Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

«Полоцкий государственный университет»

канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ,

канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ

СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Новополоцк
ПГУ
2018

УДК 514

Рецензенты:
А.А. Козлов, кандидат физико-математических наук, доцент,
Заведующий кафедрой Высшей математики
Полоцкого государственного университета

Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф.
Сборник статей по дифференциальной геометрии.
/Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов, - 1 - ое изд., - Новополоцк: ПГУ, 2018. - 74 с.

Материал сборника соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта по математике. В сборнике содержатся 4 статьи по дифференциальной геометрии применительно к разделам математики – методы оптимизации и уравнения математической физики, дифференциальные уравнения.

Для студентов университетов, педагогических вузов, а также для студентов технических вузов, преподавателей, инженеров, программистов использующих в своей практической деятельности геометрические подходы и методы.

Кафедра технологий программирования

Введение

Дифференциальная геометрия и топология представляют собой два смежных раздела математики, лежащих в основе ряда фундаментальных разделов современной теоретической физики: электродинамики, классической и квантовой теории калибровочных полей, физики конденсированного состояния, теории струн и суперструн, физике нелинейных процессов.

Возникновение дифференциальной геометрии принято относить к XVIII веку. Ее появление связано с именами выдающихся математиков того времени Эйлера и Монжа. Первое сводное сочинение по теории поверхностей была написано в 1795 году Монжем «Приложение анализа к геометрии».

В 1827 Гаусс опубликовал работу «Общее исследование о кривых поверхностях», в которой изложил основы теории поверхностей в её современном виде. С этого момента дифференциальная геометрия получила официальный статус самостоятельной отрасли математической науки.

Научно-исследовательские работы по дифференциальной геометрии К. Гаусса (1777-1855гг.), Г. Дарбу (1842-1917гг.), Л. Бианки (1856-1928гг.) и Л.Эйзенхарта (1876-1965гг.) были посвящены, главным образом, свойствам, проявляющимся локально, т.е. в малой окрестности точки многообразия.

Предмет этих исследований стал сутью так называемой дифференциальной геометрии «в малом». Начиная с 1930-х годов, исследования математиков были направлены, прежде всего, на изучение взаимосвязей между дифференциальной геометрией малых окрестностей и «глобальными» свойствами всего многообразия. Эта теорию получила название дифференциальной геометрией «в целом».

В1854 Б. Риман в лекции "О гипотезах, лежащих в основании геометрии" предложил новую, весьма плодотворную концепцию "многообразия" (см. *Риманово пространство*). Тем самым он положилначало *римановой геометрии*, являющейся важнейшей и наиболее разработанной частью дифференциальной геометрии.

Основная задача дифференциальной геометрии состоит в нахождении и описании дифференциальных инвариантов геометрических структур. Необходимым аппаратом здесь является исчисление струй. Это понятие интенсивно использовалось в теории геометрических структур высшего порядка в работах В.В.Вагнера, Г.Ф.Лаптева, Л.Е.Евтушика, М.О.Рахулы, а в последнее время в теории особенностей гладких отображений М.Голубицким, В.Гийеминым и геометрической теории нелинейных дифференциальных уравнений А.М.Виноградовым, В.В.Лычагиным.

Понятие дифференциального инварианта псевдогруппы было введено Софусом Ли в конце прошлого века. В неявной форме это понятие использовалось в большинстве работ по дифференциальной геометрии и дифференциальным уравнениям, В настоящее время интерес п дифференциальным инвариантам особенно возрос в связи с их использованием в квантовой теории поля, в проблемах геометрического квантования я в теории нелинейных дифференциальных уравнений (А.М.Виноградов, В.В.Лычагин, Л.В.Овсянников).

В предлагаемом сборнике рассматриваются геометрические свойства гамильтоновых и лагранжевых систем дифференциальных уравнений. Статьи написаны

Пастуховым Ю.Ф. Корректуру и проверку преобразований выполнил Пастухов Д.Ф.

УДК 514

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГАМИЛЬТОНА-ОСТРОГРАДСКОГО В РАССЛОЕНИЯХ СКОРОСТЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА.

Аннотация: В работе исследуются свойства преобразования М.В. Остроградского, индуцированного невырожденной функцией Лагранжа $L: T^n X_m \to \Re$. Доказан явный вид производной импульсов

k-ого порядка: $D_t p_i^k(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x}) = \dfrac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_i^{k-1}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k+1)}{x})$. где

$p_i^k(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\dfrac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$ $k=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}$-импульс k-ого порядка по i-ой координате.

Доказано обобщение теоремы М.В.Остроградского на случай невырожденных системы уравнений Эйлера-Лагранжа $\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l(\dfrac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}})=0$ произвольного порядка: невырожденная система уравнений $\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l(\dfrac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}})=0$ локально эквивалентна канонической системе уравнений Гамильтона:

$$\begin{cases} D_t(q_k^i) = \dot{q}_k^i = \dfrac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial p_k^i} \\ D_t(p_k^i) = \dot{p}_k^i = -\dfrac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial q_k^i} \end{cases}$$

$i=\overline{1,m}$ $k=\overline{1,n}$ (система $2mn$ уравнений)

где:

$$H(\bar{p},\bar{q}) = -L(\bar{x}(\bar{p},\bar{q}),\dot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}),\ddot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}),...,\overset{(n)}{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q})) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_k^i \overset{(k)i}{x}(\bar{p},\bar{q}) =$$

$$-L(\bar{x}(\bar{p},\bar{q}),\dot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}),\ddot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}),...,\overset{(n)}{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q})) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_k^i D_t^k x^i(\bar{p},\bar{q})$$

-энергия системы, состояние которой описывается системой уравнений Эйлера-Лагранжа $\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\right)=0$, D_t^l -l-кратное полное дифференцирование по t

Ключевые слова: *уравнения Эйлера-Лагранжа, гладкие многообразия, расслоенное пространство скоростей, энергия и импульс системы, преобразование Остроградского, невырожденная функция, теорема Остроградского, система уравнений Гамильтона.*

Введение

Гамильтон в 1835 году получил новую форму уравнений движения механических систем канонические уравнения Гамильтона.

В 1848 году М. В. Остроградский распространил принцип Гамильтона на случай систем с нестационарными голономными связями, после чего распространилось название принцип Гамильтона — Остроградского.

Полученная система канонических уравнений содержит вдвое больше дифференциальных уравнений, чем у Лагранжа, но зато все они первого порядка, (у Лагранжа — второго). Высоко отозвался о работах Гамильтона по динамике член-корреспондент

АН СССР Л. Н. Сретенский, отметивший: «Эти работы легли в основу всего развития аналитической механики в XIX веке». Аналогичное мнение выразил академик РАН В. В. Румянцев: «Оптико-механическая аналогия Гамильтона определила на столетие прогресс аналитической механики». По мнению профессора Л. С. Полака, это была «теория, почти не имеющая аналогов в механике по общности и абстрактности», открывшая колоссальные возможности в механике и смежных науках.

Академик В. И. Арнольд следующим образом охарактеризовал возможности, открывшиеся после появления гамильтоновой механики[1-4]. Гамильтонова точка зрения позволяет исследовать до конца ряда задач механики, не поддающихся решению иными средствами (например, задачу о притяжении двумя неподвижными центрами и задачи о геодезических на трехосном эллипсоиде). Еще большее значение гамильтонова точка зрения имеет для приближенных методов теории возмущений (небесная механика), для понимания общего характера движения в сложных механических системах (эргодическая теория, статистическая механика) и в связи с другими разделами математической физики (оптика, квантовая механика и т.п.)[5-11].

Подход Гамильтона оказался высоко эффективным во многих математических моделях физики. На этом плодотворном подходе основан, например, многотомный учебный курс «Теоретическая физика» Ландау и Лифшица. Первоначально вариационный принцип Гамильтона был сформулирован для задач механики, но при некоторых естественных предположениях из него выводятся уравнения Максвелла электромагнитного поля. С появлением теории относительности оказалось, что этот принцип строго выполняется и в релятивистской динамике. Его эвристическая сила существенно помогла разработке квантовой механики, а при создании общей теории относительности Давид Гильберт успешно применил гамильтонов принцип для вывода уравнений гравитационного поля (1915 год).Из сказанного следует, что принцип наименьшего действия Гамильтона(и естественным образом связанная с ним система канонических уравнений) занимает место среди коренных, базовых законов природы — наряду с законом сохранения энергии и законами термодинамики.

Основные определения и математические объекты.

Пусть X_m - гладкое многообразие размерности m , $T^n X_m$ - гладкое расслоенное пространство скоростей порядка n с базой расслоения X_m.

Определение 1. Гладкая функция $L: T^n X_m \to \Re$ называется (слабо) невырожденной в точке $v_x^n \in T^n X_m$, если в некоторой системе координат (x), базы расслоения X_m $T^n X_m$:

$$\det\left(\frac{\partial^2 L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x} \partial \overset{(n)i}{x}}\right) \neq 0$$

$$\varphi: U_{v_x^n} \to \Re^{(n+1)m}$$

$\varphi(v_x^n) = (x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x}) \in \Re^{(n+1)m}$-координатный гомеоморфизм, - локальная карта $v_x^n \in T^n X_m$

$L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})$-локальная запись функции $L: T^n X_m \to \Re$ в системе координат (x): $L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x}) = L(\varphi^{-1}(v_x^n))$.

Лемма 1. Определение невырожденности функции $L: T^n X_m \to \Re$ в точке $v_x^n \in T^n X_m$ корректно, то есть инвариантно относительно выбора локальной системы координат (x),базы X_m расслоения $T^n X_m$ [13]

Замечание. По теореме о неявной функции гладкая функция $L: T^n X_m \to \Re$, невырожденная в точке $v_x^n \in T^n X_m$ является невырожденной в некоторой окрестности $U(v_x^n)$

Определение 2. Гладкая функция $L: T^n X_m \to \Re$ называется невырожденной, если она не вырождена в каждой точке $v_x^n \in T^n X_m$.Невырожденную функцию $L: T^n X_m \to \Re$ будем называть также слабо невырожденной функцией.

Определение 3. Гладкая функция $L: T^n X_m \to \Re$, невырожденная в точке $v_x^n \in T^n X_m$,называется функцией Лагранжа (лагранжианом) в расслоении скоростей порядка n $T^n X_m$ невырожденной в точке $v_x^n \in T^n X_m$ или локально невырожденной и невырожденной (глобально), если $L: T^n X_m \to \Re$, невырождена в каждой точке $v_x^n \in T^n X_m$

Определение 4. $L: T^n X_m \to \Re$ – невырожденная функция Лагранжа

В локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$

Преобразование

$$p_1^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^i}\right) + \ldots + (-1)^{n-1} D_t^{n-1}\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(n)i}{x}}\right)$$

$$p_2^i = \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^i} - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial \dddot{x}^i}\right) + \ldots + (-1)^{n-2} D_t^{n-2}\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(n)i}{x}}\right)$$

...

$$p_n^i = \frac{\partial L}{\partial \overset{(n)i}{x}}$$

$$p_i^k(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \ldots, \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad k = \overline{1,n}, i = \overline{1,m}$$

Называется преобразованием Остроградского, а функции p_i^k называются импульсами k-ого порядка по i-ой координате.

Математическая постановка задачи. Ставится следующая задача:
Пусть - невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$.Является ли система уравнений Эйлера-Лагранжа $\sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \ldots, \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\right) = 0$ порядка n локально эквивалентна системе уравнений Гамильтона:

$$\begin{cases} D_t(q_k^i) = \dot{q}_k^i = \dfrac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial p_k^i} \\ \\ D_t(p_k^i) = \dot{p}_k^i = -\dfrac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial q_k^i} \end{cases}$$

$i = \overline{1,m}$ $\quad k = \overline{1,n}$ $\quad$ (система $2mn$ уравнений)

$$p = \bar{p} = (p_1^{j1}, p_2^{j1}, \ldots, p_n^{j1}) = (p_1^1 p_1^2 \ldots p_1^m, p_2^1 p_2^2 \ldots p_2^m, \ldots, p_n^1, \ldots, p_n^m) = (p_{l1}^{j1}) \qquad j1 = \overline{1,m} \quad l1 = \overline{1,n}$$

где:

$$H(\bar{p}, \bar{q}) = -L(\bar{x}(\bar{p}, \bar{q}), \dot{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q}), \ddot{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q}), \ldots, \overset{(n)}{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q})) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_k^i \overset{(k)i}{x}(\bar{p}, \bar{q}) =$$

$$- L(\bar{x}(\bar{p}, \bar{q}), \dot{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q}), \ddot{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q}), \ldots, \overset{(n)}{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q})) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_k^i D_t^k x^i(\bar{p}, \bar{q})$$

-функция Гамильтона (энергия системы)

Вывод 1.

Теорема2(дифференциальная связь импульсов k-ого и (k-1)-ого порядков). $L: T^n X_m \to \Re -$ невырожденная функция Лагранжа.

