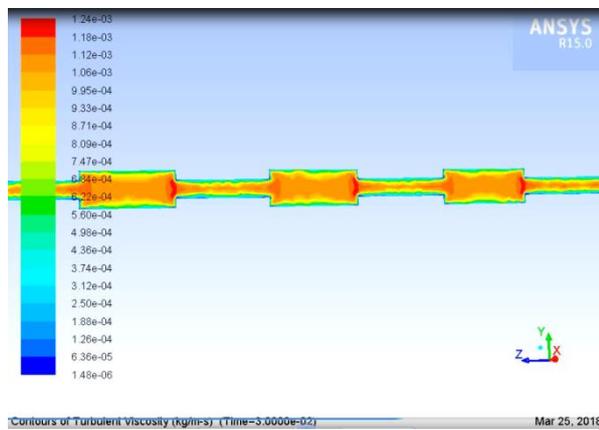


Рис. 3. Поле турбулентной вязкости в момент времени $t = 3 \cdot 10^{-2}$ с.

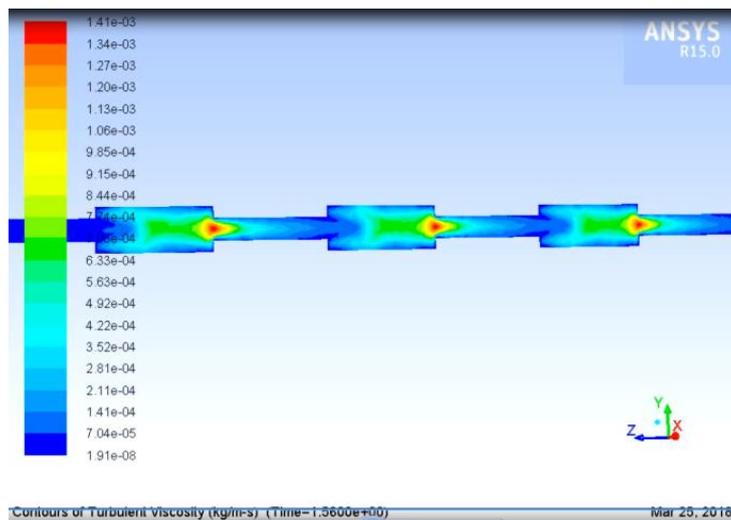


Рис. 4. Поле турбулентной вязкости в момент времени $t = 1,56$ с.

Используем функционал скорости роста энтропии в гидродинамической задаче по Л.Д. Ландау [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho s dV &= \int \frac{k(\nabla T)^2}{T} dV + \int \frac{\eta}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{i,k} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 dV + \int \frac{\zeta}{T} \left((\operatorname{div} \vec{v})^2 \right) dV = \\ &= \int \frac{\eta}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{i,k} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 dV = \int \frac{\eta}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV \end{aligned} \quad (1)$$

Известно, что для несжимаемой жидкости $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$ и температурное поле в задаче можно считать однородным $\nabla T = 0$. Запишем компоненты тензора напряжения в цилиндрической системе координат с учетом осевой симметрии [2] $v_\varphi = 0, \partial(\cdot)/\partial\varphi = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, \sigma_{\varphi\varphi} = -p + 2\eta \frac{v_r}{r}, \sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi} = 0, \sigma_{zz} = -p + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \sigma_{zr} &= \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right), \sigma_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \Leftrightarrow \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \frac{\sigma_{ik}}{\eta}. \end{aligned}$$

Используем нулевое избыточное давление в модели $p = 0, \eta = \eta(r, z)$, $\bar{v} = \bar{v}(r, z)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho s dV &= \int \frac{\eta}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV = \int \frac{\eta}{2T} \left(4 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + 4 \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 \right) dV = \\ &= \int \frac{2\eta}{T} \left(\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 \right) dV \approx \\ &\approx 2 \frac{\bar{\eta}}{T} \left(\Delta v_r^2 \left(\frac{2}{R^2} + \frac{1}{4l^2} \right) + \Delta v_z^2 \left(\frac{1}{4R^2} + \frac{1}{l^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\Delta v_r \Delta v_z}{Rl} \right) V, V = 2l\pi R^2 \end{aligned} \quad (2)$$

где: $\Delta v_r = v_r(R) - v_r(0)$ – разность скорости частиц жидкости в радиальном направлении на стенке и на оси цилиндра, $\Delta v_z = v_z(l) - v_z(0)$ – разность скорости частиц жидкости на оси в центре цилиндра и на правом крае, $R = 10,5$ см радиусы большего и меньшего цилиндров, $l = 25$ см – половина высоты цилиндра, $V = 2l\pi R^2$ – объём цилиндра. $\bar{\eta}, \bar{T}$ – среднее значение турбулентной вязкости и абсолютной температуры по области. Учитывая периодичность модели, рассчитаем скорость роста энтропии, используя формулу (2) для одного узкого и одного широкого цилиндров, образующих периодический элемент модели.

