УДК 519.6

КВАНТОВАНИЕ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В МЕТРИКЕ КВАДРАТИЧНОГО ОТКЛОНЕНИЯ

канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ,
канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ,
канд. техн. наук, доц. Р.П. БОГУШ
(Полоцкий государственный университет, Беларусь)

В настоящее время для решения многих практических задач актуальным является сжатие информации из-за большого объема передаваемых или хранимых данных, например, в системах дистанционного зондирования Земли на основе радиолокаторов с синтезированной апертурой антенны передаваемый поток достигает 4 Гб/с [1, 2]. В большинстве случаев данные обладают избыточностью, благодаря чему возможно применение алгоритмов сжатия, причем, его эффективность будет значительно выше, если учитывать особенности обрабатываемых данных. Известно, что значения компонент принимаемого сигнала радиолокатором с синтезированной апертурой имеют нормальное распределение с нулевым средним, поэтому для подобного типа сигналов используются алгоритмы типа блочного адаптивного квантования с коэффициентами для нормального типа распределения. Определение пороговых уровней в существующих алгоритмах в значительной степени зависит от начальных данных и, соответственно, не обеспечивает их эффективность для максимально точного восстановления отсчетов сжатого сигнала на приемной стороне. Поэтому, актуальным является получение алгоритма квантования функции плотности нормального распределения на множестве ступенчатых функций на заданном интервале свободного от указанного недостатка [3–6].

Определение. Пусть $n \in \mathrm{N}$. Функция $f_n:[a;b]\to \Re$ $(a<b)$ называется n кусочно-постоянной (или n-ступенькой) на $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$, если $\exists\ x_1 < x_2 < ... < x_{n-1}$ такие что:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < b = x_n \ ,$$
$$f_n(x) = c_i = const \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i) \ ,$$
$$f_n(x_i) = c_i \ \ или \ \ f_n(x_i) = c_{i+1} \ , \ c_i \neq c_{i+1} \quad , \forall i = \overline{1, n-1} \ .$$

Множество n-ступенчатых функций $f_n:[a;b]\to \Re$ $(a<b)$ обозначим как $S_n[a,b]$.

Пусть $f:[a,b]\to\Re$, $f \in C^2[a,b]$, $f'(x)<0\ \forall x\in[a,b]$. $n\in\mathrm{N}$. Для минимизации ошибки квантования требуется в пространстве n-ступенчатых функций найти наилучшее приближение $h_n:[a;b]\to\Re$ функции $f:[a,b]\to\Re$ в метрике квадратичного отклонения, такое что $dist = \| f-h_n \|_{\mathrm{C}^2[\mathrm{a,b}]} = \min\limits_{f_n \in S_n[a,b]} \| f - f_n \|_{\mathrm{C}^2[\mathrm{a,b}]}$. С учетом этого, расстояние оценивается как:

$$dist = \| f-h_n \|_{\mathrm{C}^2[\mathrm{a,b}]} = \sqrt{\int_a^b (f(x)-h_n(x))^2 dx} = \min_{f_n \in S_n[a,b]} \sqrt{\int_a^b (f(x)-f_n(x))^2 dx} = \min_{f_n \in S_n[a,b]} \| f - f_n \|_{\mathrm{C}^2[\mathrm{a,b}]}$$

Пусть $h_n(x) = c_k$ при $x \in (B_{k-1}, B_k)$ $k = \overline{1,n}$, функция $G(B_1,...,B_{n-1},C_1,...,C_n) = \sum_{k=1}^{n} \int_{B_{k-1}}^{B_k} (f(x) - c_k)^2 dx$ описывает квадрат отклонения (ошибки) функции $h_n : [a;b] \to \Re$ от функции $f : [a,b] \to \Re$ отклонения. Необходимое условие экстремума функции $G(B_1,...,B_{n-1},C_1,...,C_n)$ описывается системой уравнений:

$$G'_{B_i} = 0,\ i = \overline{1,n-1}\ ,\ G'_{C_j} = 0,\ j = \overline{1,n}\ ,$$

из которой следует:

$$\begin{cases} f(B_i) = \frac{1}{2}(C_i + C_{i+1}),\ i = \overline{1,n-1} \\ \int_{B_{j-1}}^{B_j} f(x)dx = C_j(B_j - B_{j-1}),\ j = \overline{1,n} \end{cases} \qquad (1)$$

Система (1) имеет 2n-1 уравнений и 2n-1 неизвестных $B_1, B_2,..., B_{n-1}, C_1, C_2,..., C_n$.