$p_i^k(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$ $k=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}$-импульс k-ого порядка по i-ой координате.

Тогда

$D_t p_i^k(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_i^{k-1}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k+1)}{x})$. Где

$$p_k^i = \sum_{l_1=0}^{n-k}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l_1+k-1)i}}\right)$$

импульс k-ого порядка

$$p_{k-1}^i = \sum_{l_1=0}^{n-k-1}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l_1+k-1)i}}\right)$$

импульс (k-1) –ого порядка

Доказательство.

$$D_t p_k^i = D_t\left(\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right)\right) = \sum_{l=0}^{n-k} D_t\left((-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right)\right) =$$

$$\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^{l+1}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right) = (-1)\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{l+1} D_t^{l+1}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right) =$$

$$(-1)\left(\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{l+1} D_t^{l+1}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+1+k-1)i}}\right)\right)$$

Выполняем замену $l_1 = l+1$: так как $l=\overline{0,n-k}$ то $l_1 = \overline{1,n-k+1}$.

Следовательно,

$$D_t p_k^i = (-1)(\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{l+1} D_t^{l+1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+1+k-1)i}})) =$$

$$(-1)(\sum_{l_1=1}^{n-k+1}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l_1+k-1)i}})) = (-1)(\sum_{l_1=1}^{n-(k-1)}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l_1+k-1)i}})) =$$

$$(-1)(\sum_{l_1=1}^{n-(k-1)}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l_1+(k-1))i}})) =$$

$$(-1)(\sum_{l_1=0}^{n-(k-1)}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l_1+(k-1))i}}) - (-1)^0 D_t^0(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+(k-1))i}})) =$$

$$= (-1)(p_{k-1}^i - \frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}) = -p_{k-1}^i + \frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}})$$

Так как, в общем случае по определению импульсов k-ого порядка,

$$p_k^i = \sum_{l_1=0}^{n-k}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l_1+k-1)i}})$$

и импульс (k-1) –ого порядка имеет вид:

$$p_{k-1}^i = \sum_{l_1=0}^{n-k-1}(-1)^{l_1} D_t^{l_1}(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l_1+k-1)i}})$$

теорема доказана.

Эта теорема будет использована при доказательстве обобщенной теоремы Гамильтона-Остроградского.

Определение 5. Функция

$$H(\bar{p},\bar{q}) = -L(\bar{x}(\bar{p},\bar{q}),\dot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}),\ddot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}),...,\overset{(n)}{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q})) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_k^i \overset{(k)i}{x}(\bar{p},\bar{q}) =$$

$$-L(\bar{x}(\bar{p},\bar{q}),\dot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}),\ddot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}),...,\overset{(n)}{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q})) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_k^i D_t^k x^i(\bar{p},\bar{q})$$

$\overset{(k)i}{x} = D_t^k x^i$, $D_t^k -$ оператор $k-$ кратного полного дифференцирования по времени t.

- называется гамильтонианом (функцией Гамильтона) этого преобразования для функции Лагранжа $L: T^n X_m \to \Re$ и называется также энергией системы, состояние которой описывается системой уравнений Эйлера-Лагранжа

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}) = 0 .$$

Теорема3. $L: T^n X_m \to \Re -$ невырожденная функция Лагранжа, тогда преобразование Остроградского, индуцированное $L,$ также является невырожденным.

Замечание. Слоевые координаты вектора $\overset{(k)i}{x} = D_t^k x_i, i = \overline{1,m}$ в $T^{2n-1}X_m$ могут быть названы по аналогии с физическими величинами координатами вектора скорости $k-$го порядка, $k = \overline{1,2n-1}$,(скорость в физике - скорость 1-ого порядка, ускорение в физике - скорость 2-ого порядка), а оператор $D_t^k -$ оператор $k-$ кратного полного дифференцирования по времени t.

Замечание Функционал в уравнении Эйлера-Лагранжа может быть интерпретирован как импульс 0-го порядка:

$$p_i^0(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n)}{x}) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}) \quad i = \overline{1,m})$$

а вектор импульса n-ого порядка имеет вид:

$$p_i^n(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x}) = \frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}$$

Определение 6. Гладкая функция $L: T^n X_m \to \Re$ называется сильно невырожденной в точке $v_x^n \in T^n X_m$, если в некоторой системе координат (x), базы расслоения X_m $T^n X_m$:

$\varphi: U_{v_x^n} \to \Re^{(n+1)m}$

$\varphi(v_x^n) = (x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x}) \in \Re^{(n+1)m}$ -координатный гомеоморфизм, - локальная карта $v_x^n \in T^n X_m$

$L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})$-локальная запись функции $L: T^n X_m \to \Re$ в системе координат (x):

$L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x}) = L(\varphi^{-1}(v_x^n))$

Уравнения

$$\begin{cases} q_k^i = \overset{(k-1)i}{x} \\ p_i^k(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}) \end{cases}$$

$k = \overline{1,n}, i = \overline{1,m}$

могут быть однозначно разрешены в виде $\overset{(l)^i}{x} = \overset{(l)^i}{x}(\bar{p}, \bar{q})$:

$$\begin{cases} x^i = x^i(\bar{p}, \bar{q}) \\ \dot{x}^i = \dot{x}^i(\bar{p}, \bar{q}) \\ ... \\ \overset{(2n-1)^i}{x} = \overset{(2n-1)^i}{x}(\bar{p}, \bar{q}) \end{cases}$$

$l = \overline{0,2n-1}, i = \overline{1,m}$

Лемма2. Определение сильной невырожденности функции $L: T^n X_m \to \Re$ в точке $v_x^n \in T^n X_m$ корректно, то есть инвариантно относительно выбора локальной системы координат (x), базы X_m расслоения $T^n X_m$ [12].

Лемма3. (связь свойств невырожденности и сильной невырожденности)
1)Локально сильно невырожденная функции $L: T^n X_m \to \Re$ в точке $v_x^n \in T^n X_m$ сильно невырождена.
2)Сильно невырожденная функция $L: T^n X_m \to \Re$ в карте $(U_{v_x^n}, \varphi)$

$\varphi: U_{v_x^n} \to \Re^{(n+1)m}$

$\varphi(v_x^n) = (x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x}) \in \Re^{(n+1)m}$ -координатный гомеоморфизм

$v_x^n \in T^n X_m$ является невырожденной в этой карте[12].

Определение 7. Гладкая функция $L: T^n X_m \to \Re$, невырожденная в точке $v_x^n \in T^n X_m$, называется функцией Лагранжа (лагранжианом) в расслоении скоростей порядка n $T^n X_m$ невырожденной в точке $v_x^n \in T^n X_m$ или локально невырожденной и невырожденной (глобально), если $L: T^n X_m \to \Re$, невырождена в каждой точке $v_x^n \in T^n X_m$

Теорема 4.(обобщение теоремы М.В.Остроградского)
Для не вырожденных лагранжианов $L: T^n X_m \to \Re$ система уравнений Эйлера-Лагранжа $\sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}} \right) = 0$ локально эквивалентна системе уравнений Гамильтона:

$$\begin{cases} D_t(q_k^i) = \dot{q}_k^i = \dfrac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial p_k^i} \\ D_t(p_k^i) = \dot{p}_k^i = -\dfrac{\partial H(\bar{p}, \bar{q})}{\partial q_k^i} \end{cases}$$

$i = \overline{1, m} \quad k = \overline{1, n}$ (система $2mn$ уравнений)

$$p = \bar{p} = (p_1^{j1}, p_2^{j1}, ..., p_n^{j1}) = (p_1^1 p_1^2 ... p_1^m, p_2^1 p_2^2 ... p_2^m, ..., p_n^1, ..., p_n^m) = (p_{l1}^{j1}) \qquad j1 = \overline{1, m} \quad l1 = \overline{1, n}$$

$$q = \bar{q} = (q_1^{j2}, q_2^{j2}, ..., q_n^{j2}) = (q_1^1 q_1^2 ... q_1^m, q_2^1 q_2^2 ... q_2^m, ..., q_n^1, ..., q_n^m) = (q_{l2}^{j2}) \qquad j2 = \overline{1, m} \quad l2 = \overline{1, n}$$

где:

$$H(\bar{p}, \bar{q}) = -L(\bar{x}(\bar{p}, \bar{q}), \dot{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q}), \ddot{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q}), ..., \overset{(n)}{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q})) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_k^i \overset{(k)i}{x}(\bar{p}, \bar{q}) =$$

$$-L(\bar{x}(\bar{p}, \bar{q}), \dot{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q}), \ddot{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q}), ..., \overset{(n)}{\bar{x}}(\bar{p}, \bar{q})) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_k^i D_t^k x^i(\bar{p}, \bar{q})$$

- функция Гамильтона

$\overset{(k)i}{x} = D_t^k(x^i)$, D_t^k - оператор $k-$кратного полного дифференцирования по переменной t

$p_i^k(\bar{x}, \dot{\bar{x}},..., \overset{(2n-k)}{\bar{x}}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$ $k=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}$ - импульс порядка к по i-ой координате. $x = \bar{x} = (x^1, x^2,..., x^m)$

Доказательство.
В случае n=1- это известный факт - теорема М.В.Остроградского, поэтому будем считать, что $n \geq 2$
Замечание. Из явного вида выражений для импульсов k-ого порядка
$p_i^k(x, \dot{x},..., \overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$ $k=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}$ следует, что p_i^k есть функции от $x, \dot{x}, \ddot{x},..., \overset{(2n-k)}{x}$ $\quad p_k^i = p_k^i(x, \dot{x}, \ddot{x},..., \overset{(2n-k)}{x})$ $\quad x = \bar{x} = (x^1, x^2,..., x^m)$ и не зависят от производных более высокого порядка. Кроме того из леммы 3 о локально сильной новорожденности слабо невырожденного лагранжиана (он назывался невырожденным) следует, что

$\overset{(l)j}{x} = D_t^l x^j(q_1, q_2,..., q_n, p_n,..., p_{2n-l}) = \overset{(l)j}{x}(q_1, q_2,..., q_n, p_n,..., p_{2n-l})$ $l = \overline{n, 2n-1}, j = \overline{1,m}$ то есть $\overset{(l)j}{x}$ есть функции от $q_1, q_2,..., q_n, p_n,..., p_{2n-l}$ $\quad q_\alpha = (q_\alpha^1, q_\alpha^2, ...q_\alpha^m) = (q_\alpha^i)$ $\quad \alpha = \overline{1,n}, i = \overline{1,m}$
$p_\beta = (p_\beta^1, p_\beta^2, ...p_\beta^m) = (p_\beta^j)$ $\quad \beta == \overline{n, 2n-1}, j = \overline{1,m}$

Имеем:

$$p = \bar{p} = (p_1^{j1}, p_2^{j1},..., p_n^{j1}) = (p_1^1 p_1^2 ... p_1^m, p_2^1 p_2^2 ... p_2^m,..., p_n^1,..., p_n^m) = (p_{l1}^{j1}) \qquad j1 = \overline{1,m} \quad l1 = \overline{1,n}$$

$$q = \bar{q} = (q_1^{j2}, q_2^{j2},..., q_n^{j2}) = (q_1^1 q_1^2 ... q_1^m, q_2^1 q_2^2 ... q_2^m,..., q_n^1,..., q_n^m) = (q_{l2}^{j2}) \qquad j2 = \overline{1,m} \quad l2 = \overline{1,n}$$

$$H(p,q) = -L(\bar{x}(\bar{p},\bar{q}), \dot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}), \ddot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}),..., \overset{(n)}{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q})) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_k^i \overset{(k)i}{x}(\bar{p},\bar{q}) =$$

$$-L(\bar{x}(\bar{p},\bar{q}), \dot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}), \ddot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}),..., \overset{(n)}{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q})) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_k^i D_t^k x^i(\bar{p},\bar{q})$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m} p_k^i q_{k+1}^i + \sum_{s=1}^{m} p_n^s \overset{(n)s}{x}(q_1, q_2,..., q_n, p_n) - L(q_1,..., q_n, \overset{(n)}{x}(q_1, q_2,..., q_n, p_n))$$

$\overset{(k_1)i}{x} = q^i_{k_1+1} \quad k_1 == \overline{0,n-1}$, то есть:

$\overset{(0)i}{x} = \overset{i}{x} = q^i_1 \quad i == \overline{1,m}$

$\overset{(k)i}{x} = q^i_{k+1} \quad k == \overline{1,n-1}$

$\overset{(n)i}{x} = \overset{(n)i}{x}(q_1,q_2,...,q_n,p_n) \quad k == \overline{1,n-1}$ Для $1 \le k \le n-1$:

Дифференцирование по p:

$$\frac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial p^i_k} = \frac{\partial}{\partial p^i_k}\Big(\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m} p^i_l q^i_{l+1} + \sum_{s=1}^{m} p^s_n \overset{(n)s}{x}(q_1,q_2,...,q_n,p_n) - L(q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,q_2,...,q_n,p_n))\Big) =$$

$$\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial p^i_l}{\partial p^i_k} q^i_{l+1} + p^i_l \frac{\partial q^i_{l+1}}{\partial p^i_k}\Big) + \frac{\partial}{\partial p^i_k}\Big(\sum_{s=1}^{m} p^s_n \overset{(n)s}{x}(q_1,q_2,...,q_n,p_n) - L(q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,q_2,...,q_n,p_n)\Big)$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial p^i_l}{\partial p^i_k} q^i_{l+1} + p^i_l \frac{\partial q^i_{l+1}}{\partial p^i_k}\Big) + \frac{\partial}{\partial p^i_k}\Big(\sum_{s=1}^{m} p^s_n \overset{(n)s}{x}(q_1,q_2,...,q_n,p_n) - L(q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,q_2,...,q_n,p_n)\Big)$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial p^i_l}{\partial p^i_k} q^i_{l+1}\Big) + \sum_{s=1}^{m} p^s_n \frac{\partial \overset{(n)s}{x}(q_1,q_2,...,q_n,p_n)}{\partial p^i_k} - \frac{\partial}{\partial p^i_k} L(q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,q_2,...,q_n,p_n)) =$$

$$\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}(\delta^l_k q^i_{l+1}) + \sum_{s=1}^{m} p^s_n \frac{\partial \overset{(n)s}{x}(q_1,q_2,...,q_n,p_n)}{\partial p^i_k} - \frac{\partial}{\partial p^i_k} L(q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,q_2,...,q_n,p_n)) =$$

$$= q^i_{k+1} + \sum_{s=1}^{m} p^s_n \frac{\partial \overset{(n)s}{x}(q_1,q_2,...,q_n,p_n)}{\partial p^i_k} - \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial L(q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n))}{\partial \overset{(n)s}{x}} \frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial p^i_k} =$$

$$= \overset{(k)i}{x} + \sum_{s=1}^{m} p^s_n \frac{\partial \overset{(n)s}{x}(q_1,q_2,...,q_n,p_n)}{\partial p^i_k} - \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial L(q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n))}{\partial \overset{(n)s}{x}} \frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial p^i_k}$$

$$\Big(p^s_n - \frac{\partial L}{\partial \overset{(n)s}{x}}\Big)\frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial p^i_n} + \overset{(k)i}{x} = \overset{(k)i}{x} = D_t \overset{(k-1)i}{x} = D_t q^i_k = \dot{q}^i_k$$

где $\delta^l_k = \begin{cases} 1, l = k \\ 0, l \ne k \end{cases} - символКронеккера$

Поскольку

$\overset{(k)i}{x} = q^i_{k+1} \quad k == \overline{1,n-1}$

$\overset{(k-1)i}{x} = D_t q^i_k$

$$p^s_n = \frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)s}{x}}$$

$s == \overline{1,m}$

$\overset{(n)}{x}(q, p_n) = \overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n, p_n)$

Для $k = n$:

$$\frac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial p_n^i} = \overset{(n)i}{x} + \sum_{s=1}^{m} p_n^s \frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial p_n^i}(q_1,...,q_n,p_n) - \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial L q_1,...,q_n, \overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n)}{\partial \overset{(n)s}{x}} \frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial p_n^i} =$$

$$= \overset{(n)i}{x} + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial p_n^i}(q_1,...,q_n,p_n)(p_n^s - \frac{\partial L q_1,...,q_n, \overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n)}{\partial \overset{(n)s}{x}}) =$$

$$\overset{(n)i}{x} = D_t \overset{(n-1)i}{x} = D_t q_n^i = \dot{q}_n^i$$

Дифференцирование по q:

для $n \ge k \ge 2$:

$$\frac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial q_k^i} = p_{k-1}^i + p_n^s \frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial q_k^i} - \frac{\partial L(q_1,...,q_n, \overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n))}{\partial q_k^i} - \frac{\partial L q_1,...,q_n, \overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n)}{\partial \overset{(n)s}{x}} \frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial q_k^i} =$$

$$= p_{k-1}^i + \sum_{s=1}^{m}(p_n^s - \frac{\partial L q_1,...,q_n, \overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n)}{\partial \overset{(n)s}{x}}) \frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial q_k^i} - \frac{\partial L}{\partial q_k^i} =$$

$$= p_{k-1}^i - \frac{\partial L(q_1,...,q_n, \overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n)}{\partial q_k^i}) = -D_t p_k^i = -\dot{p}_k^i$$

$p_n^s = \frac{\partial L(x, \dot{x},..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)s}{x}}$ и, значит, $p_n^s - \frac{\partial L(x, \dot{x},..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)s}{x}} = 0$

равенство $p_{k-1}^i - \frac{\partial L(q_1,...,q_n, \overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n)}{\partial q_k^i}) = -D_t p_k^i = -\dot{p}_k^i$ следует из ранее доказанной теоремы о дифференциальной связи импульсов k-ого и (k-1)-ого порядков:

$$D_t p_i^k(x, \dot{x},..., \overset{(2n-k)}{x}) = \frac{\partial L(x, \dot{x},..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_i^{k-1}(x, \dot{x},..., \overset{(2n-k+1)}{x} \qquad \text{для } n \ge k \ge 2:$$

доказано.

Для $k = 1$:

$$\frac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial q_1^i} = \sum_{s=1}^{m} p_n^s \frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial q_1^i} - \frac{\partial L(q_1,...,q_n, \overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n))}{\partial q_1^i} - \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial L(x, \dot{x},..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)s}{x}} \frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial q_1^i} =$$

$$= \sum_{s=1}^{m}(p_n^s - \frac{\partial L}{\partial \overset{(n)s}{x}}) \frac{\partial \overset{(n)s}{x}}{\partial q_1^i} - \frac{\partial L}{\partial q_1^i} = -\frac{\partial L}{\partial q_1^i} = -D_t p_1^i = -\dot{p}_1^i = p_0^i - \frac{\partial L}{\partial q_1^i} = 0 - \frac{\partial L}{\partial q_1^i} = -\frac{\partial L}{\partial q_1^i}$$

$$-D_t p_k^i = -\dot{p}_k^i = p_{k-1}^i - \frac{\partial L(q_1,...,q_n,\overset{(n)}{x}(q_1,...,q_n,p_n))}{\partial q_k^i}$$

$$p_0^i = \sum_{L=0}^{N}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(l)i}{x}}\right)$$

поскольку $p_n^s = \dfrac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)s}{x}}$ и $p_n^s - \dfrac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)s}{x}} = 0$

равенство $-\dot{p}_k^i = p_{k-1}^i - \dfrac{\partial L}{\partial q_k^i}$ теоремы о дифференциальной связи импульсов k-ого и (k-1)-ого порядков:

$$D_t p_i^k(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_i^{k-1}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k+1)}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial q_k^i} - p_i^{k-1}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k+1)}{x})$$

$$q_k^i = \overset{(k-1)i}{x},\ k = \overline{1,n}$$

Доказательство закончено.

Следствие (теорема Остроградского).

Пусть $L(x,\dot{x})$ - сильно невырожденный лагранжиан и $H(x,p)$ – гамильтониан, $p = \dfrac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}}$ $\dot{x} = \nu(x.p)$ Уравнение Эйлера-Лагранжа $\dfrac{\partial L}{\partial X} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$ эквивалентны уравнениям Гамильтона

$\dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}$ $\quad \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p}$ в фазовом пространстве (x,p)

Выводы.

Таким образом, в статье:

1)Доказан явный вид производной по времени импульсов p_k^i :

$$D_t p_i^k(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_i^{k-1}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k+1)}{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial q_k^i} - p_i^{k-1}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k+1)}{x})$$

$k = \overline{1,n}$

2)Доказано обобщение теоремы М.В.Остроградского на случай невырожденных системы уравнений Эйлера-Лагранжа $\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\dfrac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\right) = 0$ произвольного порядка: невырожденная система уравнений $\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\dfrac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\right) = 0$

локально эквивалентна системе уравнений Гамильтона:

$$\begin{cases} D_t(q_k^i) = \dot{q}_k^i = \dfrac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial p_k^i} \\ D_t(p_k^i) = \dot{p}_k^i = -\dfrac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial q_k^i} \end{cases}$$

$i = \overline{1,m}$ $\quad k = \overline{1,n}$ (система $2mn$ уравнений), где:

$$H(\bar{p},\bar{q}) = -L(\bar{x}(\bar{p},\bar{q}), \dot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}), \ddot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}),..., \overset{(n)}{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q})) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_k^i \overset{(k)i}{x}(\bar{p},\bar{q}) =$$

$$-L(\bar{x}(\bar{p},\bar{q}), \dot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}), \ddot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}),..., \overset{(n)}{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q})) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_k^i D_t^k x^i(\bar{p},\bar{q})$$

- функция Гамильтона.

THE GENERALIZATION of the THEOREM HAMILTON-OSTROGRADSKOGO in STRATIFICATIONS of the VELOCITIES of the FREE ORDER.

The Abstract: In work are researched characteristic of the Ostrogradski, generated unambiguous Lagrange function $L: T^n X_m \to \Re$.

Evident type derived pulse k order is proved:

$$D_t p_i^k(x, \dot{x},..., \overset{(2n-k)}{x}) = \frac{\partial L(x, \dot{x},..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_i^{k-1}(x, \dot{x},..., \overset{(2n-k+1)}{x}). \quad \text{where}$$

$$p_i^k(x, \dot{x},..., \overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad k = \overline{1,n}, i = \overline{1,m}\text{-}$$ a pulse k order on i coordinate.

The Proved generalization of Ostrogradsky-Hamilton theorem for unambiguous Lagrange function of the free order. Is Proved generalization of Ostrogradsky theorem on event unambiguous systems of the Euler- Lagrange equations

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\right) = 0$$ free order: unambiguous a system of the equations

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\right) = 0$$ the local equivalent canonical system of the equations Hamilton:

$$\begin{cases} D_t(q_k^i) = \dot{q}_k^i = \dfrac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial p_k^i} \\ D_t(p_k^i) = \dot{p}_k^i = -\dfrac{\partial H(\bar{p},\bar{q})}{\partial q_k^i} \end{cases}$$

$i=\overline{1,m}$ $k=\overline{1,n}$ $2mn$ the system of the equations where:

$$H(\bar{p},\bar{q}) = -L(\bar{x}(\bar{p},\bar{q}),\dot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}),\ddot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}),...,\overset{(n)}{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q})) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_k^i \overset{(k)i}{x}(\bar{p},\bar{q}) =$$

$$-L(\bar{x}(\bar{p},\bar{q}),\dot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}),\ddot{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q}),...,\overset{(n)}{\bar{x}}(\bar{p},\bar{q})) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_k^i D_t^k x^i(\bar{p},\bar{q})$$

- energy of the system condition which is described by system of the equations Eylera-Lagranzha

$\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\dfrac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l)i}{x}}\right) = 0$, D_t^l -l- multiple full differentiation on t

The Keywords: equations Euler-Lagrange, smooth of the variety, stratified space of the velocities ,energy and pulse of the system, of Ostrogradsky transformation, unambiguous function, Ostrogradsky theorem , system of the Hamilton equations.

Литература

1. В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко Современная геометрия. Методы и приложения, М.,1994,УРСС.
2. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.:Гостехиздат, 1956
3. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М.:Наука,1974.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.:Наука,1974.
5. Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика-М. Мир,1973.
6. Дирак П. Обобщенная гамильтонова динамика//Вариационные принципы механики. М.Физматгиз,1959.
7. Дирак П. Принципы квантовой механики-М.Мир, 1979.
8. Дирак П.Лекции по квантовой механики-М.Мир, 1968.
9. В.В.Трофимов, А.Т.Фоменко Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений. Издательство ”Факториал”, 1995.
10. Кобаяси Ш., Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии. Т.1,2-М.:Наука,1981.
11. Ю.Ф. Пастухов Исследование решения обратной вариационной задачи: автореф. дис. … канд. физ. – мат. наук/ Ю.Ф. Пастухов. – М., 1997.
12. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф., Голубева О.В. Инварианты в расслоении скоростей произвольного порядка. Вестник Полоцкого государственного университета Фундаментальные науки 2015№12

УДК 514

ЗАКОН ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБОБЩЕННОГО ИМПУЛЬСА.

Аннотация В работе введено понятие обобщенного импульса ранга n
$P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$,
$i = \overline{1,m},\ k = \overline{0,n}$, являющееся обобщением импульсов в преобразовании Остроградского
$F_L(x): T^{2n}X_m \to T^{2n}X_m$, индуцированного невырожденной функцией Лагранжа
$L: T^n X_m \to \Re$.
Исследован закон преобразования компонент импульсов порядка $k = \overline{0,n}$ ранга n при замене координат в базе X_m расслоения $T^n X_m$ - они преобразуются как тензоры типа (0,1) (ковекторы) .

$$\overline{p_k^i}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n-k)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m} p_k^j(n)(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_k^j(n)(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}$$

$k = \overline{0,n}\ ,\ i = \overline{1,m}$

Ключевые слова: уравнения Эйлера-Лагранжа, гладкие многообразия, расслоенное пространство скоростей, импульс системы, преобразование Остроградского, невырожденная функция

Введение.