В момент времени $t = 3 \cdot 10^{-2}$ с, запишем данные рисунков 1, 3

$$(\Delta v_r)_1 = -7,5 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}, R_1 = 0,1 \text{ м}, l = 0,25 \text{ м}, (\Delta v_z)_1 = -2 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}, \bar{\eta}_1 = 1,18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м} \cdot \text{с}$$

$$(\Delta v_r)_2 = -0,3 \text{ м/с}, R_2 = 0,05 \text{ м}, l = 0,25 \text{ м}, (\Delta v_l)_2 = 0 \text{ м/с}, \bar{\eta}_2 = 1,18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м} \cdot \text{с}, \bar{T} = 300 \text{ К},$$

ось z на рисунках направлена справа налево.

Нижние индексы: 1 – соответствуют цилиндру радиуса $R_1 = 0,1 \text{ м}$, 2 – соответствует цилиндру радиуса $R_2 = 0,05 \text{ м}$. По формуле(2) получим:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= 2 \frac{\bar{\eta}_1}{T_1} \left((\Delta v_r)_1^2 \left(\frac{2}{R_1^2} + \frac{1}{4l^2} \right) + (\Delta v_z)_1^2 \left(\frac{1}{4R_1^2} + \frac{1}{l^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{(\Delta v_r)_1 (\Delta v_z)_1}{R_1 l} \right) 2l\pi R_1^2 + \\ &+ 2 \frac{\bar{\eta}_2}{T_2} \left((\Delta v_r)_2^2 \left(\frac{2}{R_2^2} + \frac{1}{4l^2} \right) + (\Delta v_z)_2^2 \left(\frac{1}{4R_2^2} + \frac{1}{l^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{(\Delta v_r)_2 (\Delta v_z)_2}{R_2 l} \right) 2l\pi R_2^2 = \\ &= 2 \frac{1,18 \cdot 10^{-3}}{300} \left((-7,5 \cdot 10^{-2})^2 \left(\frac{2}{0,1^2} + \frac{1}{4 \cdot 0,25^2} \right) + (-2 \cdot 10^{-2})^2 \left(\frac{1}{4 \cdot 0,1^2} + \frac{1}{0,25^2} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \frac{(-7,5 \cdot 10^{-2})(-2 \cdot 10^{-2})}{0,1 \cdot 0,25} \right) 2 \cdot 0,25\pi(0,1)^2 + 2 \frac{1,18 \cdot 10^{-3}}{300} (-0,3)^2 \left(\frac{2}{0,05^2} + \frac{1}{4 \cdot 0,25^2} \right) 2 \cdot 0,25\pi(0,05)^2 = 2,35 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Дж/(с К).

Аналогично для момента времени $t = 1,56 \text{ с}$ запишем данные рисунков 2,

4:

$$(\Delta v_r)_1 = -7,5 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}, R_1 = 0,1 \text{ м}, l = 0,25 \text{ м}, (\Delta v_l)_1 = -0,15 \text{ м/с}, \bar{\eta}_1 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ кг/м} \cdot \text{с}$$

$$(\Delta v_r)_2 = -0,2 \text{ м/с}, R_2 = 0,05 \text{ м}, l = 0,25 \text{ м}, (\Delta v_l)_2 = 0 \text{ м/с}, \bar{\eta}_2 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ кг/м} \cdot \text{с}, \bar{T} = 300 \text{ К}.$$

По формуле (2) в момент времени $t = 1,56 \text{ с}$ получим: $\dot{S} \approx 2,6 \cdot 10^{-7} \text{ Дж/(с К)}$.