При квантовании необходимо приблизить функцию плотности нормального распределения $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ступенчатыми функциями, таким образом, чтобы ошибка этого приближения была минимально возможной. Условия $f \in C^2[a,b]$, $f'(x) < 0\ \forall x \in [a,b]$ гарантируют существование и единственность решения системы (1) для произвольного натурального n, а также наличие локального минимума для решения (1). Учитывая экспоненциальное убывание плотности нормального распределения к нулю, в качестве правого края отрезка установлено значение 3,3 в качестве левого края отрезка принималось нулевое значение.

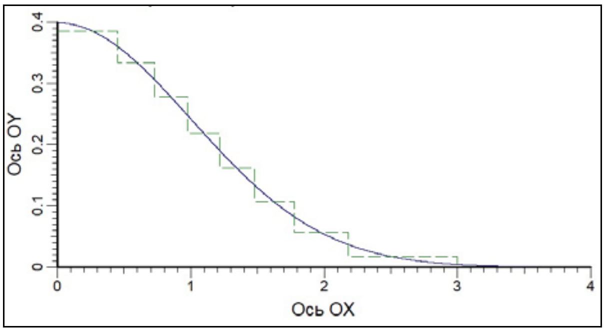
Для исследования рассмотренного алгоритма разработано программное обеспечения, которое позволяет получать пороговые уровни и ошибку приближения для различного числа n (табл. 1).

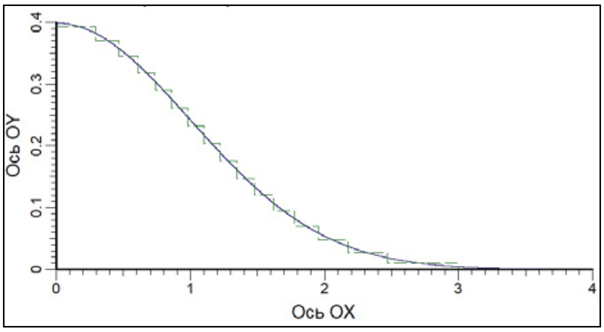
Таблица 1. – Результаты исследований ошибки квантования для различного количества уровней

n	8	16	32	64	128
G	5,13* 10^{-4}	1,53 * 10^{-4}	2,11* 10^{-5}	6,64* 10^{-6}	1,17* 10^{-9}
dist	2,27* 10^{-2}	1,24* 10^{-2}	4,59* 10^{-3}	2,58* 10^{-3}	3,42* 10^{-5}

На рисунке 1 представлен пример квантования функции плотности нормального распределения на основе предложенного подхода в метрике квадратичного отклонения для n = 8 и16.

Полученные значения пороговых уровней для n=16: 0; 0,294; 0,465; 0,607; 0,737; 0,859; 0,979; 1,099; 1,200; 1,345; 1,477; 1,619; 1,776; 1,956; 2,174; 2,465.





а) б)

Рисунок 1. – Результат квантования: а) для n = 8; б) для n = 16

Литература

1. Нестеров, И.М. Влияние сжатия данных на качество радиолокационных изображений / И.М. Нестеров // Журнал радиоэлектроники. – 2016. – № 8. – С. 1684–1719.
2. Богуш, Р.П. Моделирование сжатия радиолокационных данных дистанционного зондирования земли алгоритмом ECBAQ и представления восстановленных данных в формате CEOS / Р.П. Богуш, И.Ю. Захарова, Н.М. Наумович // Вестник Полоцкого государственного университета. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 21–27.
3. Пастухов, Ю.Ф. Необходимые условия в обратной вариационной задаче / Ю.Ф. Пастухов // Фундаментальная и прикладная математика. – 2001. – Т. 7, № 1. – С. 285–288.
4. Пастухов, Ю.Ф. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2015. – № 4. – С. 27–36.
5. Аппроксимация двойных и тройных интегралов в математической физике / О.В. Голубева [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2016. – № 4. – С. 119.
6. Об эффективном поиске безусловного экстремума гладких функционалов в конечномерных задачах / О.В. Голубева [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2016. – № 4. – С. 119.