Между основным уравнением динамики и законами сохранения имеется принципиальная разница. Законы динамики дают нам представление о детальном ходе процесса. Так, если задана сила, действующая на материальную точку и начальные условия, то можно найти закон движения, траекторию, величину и направление скорости в любой момент времени и т. п. Законы же сохранения не дают нам прямых указаний на то, как должен идти тот или иной процесс. Они говорят лишь о том, какие процессы запрещены и потому в природе не происходят.

Таким образом, законы сохранения проявляются как принципы запрета: любое явление, при котором не выполняется хотя бы один из законов сохранения, запрещено, и в природе такие явления никогда не наблюдаются. Всякое явление, при котором не нарушается ни один из законов сохранения, в принципе может происходить.

Рассмотрим следующий пример. Может ли покоящееся тело за счет внутренней энергии начать двигаться? Этот процесс не противоречит закону сохранения энергии. Нужно лишь, чтобы возникающая кинетическая энергия точно равнялась убыли внутренней энергии.

На самом деле такой процесс никогда не происходит, ибо он противоречит закону сохранения импульса. Раз тело покоилось, то его импульс был равен нулю. А если оно станет двигаться, то его импульс сам собой увеличится, что невозможно. Поэтому внутренняя энергия тела не может превратиться в кинетическую, если тело не распадётся на части.

Если же допустить возможность распада этого тела на части, то запрет, налагаемый законом сохранения импульса, снимается. При этом возникшие осколки могут двигаться так, чтобы их центр масс оставался в покое, – а только этого и требует закон сохранения импульса.

Поэтому, чтобы внутренняя энергия покоящегося тела могла превратиться в кинетическую, это тело должно распасться на части. Если же есть еще один какой-либо закон, запрещающий распад этого тела на части, то его внутренняя энергия и масса покоя будут постоянными величинами.

Фундаментальность законов сохранения заключается в их универсальности. Они справедливы при изучении любых физических процессов (механических, тепловых, электромагнитных и др.). Они одинаково применимы в релятивистском и нерелятивистском движении, в микромире, где справедливы квантовые представления, и в макромире, с его классическими представлениями. Дифференциально-геометрическое рассмотрение импульса-энергии в физической и математической постановке изложен в литературе [1-8,11]. Свойства тензора энергии-импульса при простейших линейных преобразованиях координат – времени объясняет законы сохранения импульса в макроскопической системе. Но тензор энергии-импульса в дифференциальной форме является инвариантным относительно произвольного невырожденного преобразования координат, что приводит к локальным законам сохранения энергии-импульса, например, в физике элементарных частиц. Функция Лагранжа определяет некоторую вариационную задачу, например, минимизацию интеграла действия в механической системе и динамику этой системы (уравнения Эйлера-Лагранжа)[6]. Если интегрант (подынтегральная функция в простейшей вариационной задаче) вырожден относительно переменных времени либо координат, то это вырождение приводит соответственно к закону сохранения энергии либо импульса относительно данной координаты[7]. Задача Лагранжа содержит также уравнения связи (ограничения на краевые условия неизвестной функции). Переменные в уравнениях связи могут содержать производные выше второго порядка по времени от координат. Эти производные неявно входят в функцию Лагранжа, зависящую от ограничений. Поэтому рассмотренная задача актуальна в робототехнике, где перемещение механизмов могут иметь старшие производные по времени. Данная работа является продолжением работы[9].

Основные определения и математические объекты.

Пусть X_m - гладкое многообразие размерности m , $T^n X_m$ - гладкое расслоенное пространство скоростей порядка n с базой расслоения X_m.

$L : T^n X_m \to \Re$-невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$. [9]

Определение 1. Пусть D_t^k - оператор $k-$кратного полного дифференцирования по переменной t

$$p_{k,n}^{i}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{l}D_{t}^{l}\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)\quad k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m},$$ а в любой другой системе локальных координат $x(\bar{x})$ в базе X_m,

$$\overline{p_{k}^{i}}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})=\sum_{j=1}^{m}p_{k}^{j}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^{i}(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{j}}=p_{k}^{j}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^{j}(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}} \text{ (свертка)}$$

$i,j=\overline{1,m}, 0\le k\le n$

называется преобразованием Остроградского, в расслоении скоростей $T^{2n}X_m$, а функции $p_{k}^{i}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})$ (зависят от производных координат не более $(2n-k)$ порядка - (нижний индекс-номер порядка импульса, нижний - номер координаты) называются импульсами порядка k по $i-$ой координате.

Обобщением этого определения является

Определение 2. Система функций $P_n=\{p_{k}^{i}(n)\}=\{p_{k,n}^{i}\}$

$$p_{k}^{i}(n)=p_{k,n}^{i}(x,\dot{x},...,\overset{(2\min(n,p)-k)}{x})=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{l}D_{t}^{l}\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)\quad k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m}$$

называется обобщенным импульсом ранга n для функции $L:T^{p}X_m\to\Re$, где $L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})$ - локальная запись функции L при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^{p}X_m$.

Функция $p_{k,n}^{i}(x,\dot{x},...,\overset{(2\min(n,p)-k)}{x})$ называются $k-ой$ компонентой обобщенного импульса P_n ранга n по $i-$ой координате или импульсами порядка k (k-импульсами) по $i-$ой координате обобщенного импульса P_n ранга n.

Замечание 1. Обобщенный импульс ранг n определен для функций $L:T^{p}X_m\to\Re$

Из определения $p_{k}^{i}(n)=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{l}D_{t}^{l}\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$ следует, что

при $k>p, l\ge 0\Rightarrow l+k>p\Rightarrow \frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\equiv 0$ и все $p_{k}^{i}(n)\equiv 0$ (тривиальные импульсы), то есть для нетривиальных импульсов $k\le p$. Поскольку $k\le n, k\le p\Rightarrow k\le\min(n,p)$, то в определении2 можно считать, что $k=\overline{0,\min(n,p)}, i=\overline{1,m}$

Максимальный порядок производной по t в $p_{k}^{i}(n)$ равен $l+k+k=2\cdot l+k$

При $l+k>p\Rightarrow \frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\equiv 0$ и коэффициент при производной $\overset{(l+k)i}{x}$ равен 0, значит, при определении максимального порядка производной по t можно считать $l+k\le p$, кроме того

$l\le n-k\Leftrightarrow l+k\le n\Rightarrow l+k\le\min(n,p)\Rightarrow l\le\min(n,p)-k\Rightarrow 2\cdot l+k\le 2\cdot(\min(n,p)-k)+k=$

$= 2\cdot\min(n,p) - 2\cdot k + k = 2\cdot\min(n,p) - k$

Хотя более грубая оценка порядка старшей производной по t в $p_k^i(n)$ дает

$l \le n-k \Leftrightarrow l+k \le n \Rightarrow 2\cdot l + k \le 2\cdot(n-k)+k = 2\cdot n - 2\cdot k + k = 2\cdot n - k$

При $p > n, l+k \le n-k+k = n$ и (максимальный порядок производной по t в $L(x,\dots,\overset{(p)}{x})$) больше максимального порядка производной по t переменной по которой производится частное дифференцирование

в $p_k^i(n) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$. При $p < n$, поскольку $l+k \le n-k+k = n$ при $l+k > p$

$\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и часть членов в сумме $\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$ будет тождественно равна 0. Пограничным является случай $p = n$, именно тот случай будет рассмотрен в дальнейшем без ограничения общности рассмотрения.

При $p = n$ в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$ получаем импульсы в преобразовании Остроградского:

$$p_{0,n}^i = \sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) = \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^i} - D_t\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \dot{x}^i}\right) + \dots + (-1)^n D_t^n\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}\right)$$

нуль-импульс (функционал в уравнении Эйлера-Лагранжа).

$$p_{1,n}^i = \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - D_t\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \ddot{x}^i}\right) + \dots + (-1)^{n-1} D_t^{n-1}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}\right)$$

$$p_{2,n}^i = \sum_{l=0}^{n-2}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) = \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \ddot{x}^i} - D_t\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \dddot{x}^i}\right) + \dots + (-1)^{n-2} D_t^{n-2}\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}\right)$$

...

$$p_{n,n}^i = \sum_{l=0}^{n-n}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) = \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}$$

Теорема 1. Пусть $\overline{x}^i = S^i(x_1,x_2,\dots,x_m)$ $S:(x)\to(\overline{x})$, -невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m, p = \max(s,l)$ $i = \overline{1,m}$, тогда

$$\frac{\partial x^{(l)i}(\overline{x},\dot{\overline{x}},\dots,\overset{(l)}{x})}{\partial \overset{(s)j}{x}} = \begin{cases} C_l^s \cdot D_t^{l-s}\left(\dfrac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j}\right), C_l^s = \dfrac{l!}{s!\cdot(l-s)!}, l! = \prod_{k=1}^{l} k, l \ge s \\ 0, l < s \end{cases}$$

Имеет место следующая

Теорема 2(о связи импульсов $k-ого$ порядка рангов n и $n+1$). Пусть $L: T^p X_m \to \Re$. $L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})$ - локальная запись функции $L: T^p X_m \to \Re$ при выборе локальных координат в базе расслоения X_m,

$$p_{k,n}^i = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(P)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big) \quad k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m}$$ -импульс k-ого порядка ранга n

$$p_{k,n+1}^i = \sum_{l=0}^{n+1-k} (-1)^l D_t^l \Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(P)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)$$ - импульс k-ого порядка ранга n +1

Тогда имеет место следующее соотношение:

$$p_{k,n+1}^i = p_{k,n}^i + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} \Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)$$

Доказательство:

$$p_{k,n+1}^i = \sum_{l=0}^{n+1-k} (-1)^l D_t^l \Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big) + (-1)^{n+1-k} D_t^l \Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1-k+k)i}{x}}\Big) =$$

$$\sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big) + (-1)^{n+1-k} D_t^l \Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big) = p_{k,n}^i + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k} \Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)$$

Теорема доказана.

Математическая постановка задачи. Ставится следующая задача:
Пусть $L : T^n X_m \to \Re$ - функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$. Исследовать закон преобразования Компонент обобщенного импульса P_n ранга n при замене локальной системы координат

$$x = x(\bar{x})$$

в базе X_m расслоения скоростей $T^n X_m$.

Теорема 3(закон преобразования импульсов при замене системы координат в базе X_m расслоения $T^{2n} X_m$).

При замене $(\bar{x}) \to (x(\bar{x}))$: в базе многообразия X_m расслоения $T^{2n} X_m$

$\overline{p_k^i}(n)(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \overset{(2n-k)}{\bar{x}})$ преобразуются как **тензоры** типа (0,1) (ковекторы):

$$\overline{p_k^i}(n)(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \overset{(2n-k)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{n} p_k^j(n)(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_k^j(n)(x, \dot{x}, \dots, \overset{(2n-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}$$

$k = 0, n \quad i, j = \overline{1, m}$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по рангу обобщенного импульса n.