Сравнение рисунков 2 и 4 показывает, что у правого края каждого цилиндра большего радиуса образуется сферическая область с диаметром равному диаметру меньшего цилиндра с большим значением турбулентной вязкости и большим значением градиента скорости. Эта сферическая область максимально локализована, неоднородна и является переходной между цилиндрами различного радиуса. Рассчитаем в ней скорость роста энтропии:

$$\dot{S} \approx 2 \frac{\bar{\eta}_1}{T_1} \left(\frac{(\Delta v_r)_1^2}{R_2^2} \right) \frac{4}{3} \pi R_2^3 = \frac{8}{3} \pi (\Delta v_r)_1^2 R_2 \frac{\bar{\eta}_1}{T_1} = \frac{8}{3} \pi \cdot 0,15^2 \cdot 0,05 \cdot \frac{1,4 \cdot 10^{-3}}{300} \approx 4,4 \cdot 10^{-8} \text{ Дж/(с К)}.$$

Сравнивая три полученных результата скорости роста энтропии в гидродинамической задаче, отметим, что максимальная скорость роста энтропии в системе возникает в начальный промежуток времени $t = 3 \cdot 10^{-2} \text{ с}$. В течение этого интервала жидкость в каждом цилиндре ведёт себя как единое целое. Это подтверждает однородное поле вязкости с высоким значением

$\eta = 1,1 \cdot 10^{-3}$ кг/(м с) по всему объёму системы и однородным полем скорости в каждом цилиндре (с разными значениями скорости в цилиндрах большего и меньшего диаметров). Полученное численное решение показывает, как система реагирует на движение жидкости – сначала происходит разделение жидкости на слои вдоль движения потока, поскольку центральный однородный осевой слой имеет большее значение турбулентной вязкости, чем слой жидкости, примыкающий к стенкам. Т.е. центральный слой ведёт себя как более «жесткая», вязкая среда, чем жидкость у стенки цилиндра.

Спустя 1,56 с, как видно из рисунков 2, 4, происходит разделение поля вязкости в объёмах малого и большого цилиндров в направлении поперёк потоку. Действительно, нужно больше времени, чтобы вихревые образования посредством диффузии прошли расстояние сравнимое с высотой цилиндра. Диффузия вихрей в поперечном направлении происходит раньше, так как отношение радиуса к высоте цилиндра равно 1:5 (1:10). Тогда к моменту времени 1,56 с. скорость роста энтропии в гидродинамической системе уменьшается в $\frac{2,35 \cdot 10^{-6}}{2,6 \cdot 10^{-7}} \approx 8,9$ раз. Сферическая область, в которой наибольшие значения коэффициента турбулентной вязкости и градиента скорости, от которых зависит скорость роста энтропии, имеет малый объём, что также снижает интеграл согласно формуле (2). В такой локализованной области значение скорости роста энтропии спустя 1,56 с меньше чем полное начальное значение во всей системы в $\frac{2,35 \cdot 10^{-6}}{4,4 \cdot 10^{-8}} \approx 53,4$ раза.

Таким образом, решённая нами численно задача показывает, что временная последовательность состояний в гидродинамической системе заключается в последовательном приведении в действие механизмов, уменьшающих скорость роста энтропии со временем. То есть и к гидродинамическим системам применим принцип И. Пригожина.

Список использованных источников

1. Общая геофизика: Учебное пособие / Под ред. В.А. Магницкого. – М.: Изд-во МГУ, 1995. – 317 с.: ил.

2. Анисимова Е.П., Пастухов Д.Ф., Сперанская А.А., Сперанская О.А. О роли аэрации в формировании термического режима геотермального озера. // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 1996. Т.32.№2. С 267–273.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10т. Т.6. Гидродинамика. – 5-ое изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 736 с.

4. Г. Николис, И. Пригожин. Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипации структур и упорядоченность через флуктуации. – М.: Мир. 1979. 512 с.

УДК 519.218.5

И.А. Столяров, Е.Д. Табакова, Ю.Г. Савинов

СЕМИМАРТИНГАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ МНОГОКАНАЛЬНОЙ СМО С ОГРАНИЧЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ ОЖИДАНИЯ

Научный руководитель: Ю.Г. Савинов, к.ф.-м.н., доцент

Ульяновский государственный университет

(Россия, г. Ульяновск, balalaikaputinka@outlook.com)

В данной работе представлен семимартингальный аналог (в терминах считающих процессов [1]) классической модели системы массового обслуживания (СМО) с ограниченным временем ожидания в очереди [2, 3]. Аналитическое исследование подобных многоканальных моделей возможно только для нескольких частных случаев (например, когда время ожидания константа или показательно распределено). Это связано, не в последнюю очередь, с тем, что число заявок этих СМО является немарковским процессом. В немарковских СМО с нетерпеливыми заявками также применяют гиперэкспоненциальную аппроксимацию и другие распределения фазового типа [4], но сложность таких аппроксимаций быстро растет с увеличением числа каналов в СМО. Преимущество семимартингального описания для СМО с нетерпеливыми заявками состоит отчасти в том, что модель практически не усложняется с ростом числа обслуживающих приборов и рассмотрения любого распределения времени ожидания "нетерпеливых" заявок. Ниже для