База индукции n=1.

$$\boldsymbol{x = (x^1, x^2, \dots, x^m), \bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^m)}$$

$$L(x, \dot{x}) = L(x, D_t x)$$

$$\bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = \bar{L}(\bar{x}, D_t \bar{x}) = L(x(\bar{x}), \dot{x}(\bar{x})) = L(x(\bar{x}), D_t(x(\bar{x})))$$

Для импульса 0-ого порядка(0-импульса) 1-ого ранга в локальных координатах имеем:

$$\bar p^{\,i}_{0,1} = \sum_{l=0}^{1-0} (-1)^l D_t^l \Big(\frac{\partial L(\bar x,\dot{\bar x})}{\partial \overset{(l+0)i}{x}}\Big) = -D\Big(\frac{\partial L(\bar x,\dot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^i}\Big) + \frac{\partial L(\bar x,\dot{\bar x})}{\partial \bar x^i} =$$

$$= \sum_{s=1}^{m} - D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\cdot\frac{\partial \dot x^s}{\partial \dot{\bar x}^i} + \frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial \dot{\bar x}^i}\Big) + \sum_{s=1}^{m}\Big(\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\cdot\frac{\partial \dot x^s}{\partial \bar x^i} + \frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial \bar x^i}\Big) =$$

$$= \sum_{s=1}^{m} - D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\cdot\frac{\partial \dot x^s}{\partial \dot{\bar x}^i}\Big) + \sum_{s=1}^{m} - D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial \dot{\bar x}^i}\Big) + \sum_{s=1}^{m}\Big(\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\cdot\frac{\partial \dot x^s}{\partial \bar x^i} + \frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial \bar x^i}\Big) =$$

$$-\sum_{s=1}^{m} D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\cdot\frac{\partial \dot x^s}{\partial \dot{\bar x}^i}\Big) - \sum_{s=1}^{m} D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial \dot{\bar x}^i}\Big) + \sum_{s=1}^{m}\Big(\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\cdot\frac{\partial \dot x^s}{\partial \bar x^i} + \frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial \bar x^i}\Big)$$

поскольку $\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial \dot{\bar x}^i} = 0$ по ранее доказанной **теореме 1** $\frac{\partial x^s}{\partial \dot{\bar x}^i} = \frac{\partial D_t^0 x^s}{\partial D_t^1 \bar x^i} = \frac{\partial \overset{(0)s}{x}}{\partial \overset{(1)i}{\bar x}} = 0$ и $0<1$

(это и понятно, так как x^s не зависит от $\dot{\bar x}^i$), продолжая преобразование:

$$-\sum_{s=1}^{m} D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\cdot\frac{\partial \dot x^s(\bar x)}{\partial \dot{\bar x}^i}\Big) - \sum_{s=1}^{m} D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \dot{\bar x}^i}\Big) + \sum_{s=1}^{m}\Big(\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\cdot\frac{\partial \dot x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i} + \frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}\Big) =$$

$$= \sum_{s=1}^{m} - D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\cdot\frac{\partial \dot x^s(\bar x)}{\partial \dot{\bar x}^i}\Big) + \sum_{s=1}^{m}\Big(\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\cdot\frac{\partial \dot x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i} + \frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i}\Big) =$$

$$= \sum_{s=1}^{m} - D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\cdot\frac{\partial \dot x^s(\bar x)}{\partial \dot{\bar x}^i}\Big) + \sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^s}\cdot\frac{\partial \dot x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i} + \sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i} =$$

Так как

$$\frac{\partial \dot x^s(\bar x)}{\partial \dot{\bar x}^i} = \frac{\partial \dot x^s(\bar x)}{\partial \dot{\bar x}^i} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial \dot{\bar x}^i}\Big(\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^k}\cdot\dot{\bar x}^k\Big) = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^k}\cdot\frac{\partial \dot{\bar x}^k}{\partial \dot{\bar x}^i} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^k}\cdot\delta_i^k = \frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i} = \frac{\partial x^s}{\partial \bar x^i},$$

где

$$\delta_i^k = \begin{cases}1, i=k\\ 0, i\neq k\end{cases} - \textit{символ Кронеккера}$$ и

(этот результат следует также из **теоремы 1**:

$$\frac{\partial \dot x^s(\bar x)}{\partial \dot{\bar x}^i} = \frac{\partial \overset{(1)s}{x}}{\partial \overset{(1)i}{\bar x}} = C_1^1\cdot D_t^{1-1}\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i} = 1\cdot D_t^0\cdot\frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i} = \frac{\partial x^s(\bar x)}{\partial \bar x^i})$$

$$\frac{\partial \dot{x}^s}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}(D_t x^s(\bar{x})) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}(\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\cdot D_t \bar{x}^k) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}(\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\cdot \dot{\bar{x}}^k) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k}\cdot \dot{\bar{x}}^k$$

$$D_t(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}(x^s(\bar{x}))) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k}\cdot \dot{\bar{x}}^k = D_t(\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}) = \frac{\partial \dot{x}^s}{\partial \bar{x}^i} .$$

Этот результат следует и из **теоремы 1**:

$$\frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \overset{(1)s}{x}}{\partial \overset{(0)i}{\bar{x}}} = C_1^0 \cdot D_t^{1-0}\cdot \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = 1\cdot D_t^1 \cdot \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = D_t \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}$$

Далее

$$\sum_{s=1}^m - D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\cdot \frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}) + \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\cdot \frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} + \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} =$$

$$= \sum_{s=1}^m - D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s})\cdot \frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \dot{\bar{x}}^i} - \sum_{s=1}^m D_t(\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i})\cdot \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s} + \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\cdot \frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} + \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} =$$

$$= \sum_{s=1}^m - D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s})\cdot \frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \dot{\bar{x}}^i} - \sum_{s=1}^m D_t(\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i})\cdot \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s} +$$

$$+ \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\cdot D_t(\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}) + \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} =$$

$$= \sum_{s=1}^m - D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s})\cdot \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} + \sum_{s=1}^m \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = \sum_{s=1}^m (-D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}) + \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s})\cdot \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} =$$

$$= \sum_{s=1}^m p_{0,1}^s \cdot \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = p_{0,1}^s \cdot \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}$$

Так как $p_{0,1}^s = \sum_{l=0}^{1-0} (-1)^l D_t^l (\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \overset{(l+s)i}{x}}) = -D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}) + \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}$

Утверждение теоремы доказано для импульса 0-го порядка(0-импульса) 1-ого ранга.

Для импульса 1-ого порядка(1-импульса) 1-ого ранга в локальных координатах имеем:

$$\bar{p}_{1,1}^i = \sum_{l=0}^{1-1} (-1)^l D_t^l (\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+1)i}{\bar{x}}}) = (\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{x}}^i}) = \sum_{s=1}^m (\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\cdot \frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \dot{\bar{x}}^i} + \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot \frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}) =$$

$$=\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\cdot\frac{\partial \dot{x}^s}{\partial \dot{\bar{x}}^i}+\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}.$$

(1)

Второе слагаемое в формуле (1) $\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}=0$, что следует из **теоремы 1**:

$$\frac{\partial x^s}{\partial \dot{\bar{x}}^i}=\frac{\partial D_t^0 x^s(\bar{x})}{\partial D_t^1 \bar{x}^i}=\frac{\partial \overset{(0)s}{x}(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{(1)i}}=\delta_1^0\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=0 ,$$

из-за того, что $l=0<1=s$ в **теореме 1**(иначе - x^s не зависит от $\dot{\bar{x}}^i$).

Для первого слагаемого в формуле (1)(по **теореме1**):

$$\frac{\partial \dot{x}^s}{\partial \dot{\bar{x}}^i}=\frac{\partial \overset{(1)s}{x}}{\partial \overset{(1)i}{\bar{x}}}=C_1^1\cdot D_t^{1-1}\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=1\cdot D_t^0\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}$$

, то упрощая (1),имеем:

$$\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\cdot\frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}+\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}=\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\cdot\frac{\partial \dot{x}^s(\bar{x})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}=$$

$$=\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^s}\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=\sum_{s=1}^{m}p_1^s\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=p_1^s\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}$$

Утверждение теоремы доказано для импульса 1-го порядка(1-импульса) 1-ого ранга. Таким образом, база индукции доказана.

Индуктивный переход.

Пусть утверждение верно для n и для любой $L:T^nX_m\to\Re$

$$\bar{p}_0^{\,i}(n)=\bar{p}_{i,0}^{\,i}=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+0)i}{\bar{x}}}\Big)=\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+0)j}{x}}\Big)\Big)\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}p_0^j(n)\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=p_0^j(n)\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=\sum_{l=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}\sum_{k=1}^{m}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(s)k}{x}}\frac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)\quad 1\le i\le m$$

(2)

Правая часть в (2) написана на основании теоремы о производной сложной функции:

$$\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+0)i}{\bar{x}}}=\sum_{s=0}^{n}\sum_{k=1}^{m}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(s)k}{x}}\frac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)$$

Нужно доказать, что:

$$\bar{p}_0^{\,i}(n+1)=\bar{p}_{0,n+1}^{\,i}=\sum_{l=0}^{n+1-0}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}},\overset{(n+1)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+0)i}{\bar{x}}}\Big)=\sum_{s=1}^{m}\Big(\sum_{l=0}^{n+1-0}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(l+0)s}{x}}\Big)\Big)\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=$$

$$=\sum_{s=1}^{m} p_0^s(n+1)\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} = p_0^s(n+1)\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}$$

По теореме о производной сложной функции:

$$\frac{\partial L(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}},\overset{(n+1)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{s=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(s)k}{x}}\frac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}$$

$$\bar{p}_0^{\,i}(n+1)=\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}},\overset{(n+1)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\frac{\partial \overset{(n+1)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n+1}\sum_{s=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(s)k}{x}}\frac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\frac{\partial \overset{(n+1)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(s)k}{x}}\frac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)+\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n+1} D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(s)k}{x}}\frac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{\bar{x}}}\Big)= \quad (3)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\frac{\partial \overset{(n+1)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(s)k}{x}}\frac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big) \quad (4)$$

Последнее слагаемое в (3) равно 0 по **теореме 1:** $\dfrac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{\bar{x}}}=0\,при\;\; 0\le s\le n<n+1$

Учитывая равенство (2) , по предположению индукции последнее слагаемое в сумме (4) равно:

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(s)k}{x}}\frac{\partial \overset{(s)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)=\sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(l)j}{x}}\Big)\Big)\cdot\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} \quad (5)$$

По **теореме 1:** $\dfrac{\partial \overset{(n+1)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}=C_{n+1}^l D_t^{n+1-l}\Big(\dfrac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)$ (6)

Учитывая (6) ,преобразуем первое слагаемое в сумме (4), используя формулу Лейбница производной порядка l произведения двух функций f,g:

$$D_t^l(fg)=\sum_{p=0}^{l}C_l^p D_t^p(f)D_t^{l-p}(g)\;\;,C_l^p=\frac{l!}{p!(l-p)!},l!=\prod_{k=1}^{l}k:$$

$$\sum_{l=0}^{n+1}\sum_{k=1}^{m}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\frac{\partial \overset{(n+1)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)=\sum_{l=0}^{n+1}\sum_{k=1}^{m}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}C_{n+1}^l D_t^{n+1-l}\Big(\frac{\partial \overset{(n+1)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)\Big)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^l C_{n+1}^l\sum_{p=0}^{l}C_l^p D_t^p\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big)D_t^{l-p}D_t^{n+1-l}\Big(\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)\Big)=$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^l C_{n+1}^{l}\sum_{p=0}^{l} C_l^p D_t^p \Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big) D_t^{n+1-p}\Big(\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)) =$$

$$\overset{(7)}{=} \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=0}^{n+1} D_t^p \Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big) D_t^{n+1-p}\Big(\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)\sum_{l=p}^{n+1}(-1)^l C_{n+1}^{l} C_l^p =$$

$$C_{n+1}^{l} C_l^p = \frac{(n+1)!}{l!(n+1-l)!}\,\frac{l!}{p!(l-p!)} = \frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!}\,\frac{(n+1-p)!}{(l-p)!(n+1-p-(l-p))!} = C_{n+1}^{p} C_{n+1-p}^{l-p} \qquad (8)$$

Введем новую переменную $m = l - p$ и преобразуем последнюю сумму в (7) с учетом соотношения (8):

$$\sum_{l=p}^{n+1}(-1)^l C_{n+1}^{l} C_l^p = \sum_{l=p}^{n+1}(-1)^l C_{n+1}^{p} C_{n+1-p}^{l-p} = \sum_{m=0}^{n+1-p}(-1)^{m+p} C_{n+1}^{p} C_{n+1-p}^{m} = (-1)^p C_{n+1}^{p}\sum_{m=0}^{n+1-p}(-1)^m C_{n+1-p}^{m} \qquad (9)$$

При $p = n+1$ преобразуем (9):

$$(-1)^p C_{n+1}^{p}\sum_{m=0}^{n+1-p}(-1)^m C_{n+1-p}^{m} = (-1)^{n+1} C_{n+1}^{n+1}\sum_{m=0}^{n+1-(n+1)}(-1)^m C_{n+1-(n+1)}^{m} = (-1)^{n+1}$$

При $p < n+1$ сумма в (9) равна:

$$(-1)^p C_{n+1}^{p}\sum_{m=0}^{n+1-p}(-1)^m C_{n+1-p}^{m} = (-1)^p C_{n+1}^{p}\sum_{m=0}^{n+1-p} C_{n+1-p}^{m}(-1)^m 1^{n+1-p-m} = (-1)^p C_{n+1}^{p}(1+(-1))^{n+1-p} = 0$$

То есть:

$$\sum_{l=p}^{n+1}(-1)^l C_{n+1}^{l} C_l^p = \begin{cases}(-1)^{n+1}, & p = n+1\\ 0, & p < n+1\end{cases} = (-1)^{n+1}\delta_{n+1}^{p},\ \delta_{n+1}^{p} = \begin{cases}1, & p = n+1\\ 0, & p < n+1\end{cases} - \textit{символ Кронекера} \qquad (10)$$

Заменяем последнюю сумму $\sum_{l=p}^{n+1}(-1)^l C_{n+1}^{l} C_l^p$ в (6) полученным выражением в (10):

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=0}^{n+1} D_t^p \Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big) D_t^{n+1-p}\Big(\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)\sum_{l=p}^{n+1}(-1)^l C_{n+1}^{l} C_l^p = \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=0}^{n+1} D_t^p \Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big) D_t^{n+1-p}\Big(\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)(-1)^{n+1}\delta_{n+1}^{p} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=0}^{n+1} D_t^p \Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big) D_t^{n+1-p}\Big(\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)(-1)^{n+1}\delta_{n+1}^{p} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big) D_t^{n+1-(n+1)}\Big(\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)(-1)^{n+1}\delta_{n+1}^{n+1} = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{n+1} D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big)\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}$$

Таким образом, доказано равенство:

$$\sum_{l=0}^{n+1}\sum_{k=1}^{m}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\,\frac{\partial \overset{(n+1)k}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big) = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{n+1} D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)k}{x}}\Big)\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} \qquad (11)$$

Подставляя полученный в (11) результат в (4) и учитывая (5), получим:

$$\bar{p}_0^{\,i}(n+1)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)k}{x}}\frac{\partial\overset{(n+1)k}{x}(\bar{x})}{\partial\overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(s)k}{x}}\frac{\partial\overset{(s)k}{x}(\bar{x})}{\partial\overset{(l)i}{\bar{x}}}\Big)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{n+1}D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)k}{x}}\Big)\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial\bar{x}^i}+\sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(l)j}{x}}\Big)\Big)\cdot\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial\bar{x}^i}=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(l)s}{x}}\Big)+(-1)^{n+1}D_t^{n+1}\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)k}{x}}\Big)\Big)\cdot\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial\bar{x}^i}=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(l)s}{x}}\Big)\Big)\cdot\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial\bar{x}^i}=\sum_{k=1}^{m}p_0^k(n+1)\cdot\frac{\partial x^s(\bar{x})}{\partial\bar{x}^i}$$

Индуктивный переход для импульсов $0-ого$ порядка ранга n доказан.

Для импульсов $\bar{p}^{\,i}_{n+1,n+1}$ порядка $(n+1)$ ранга $(n+1)$ имеем:

$$\bar{p}^{\,i}_{n+1,n+1}=\sum_{l=0}^{n+1-(n+1)}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n+1)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(l+n+1)i}{\bar{x}}}\Big)=\sum_{l=0}^{0}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n+1)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(l+n+1)i}{\bar{x}}}\Big)=$$

$$=(-1)^0 D_t^l\Big(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n+1)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(0+n+1)i}{\bar{x}}}\Big)=\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n+1)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(n+1)i}{\bar{x}}}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(p)j}{x}}\cdot\frac{\partial\overset{(p)j}{x}}{\partial\overset{(n+1)i}{\bar{x}}})=$$

(12)

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(p)j}{x}}\cdot\delta^p_{n+1}\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial\bar{x}^{i}})=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial\overset{(n+1)j}{x}}\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial\bar{x}^{i}}=\sum_{j=1}^{m}p^j_{n+1,n+1}\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial\bar{x}^{i}}$$

Так как в (12) $\dfrac{\partial\overset{(p)j}{x}}{\partial\overset{(n+1)i}{\bar{x}}}\equiv 0$ для $0\le p\le n$, а для $p=n+1$ (по **теореме 1):**

$$\frac{\partial\overset{(n+1)j}{x}}{\partial\overset{(n+1)i}{\bar{x}}}=C^{n+1}_{n+1}\cdot D_t^{n+1-(n+1)}\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial\bar{x}^{i}}=D_t^0\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial\bar{x}^{i}}=\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial\bar{x}^{i}}$$

То есть $\dfrac{\partial\overset{(p)j}{x}}{\partial\overset{(n+1)i}{\bar{x}}}=\begin{cases}0, 0\le p\le n\\ \dfrac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial\bar{x}^{i}}, p=n+1\end{cases}=\delta^p_{n+1}\cdot\dfrac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial\bar{x}^{i}}$,

$\delta_i^k=\begin{cases}1, i=k\\ 0, i\ne k\end{cases}-$ *символ Кронеккера*

Индуктивный переход для импульсов $n-ого$ порядка ранга n доказан.
Теорема доказана.
Из замечания 1 в начале работы следует

Теорема 4. Если $(\bar{x}) \to (x(\bar{x}))$ - любая невырожденная замена координат в базе многообразия X_m расслоения $T^{2n}X_m$ для функции $L:T^pX_m \to \Re$,тогда компоненты обобщенного импульса ранга $n \geq p$ порядка $k = \overline{0,n}$

$\overline{p_k^i(n)}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2p-k)}{\bar{x}}), i=\overline{1,m}$ преобразуются как **тензоры** типа (0,1) (ковекторы)

$$\overline{p_k^i}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2p-k)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{n} p_k^j(n)(x,\dot{x},...,\overset{(2p-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_k^j(n)(x,\dot{x},...,\overset{(2p-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}$$

$k = \overline{0,n} \quad ,i=\overline{1,m}$

Из **теоремы 4** следует корректность определения 2

Теорема5(корректность Определения 2). Обобщенный импульс ранга $n: P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad k=\overline{0,n} \quad ,i=\overline{1,m}$$

не зависит от выбора локальных координат (x) в базе X_m расслоения T^pX_m $n \geq p$ (*обобщенный импульс порядка* $k=\overline{0,n}$ ранга n *является геометрическим инвариантом*).

Замечание 2. Пусть $L:T^pX_m \to \Re$. При $p > n$ импульсы порядка $k=\overline{0,n}$ ранга n ,вообще говоря, тензорами не являются. Для примера рассмотрим закон преобразования импульсов $0-ого и 1-ого$

порядков ранга 1 : $\quad \bar{p}_k^{\,i}(n) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(p)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+k)i}{\bar{x}}}\right)$

По **теореме 1:**

$$\frac{\partial \overset{(k)j}{x}}{\partial \bar{x}^i} = C_k^0 D_t^k\left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\right), \quad \frac{\partial \overset{(k)j}{x}}{\partial \dot{\bar{x}}^i} = \begin{cases} C_k^1 D_t^{k-1}\left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\right), \textit{при } k \geq 1 \\ 0\ , \ \textit{при } k=0 \end{cases}$$

$$\bar{p}_0^{\,i}(1) = \sum_{l=0}^{1-0}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(p)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+0)i}{\bar{x}}}\right) = -D_t\left(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(p)}{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}\right) + \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(p)}{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^i} = -D_t\left(\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\frac{\partial \overset{(k)j}{x}}{\partial \dot{\bar{x}}^i}\right) +$$

$$+\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\frac{\partial \overset{(k)j}{x}}{\partial \bar{x}^i} = -\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} D_t\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\right) C_k^1 D_t^{k-1}\left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\right) -$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} C_k^1 D_t\left(D_t^{k-1}\left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\right)\right) + \sum_{k=0}^{p}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} C_k^0 D_t^k\left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\right) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} D_t\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\right) C_k^1 D_t^{k-1}\left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\right) -$$

$$
-\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}C_k^1 D_t^k\Big(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)+\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}C_k^0 D_t^k\Big(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)=
$$

$$
=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^j}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}D_t^k\Big(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)(-C_k^1+C_k^0)-
$$

$$
-\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}D_t\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\Big)C_k^1 D_t^{k-1}\Big(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big) \tag{13}
$$

Видно, что при $p=1$ выражение (13) является тензором:

$$
\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^j}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}-\sum_{j=1}^{m}D_t\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(p)}{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}\Big)\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}=\sum_{j=1}^{m}\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^j}-D_t\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(p)}{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}\Big)\Big)\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}
$$

,а при $p>1$ выражение (13)) тензорным преобразованием не является: будут члены с ненулевой производной $D_t^{p-1}\Big(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)$ и $-C_k^1+C_k^0\neq 0$ *при* $p>1$

$$
\bar{p}_1^i(1)=\sum_{l=0}^{1-1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(p)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+1)i}{\bar{x}}}\Big)=\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(p)}{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}=\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}\frac{\partial \overset{(k)j}{x}}{\partial \dot{\bar{x}}^i}=
$$

$$
=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}C_k^1 D_t^{k-1}\Big(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big) \tag{14}
$$

И в этом случае при $p>1$ выражение (14) тензорным преобразованием не является: будут члены с ненулевой производной $D_t^{p-1}\Big(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\Big)$

Замечание 3. Пусть $L:T^nX_m\to\Re$. $(p=n)$ импульсы порядка $0<k<n$ ранга n, вообще говоря, тензорами не являются. Для примера рассмотрим закон преобразования импульсов $1-ого$

порядка ранга 2: $\bar{p}_k^i(n)=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+k)i}{\bar{x}}}\Big)$

$$
\bar{p}_1^i(2)=\bar{p}_{1,2}^i=\sum_{l=0}^{2-1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\ddot{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+1)i}{\bar{x}}}\Big)=D_t^0\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^i}\Big)-D_t^1\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \ddot{\bar{x}}^i}\Big)=
$$

$$
=\sum_{k=1}^{m}\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^k}\frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \dot{\bar{x}}^i}+\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k}\frac{\partial \ddot{x}^k}{\partial \dot{\bar{x}}^i}\Big)-\sum_{k=1}^{m}D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k}\frac{\partial \ddot{x}^k}{\partial \ddot{\bar{x}}^i}\Big)=
$$

$$
=\sum_{k=1}^{m}\Big(\frac{L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^k}C_1^1 D_t^{1-1}\Big(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\Big)+\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k}C_2^1 D_t^{2-1}\Big(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\Big)\Big)-\sum_{k=1}^{m}D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k}C_2^2 D_t^{2-2}\Big(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\Big)\Big)=
$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} + \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} C_2^1 D_t^1 \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right)\right) - \sum_{k=1}^{m} D_t \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} + \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} C_2^1 D_t^1 \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right)\right) - \sum_{k=1}^{m} \left(D_t \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} \right) \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} + \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} D_t \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \right) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^k} - D_t \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} \right) \right) \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \quad + \quad \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^k} D_t \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \right) (C_2^1 - 1) \qquad (15)$$

Для первой суммы в (15) выполнен тензорный закон преобразования, а для второй - нет. Поэтому   - не является тензором.

Литература

1. В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко Современная геометрия. Методы и приложения, М.,1994,УРСС.
2. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.:Гостехиздат, 1956
3. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М.:Наука,1974.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.:Наука,1974.

5 Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц Теория поля. -М.:Наука.1973.507с.

6. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц Механика. - М.:Наука.1973.507с.
7. Э. М. Галеев, В.М.Тихомиров Краткий курс теории экстремальных задач. - М.: Издательство МГУ 1989.203 с.
8. Дирак П.Лекции по квантовой механики - М. Мир, 1968.

9 Л.Е. Евтушик, Ю.Г. Лумисте, Н. М. Остиану, А. П. Широков, Дифференциально-геометрические
структуры на многообразиях, Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом., 1979, том 9.

10. В.В.Трофимов, А.Т.Фоменко Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений. Издательство ”Факториал”, 1995.

The paper introduced the concept of the generalized pulse rank n $P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$, $i = \overline{1,m}, 0 \le k \le n$, Which is a generalization of pulses in the transformation Ostrogradsky $F_L(x): T^{2n} X_m \to T^{2n} X_m$, induced non-degenerate Lagrangian $L: T^n X_m \to \Re$.

Studied the law of transformation of order $k = \overline{0,n}$ component pulses rank n at change of coordinates in the base X_m of the bundle $T^n X_m$- they transform as a tensor of type (0,1) (covectors).

$$\overline{p_k^i}(n)(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \ldots, \overset{(2r-k)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m} p_k^j(n)(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(2r-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_k^j(n)(x, \dot{x}, \ldots, \overset{(2r-k)}{x}) \cdot \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}$$

$r = \min(n, p), \quad k = \overline{0,n} \quad , i = \overline{1,m}$

Keywords: Euler-Lagrange equation, smooth manifolds, fiber space velocities, the momentum of the system, the transformation Ostrogradsky nondegenerate function

УДК 514

ТЕНЗОР ОБОБЩЕННОЙ ЭНЕРГИИ

Аннотация В работе доказана инвариантность энергии ранга n системы, состояние которой описывается гладкой функцией, определенной в расслоенном пространстве скоростей $L: T^p X_m \to \Re \quad p \le n$.

$L(x,..., \overset{(n)}{x})$, $p^k_{i,n}$, $H_n(L,x)$ -локальная запись функции L, импульсов $k-ого$ порядка и энергии ранга n соответственно при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$. $\quad H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x}..., \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^k_{i,n} \overset{(k)i}{x}$

$\bar{L}(\bar{x},..., \overset{(n)}{\bar{x}})$, $\overline{p^j_{k,n}}$, $\bar{H}_n(\bar{L},\bar{x})$ -локальная запись функции L, импульсов $k-ого$ порядка и энергии ранга n соответственно при выборе локальных координат $(\bar{x})$ в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

$\bar{H}_n(\bar{L},\bar{x}) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) = \bar{L}(\bar{x},..., \overset{(n)}{\bar{x}}) + \sum_{i=1}^{m} \overline{p^i_{k,n}} \overset{(k)i}{\bar{x}}$ Тогда $H(L,x,n) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)$

Ключевые слова: уравнения Эйлера-Лагранжа, гладкие многообразия, расслоенное пространство скоростей, импульс системы, тензор энергии, тензор обобщенного импульса, невырожденная функция

Введение.

Фундаментальность законов сохранения заключается в их универсальности. Они справедливы при изучении любых физических процессов (механических, тепловых, электромагнитных и др.). Они одинаково применимы в релятивистском и нерелятивистском движении, в микромире, где справедливы квантовые представления, и в макромире, с его классическими представлениями.

Законы сохранения имеют важное значение не только в механике, но и в физике вообще. Научное и методологическое значение законов сохранения определяет их исключительная общность и универсальность. Благодаря той особой роли, которую играют законы сохранения в физике, они являются важнейшим элементом современной научной картины мира.

Между основным уравнением динамики и законами сохранения имеется принципиальная разница. Законы динамики дают нам представление о детальном ходе процесса. Так, если задана сила, действующая на материальную точку и начальные условия, то можно найти закон движения, траекторию, величину и направление скорости в любой момент времени и т. п. Законы же сохранения не дают нам прямых указаний на то, как должен идти тот или иной процесс. Они говорят лишь о том, какие процессы запрещены и потому в природе не происходят.

В начале 20 века Эмми Нетер доказала важную теорему, которая утверждает, что всякому непрерывному преобразованию координат с заданным законом преобразования соответствует некоторая сохраняющаяся величина (или, как говорят, инвариант преобразования). Поскольку преобразования координат тесно связаны со свойствами симметрии пространства и времени (однородностью, изотропностью пространства и однородностью времени), то каждому свойству симметрии пространства и времени должен соответствовать определенный закон сохранения. С однородностью пространства, то есть с симметрией законов физики по отношению к пространственным сдвигам начала координат, связан закон сохранения импульса. С изотропностью пространства, то есть с симметрией относительно поворота системы координат в пространстве, связан закон сохранения момента импульса. Аналогично представление об однородности времени (симметрии по отношению к сдвигам времени) приводит к закону сохранения энергии.

Значение теоремы Нетер не ограничивается только тем, что она устанавливает связь классических законов сохранения с видами симметрии, имеющими геометрическую природу. При наличии в физической системе симметрий другого рода, не связанных со свойствами пространства и времени, теорема Нетер позволяет установить другие законы сохранения. И наоборот, всякий закон сохранения связан с некоторой определенной симметрией системы.

Дифференциально-геометрическое рассмотрение импульса-энергии в физической и математической постановке изложен в литературе [1-10]. Свойства тензора энергии-импульса при простейших линейных преобразованиях координат – времени объясняет законы сохранения импульса в макроскопической системе. Но тензор энергии-импульса в дифференциальной форме является инвариантным относительно произвольного невырожденного преобразования координат, что приводит к локальным законам сохранения энергии-импульса, например, в физике элементарных частиц. Функция Лагранжа определяет некоторую вариационную задачу, например, минимизацию интеграла действия в механической системе и динамику этой системы (уравнения Эйлера-Лагранжа)[6]. Если интегрант (подынтегральная функция в простейшей вариационной задаче) вырожден относительно переменных времени либо координат, то это вырождение приводит соответственно к закону сохранения энергии либо импульса относительно данной координаты[7]. Задача Лагранжа содержит также уравнения связи (ограничения на краевые условия неизвестной функции). Переменные в уравнениях связи могут содержать производные выше второго порядка по времени от координат. Эти производные неявно входят в функцию Лагранжа, зависящую от ограничений. Поэтому рассмотренная задача актуальна в робототехнике, где перемещение механизмов могут иметь старшие производные по времени. Данная работа является продолжением предыдущих работ.

Основные определения и математические объекты.

Пусть X_m - гладкое многообразие размерности m , $T^n X_m$ - гладкое расслоенное пространство скоростей порядка n с базой расслоения X_m.
$L: T^n X_m \to \Re$-невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$. [9]

Постановка задачи.
Дифференциально-геометрические структуры, используемые в работе: X_m – гладкое многообразие размерности m; $T^n X_m$ – гладкое расслоенное пространство скоростей порядка n с базой расслоения X_m; $L: T^n X_m \to \Re$ – невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$ [9].

Лемма 1. Пусть $\bar{x}^i = S^i(x_1, x_2, ..., x_m)$, здесь $S:(x) \to (\bar{x})$ - гладкое невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m,\ p \ge \max(s,l)$, $i = \overline{1,m}$, тогда

$$D_t^k x^i(\bar{x}) = x^{(k)i}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(k)j}{\bar{x}} + f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\bar{x}}) \quad k \ge 1$$

где - некоторая гладкая функция

$$\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\bar{x}}, \ \overset{(s)}{\bar{x}} = (\overset{(s)1}{\bar{x}}, ..., \overset{(s)m}{\bar{x}}), \ \overset{(s)j}{\bar{x}} = D_t^s \bar{x}^j \quad s = \overline{0, k-1}$$

Доказательство проведем методом математической индукции. База индукции $k = 1$

$D_t^1 x^i(\bar{x}) = x^{(1)i}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(1)j}{\bar{x}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{\cdot j}{\bar{x}}$ проверено. Проверим для k=2

$$D_t^2 x^i(\bar{x}) = x^{(2)i}(\bar{x}) = D_t^1(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(1)j}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m} D_t^1(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \overset{\cdot j}{\bar{x}} + \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} D_t^1 \overset{\cdot j}{\bar{x}} = \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j} \overset{\cdot l}{\bar{x}} \overset{\cdot j}{\bar{x}} +$$

$+ \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{\cdot\cdot j}{\bar{x}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{\cdot\cdot j}{\bar{x}} + f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}), \quad f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j} \overset{\cdot l}{\bar{x}} \overset{\cdot j}{\bar{x}}$. *Проверено. для* $k = 2$ Индуктивный переход. Пусть $D_t^k x^i(\bar{x}) = x^{(k)i}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(k)j}{\bar{x}} + f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\bar{x}})$ Тогда

$$D_t^{k+1} x^i(\bar{x}) = D_t^1 x^{(k)i}(\bar{x}) = D_t(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(k)j}{\bar{x}} + f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\bar{x}})) = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j} \overset{\cdot l}{\bar{x}}) \overset{(k)j}{\bar{x}} + \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(k+1)j}{\bar{x}} +$$

$$+ \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(s)j}{\bar{x}}} \overset{(s+1)j}{\bar{x}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(k+1)j}{\bar{x}} + f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k)}{\bar{x}}), \ 0 + 1 \le s + 1 \le k - 1 + 1 = k$$

$f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2 x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j} \overset{\cdot l}{\bar{x}}) \overset{(k)j}{\bar{x}} + \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(s)j}{\bar{x}}} \overset{(s+1)j}{\bar{x}}$ Лемма доказана.

Теорема 1 [11, с. 193]. Пусть $x^i = S^i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_m)$ $S:(\bar{x}) \to (x)$, - гладкое невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m, p \ge \max(s,l)$ $\quad i = \overline{1,m}$, тогда

$$\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(l)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} = \begin{cases} C_k^p \cdot D_t^{k-p}\left(\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right), C_k^p = \dfrac{k!}{p!\cdot(k-p)!}, k! = \prod\limits_{j=1}^{k} j, k \ge p \\ 0, k < p \end{cases}$$

Доказательство. Утверждение теоремы в более общем виде приведено в **[11].**

Ввиду важности утверждения теоремы 1 приведем независимое от ссылки доказательство теоремы 1 для двух параметров k и p.

При $p > k \ge 0$ **по лемме 1** имеем

$$x^{(k)i}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \overset{()}{\bar{x}}) = x^{(k)i}(\bar{x}) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} \overset{(k)l}{\bar{x}} + f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \overset{(k-1)}{\bar{x}}) \quad k \ge 1$$ Поэтому

$$\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} = \frac{\partial}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}}\left(\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} \overset{(k)l}{\bar{x}} + f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\bar{x}})\right) = 0$$

При $k \ge p$ доказательство проведем методом математической индукции. База индукции $k = p$

Используя **лемму 1,** имеем $$\frac{\partial x^{(k)i}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} = \frac{\partial}{\partial \overset{(k)j}{\bar{x}}}\left(\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} \overset{(k)l}{\bar{x}} + f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\bar{x}})\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial \overset{(k)l}{\bar{x}}}{\partial \overset{(k)j}{\bar{x}}}\right) + \frac{\partial f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k-1)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(k)j}{\bar{x}}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} \delta_j^l = \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \qquad \delta_j^l = \begin{cases} 1, j = l \\ 0, j \ne l \end{cases} - \textit{символ Кронеккера}$$

База индукции доказана. Индуктивный переход. Пусть утверждение теоремы справедливо при $k \ge p$

Введем функции $F_k^i(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \overset{(k)}{\bar{x}}) = x^{(k)i}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k)}{\bar{x}})$, $\overset{(k+1)i}{x} = D_t(x^{(k)i}) = D_t F_k^i = \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k} \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}} \overset{(s+1)l}{\bar{x}}$

$$\frac{\partial x^{(k+1)i}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(l)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} = \frac{\partial}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}}\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k} \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}} \overset{(s+1)l}{\bar{x}}\right) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\left(\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}\,\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}} \overset{(s+1)l}{\bar{x}} + \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}} \frac{\partial x^{(s+1)l}}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}}\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\left(\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}\,\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}} \overset{(s+1)l}{\bar{x}}\right) + \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}} \delta_p^{s+1} \delta_j^l = \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\left(\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{\bar{x}}\,\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} \overset{(s+1)l}{\bar{x}}\right) + \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(p-1)j}{\bar{x}}}$$

По предположению индукции $\dfrac{\partial x^{(k)i}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(k)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} = \dfrac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}} = C_k^p D_t^{k-p}\left(\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)$. Значит,

$$\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\left(\frac{\partial^2 F_k^i}{\partial \overset{(s)l}{x}\,\partial \overset{(p)j}{x}}\overset{(s+1)l}{x}\right) + \frac{\partial F_k^i}{\partial \overset{(p-1)j}{x}} = C_k^p\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)l}{x}}\left(D_t^{k-p}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\right)D_t\overset{(s)l}{x}\right) + C_k^{p-1}D_t^{k-(p-1)}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) =$$

$$C_k^p\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{k-p}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)l}{x}}\left(D_t^{k-p}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(k-p)}{\bar{x}})\right)D_t\overset{(s)l}{x}\right) + C_k^{p-1}D_t^{k-(p-1)}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) =$$

$$= C_k^p D_t\left(D_t^{k-p}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\right) + C_k^{p-1}D_t^{k-(p-1)}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) = (C_k^p + C_k^{p-1})D_t^{k+1-p}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) = C_{k+1}^p D_t^{k+1-p}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)$$

В последней строке было использовано свойство биномиальных коэффициентов

$$C_k^p + C_k^{p-1} = \frac{k!}{p!(k-p)!} + \frac{k!}{(p-1)!(k-(p-1))!} = \frac{k!}{p!(k-p)!}\left(1+\frac{p}{k-p+1}\right) = \frac{(k+1)!}{p!(k-p+1)!} = C_{k+1}^p$$

Теорема доказана.

Теорема 1[11]. Пусть $\bar{x}^i = S^i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $S:(x)\to(\bar{x})$, -невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m$, $p \ge \max(s,l)$ $i=\overline{1,m}$, тогда

$$\frac{\partial x^{(l)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(l)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(s)j}{\bar{x}}} = \begin{cases} C_l^s \cdot D_t^{l-s}\left(\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right), C_l^s = \dfrac{l!}{s!\cdot(l-s)!}, l! = \prod\limits_{k=1}^{l} k, l \ge s \\ 0, l < s \end{cases}$$

Определение 1. Система функций $P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p+\min(n,p)-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m}$$

называется обобщенным импульсом ранга n для функции $L: T^p X_m \to \Re$ в локальных координатах (x) базы X_m расслоения $T^p X_m$ где

$L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p)}{x})$- локальная запись функции L при выборе локальных координат (x) в базе X_m
расслоения $T^p X_m$

Функция $p_{k,n}^i$ называются $k-ой$ компонентой обобщенного импульса P_n ранга n по $i-$ой координате или импульсами порядка k (k -импульсами) по $i-$ой координате обобщенного импульса P_n ранга n.

Теорема 2[10](закон преобразования импульсов при замене системы координат в базе X_m расслоения $T^{2n} X_m$).

При замене $(\bar{x}) \to (x(\bar{x}))$: в базе многообразия X_m расслоения $T^{2n} X_m$

$\overline{p_k^i}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})$ преобразуются как **тензоры** типа (0,1) (ковекторы):

$$\overline{p_k^i}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})=\sum_{j=1}^{m}p_k^j(n)(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}=p_k^j(n)(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial\bar{x}^i}$$

$$p_k^i(n)=p_{k,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(l+k)i}{x}}\right)$$ -импульс порядка k

$k=0,n\quad i,j=\overline{1,m}$

Определение 2. Пусть $L:T^pX_m\to\Re$, $L(x,...,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения T^pX_m.

Функция

$$H=H_n=H_n(L,x)=H(L,x,n)=-L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^i\overset{(k)i}{x}=-L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^iD_t^kx^i=$$

$$=-L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right)D_t^kx^i\quad\overset{(k)i}{x}=D_t^kx^i,$$

где D_t^k – оператор - кратного полного дифференцирования по времени *t*, называется гамильтонианом (функцией Гамильтона) ранга *n* этого преобразования для функции Лагранжа $L:T^pX_m\to\Re$, а также энергией системы, состояние которой описывается функцией $L:T^pX_m\to\Re$ в локальной системе координат (x) в базе X_m расслоения T^pX_m. В дальнейшем будет доказано, что при $p\le n$ энергия системы является тензором нулевого ранга, то есть не зависит от выбора локальной системы координат (x) в базе X_m расслоения T^pX_m, а при $p>n$, вообще говоря, зависит от локальных координат и, таким образом, не сохраняется при замене локальной системы координат в базе X_m расслоения T^pX_m.

Замечание 1. Максимальный порядок производной по *t* порядка l в $p_k^i(n)$ равен $l+l+k=2\cdot l+k$.

Если $l+k>p$, то $\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l+k)i}{x}}\equiv 0$ и, значит, коэффициент при производной $\overset{(l+k)i}{x}$ равен 0, следовательно, при определении максимального порядка производной по *t* можно считать $l+k\le p$ (в частности, $k\le p$).

Кроме того,
$l\le n-k\Leftrightarrow l+k\le n\Rightarrow l+k\le\min(n,p)\Rightarrow l\le\min(n,p)-k\Rightarrow 2\cdot l+k\le 2\cdot(\min(n,p)-k)+k=$
$=2\cdot\min(n,p)-2\cdot k+k=2\cdot\min(n,p)-k$, $p_{k,n}^i$ зависит от производных порядка
$\max(2\min(p,n)-k,p)=b(n,p,k)$, $b(n,n=n,k)=b(n,p=n,k)=\max(2\min(n,n)-k,p)$.

Для каждого слагаемого вида $p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x} = p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x}$ – произведения импульса порядка k на производную того же порядка по i-й координате – справедливо $\max(\max(2\min(p,n)-k,p),k)=\max(2\min(p,n)-k,p,k)$. Энергия системы

$$H_n(L,x)=H(L,x,n)=-L(x,\dot{x}...,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x}=-L(x,...,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x}$$

будет зависеть от максимального порядка производной

$$\max_{1\le k\le n}(2\min(p,n)-k,p,k)=a(n,p)=\max_{1\le k\le n}(b(n,p,k),k).$$

На основании этого можно записать

$$H(x,\dot{x}...,\overset{(a(n,p))}{x})=H_n(L,x)=H(L,x,n)=-L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}(x,\dot{x}...,\overset{(b(n,p,k))}{x})\overset{(k)i}{x}=-L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}(x,\dot{x}...,\overset{(b(n,p,k))}{x})D^k_t x^i==-L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}})D^k_t x^i.$$

Теорема3[9](дифференциальная связь импульсов k-ого и (k-1)-ого порядков). $L:T^nX_m\to\Re-$ невырожденная функция Лагранжа,. $L(x,...,\overset{(n)}{x})$, $p^i_{k,n}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})$, $p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k+1)}{x})$ -локальная запись функции L и импульсов $k-ого\, и\, (k-1)$ порядков при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения T^PX_m. Тогда

$$D_t p^i_{k,n}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})=\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}-p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k+1)}{x}).$$

Где $p^i_{k,n}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}})$ - импульс k-ого порядка

$p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k+1)}{x})=\sum_{l=0}^{n-(k-1)}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k-1)i}})$ -импульс (k-1) –ого порядка

Теорема 4. Пусть $x^i=S^i(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_m)$ $S:(\bar{x})\to(x)$, -невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^pX_m, p\ge\max(s,l)$ $i=\overline{1,m}$, тогда

$$D^k_t x^i(\bar{x})=\overset{(k)i}{x}(\bar{x})=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C^{s-1}_{k-1}D^{k-s}_t(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j})\overset{(s)j}{\bar{x}},C^s_l=\frac{l!}{s!\cdot(l-s)!},l!=\prod_{k=1}^{l}k,l\ge s \qquad (1)$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по порядку производной k.
База индукции

k=1.

$$x=(x^1,x^2,\dots,x^m),\ \bar{x}=(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\dots,\bar{x}^m)$$

$$D_t^1x^i=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\dot{\bar{x}}^j=\sum_{j=1}^{m}C_{1-1}^{1-1}D_t^{1-1}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\quad \text{по определению считаем } C_0^0=1 \tag{2}$$

k=2: $D_t^2x^i=D_t^1\dot{x}^i=D_t^1\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\dot{\bar{x}}^j\right)=\sum_{j=1}^{m}D_t^1\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\dot{\bar{x}}^j+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}D_t^1\dot{\bar{x}}^j=$

$$=\sum_{j=1}^{m}D_t^1\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\dot{\bar{x}}^j+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\ddot{\bar{x}}^j=\sum_{j=1}^{m}C_{2-1}^{1-1}D_t^{2-1}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\bar{x}^{(1)j}+\sum_{j=1}^{m}C_{2-1}^{2-1}D_t^{2-2}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\bar{x}^{(2)j} \tag{3}$$

k=3:

$$D_t^3x^i=D_t^1\ddot{x}^i=D_t^1\left(\sum_{j=1}^{m}D_t^1\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\dot{\bar{x}}^j+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\ddot{\bar{x}}^j\right)=\sum_{j=1}^{m}D_t^2\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\dot{\bar{x}}^j+\sum_{j=1}^{m}D_t^1\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\ddot{\bar{x}}^j+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}D_t^1\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\ddot{\bar{x}}^j+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\dddot{\bar{x}}^j=\sum_{j=1}^{m}D_t^2\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\dot{\bar{x}}^j+2\sum_{j=1}^{m}D_t^1\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\ddot{\bar{x}}^j+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\dddot{\bar{x}}^j=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}C_{3-1}^{3-1}D_t^{3-1}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\bar{x}^{(1)j}+\sum_{j=1}^{m}C_{3-1}^{3-2}D_t^{3-2}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\bar{x}^{(2)j}+\sum_{j=1}^{m}C_{3-1}^{3-3}D_t^{3-3}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\bar{x}^{(3)j}=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\left(C_{3-1}^{3-1}D_t^{3-1}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\bar{x}^{(1)j}+C_{3-1}^{3-2}D_t^{3-2}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\bar{x}^{(2)j}+C_{3-1}^{3-3}D_t^{3-3}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\bar{x}^{(3)j}\right) \tag{4}$$

k=4:

$$D_t^4x^i=D_t^1\dddot{x}^i=D_t^1\left(\sum_{j=1}^{m}D_t^2\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\dot{\bar{x}}^j+2\sum_{j=1}^{m}D_t^1\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\ddot{\bar{x}}^j+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\dddot{\bar{x}}^j\right)=$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\left(D_t^3\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\dot{\bar{x}}^j+D_t^2\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\ddot{\bar{x}}^j+2\left(D_t^2\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\ddot{\bar{x}}^j+D_t^1\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\dddot{\bar{x}}^j\right)+D_t^1\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\dddot{\bar{x}}^j+\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\ddddot{\bar{x}}^j\right)=$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\left(D_t^3\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\dot{\bar{x}}^j+3D_t^2\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\ddot{\bar{x}}^j+3D_t^1\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\dddot{\bar{x}}^j+\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\ddddot{\bar{x}}^j\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\left(C_{4-1}^{4-1}D_t^{4-1}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\bar{x}^{(1)j}+C_{4-1}^{4-2}D_t^{4-2}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\bar{x}^{(2)j}+C_{4-1}^{4-3}D_t^{4-3}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\bar{x}^{(3)j}+C_{4-1}^{4-4}D_t^{4-4}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right)\bar{x}^{(4)j}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\left(C_3^3 D_t^3 \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(1)j}{x} + C_3^2 D_t^2 \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(2)j}{x} + C_3^1 D_t^1 \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(3)j}{x} + C_3^0 D_t^0 \left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(4)j}{x}\right) \qquad (5)$$

Формулы (2)-(5) являются частными случаями формулы (1) при k=1,2,3,4 соответственно.

Индуктивный переход: по предположению индукции $D_t^k x^i(\bar{x}) = \overset{(k)i}{x}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(s)j}{x}$

Докажем, что $D_t^{k+1} x^i(\bar{x}) = \overset{(k+1)i}{x}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k+1} C_{k+1-1}^{s-1} D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(s)j}{x} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k+1} C_{k}^{s-1} D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(s)j}{x}$

$$D_t^{k+1} x^i(\bar{x}) = D_t \overset{(k)i}{x}(\bar{x}) = D_t\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(s)j}{x}\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t\left(D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\right)\overset{(s)j}{x} +$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) D_t \overset{(s)j}{x} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k+1-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(s)j}{x} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(s+1)j}{x} \qquad (6)$$

В правой части формулы (6) сделаем замену:

$$s = g-1, g = s+1, s-1 = g-2\ , k-s = k+1-g$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k+1-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(s)j}{x} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(s+1)j}{x} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k+1-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(s)j}{x} +$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{g=2}^{k+1} C_{k-1}^{g-2} D_t^{k+1-g}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(g)j}{x} \qquad (7)$$

В формуле (7) меняем индекс суммирования g на s:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k+1-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(s)j}{x} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{g=2}^{k+1} C_{k-1}^{g-2} D_t^{k+1-g}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(g)j}{x} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k+1-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(s)j}{x} +$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=2}^{k+1} C_{k-1}^{s-2} D_t^{k+1-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(s)j}{x} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=2}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k+1-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(s)j}{x} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=2}^{k} C_{k-1}^{s-2} D_t^{k+1-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(s)j}{x} +$$

$$+C_{k-1}^{1-1} D_t^{k}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(1)j}{x} + C_{k-1}^{k+1-2} D_t^{k+1-(k+1)}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(k+1)j}{x} = \sum_{s=2}^{k}\left(C_{k-1}^{s-1} + C_{k-1}^{s-2}\right) D_t^{k+1-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(s)j}{x} +$$

(8)

$$+C_{k-1}^{0} D_t^{k}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(1)j}{x} + C_{k-1}^{k-1} D_t^{0}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(k+1)j}{x}$$

Так как

$$C_{k-1}^{s-1}+C_{k-1}^{s-2}=\frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-1-(s-1))!}+\frac{(k-1)!}{(s-2)!(k-1-(s-2))!}=\frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!}+\frac{(k-1)!}{(s-2)!(k+1-s)!}=$$

$$=\frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!}+\frac{(k-1)!}{\frac{(s-1)!}{(s-1)}(k-s)!(k+1-s)}=\frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!}(1+\frac{s-1}{k+1-s})=$$

$$=\frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!}(\frac{k+1-s+s-1}{k+1-s})=\frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!}\frac{k}{k+1-s}=\frac{k!}{(s-1)!(k+1-s)!}$$

то $C_{k-1}^{s-1}+C_{k-1}^{s-2}=C_k^{s-1}=\dfrac{k!}{(s-1)!(k+1-s)!}$ (9)

Учитывая (9) в правой части (8) $\sum_{s=2}^{k}(C_{k-1}^{s-1}+C_{k-1}^{s-2})D_t^{k+1-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s)j}{x}+C_{k-1}^{0}D_t^{k}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(1)j}{x}+$

$$+C_{k-1}^{k-1}D_t^{0}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(k+1)j}{x}=\sum_{s=2}^{k}C_k^{s-1}D_t^{k+1-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s)j}{x}+D_t^{k}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(1)j}{x}+D_t^{0}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(k+1)j}{x}=$$

$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k+1}C_{k+1-1}^{s-1}D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s)j}{x}$ Теорема доказана.

Замечание 2 Формула (1) заменой $s_1=s-1,\quad s=s_1+1, k-s=k-1-s_1,\quad k-1\geq s_1\geq 0$

$$D_t^k x^i(\bar{x})=\overset{(k)i}{x}(\bar{x})=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s)j}{x},C_l^s=\frac{l!}{s!\cdot(l-s)!},l!=\prod_{k=1}^{l}k, l\geq s$$

Может быть представлена в виде

$$D_t^k x^i(\bar{x})=\overset{(k)i}{x}(\bar{x})=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s)j}{x}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k-1}C_{k-1}^{s}D_t^{k-1-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j})\overset{(s+1)j}{x}$$

Математическая постановка задачи. Ставится следующая задача:

Пусть $L:T^nX_m\to\Re$. $L(x,...,\overset{(n)}{x})$, $p_i^k(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})$-локальная запись функции L и импульсов $k-ого$ порядков при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения T^nX_m.

Исследовать закон преобразования энергии

$$H=H_n=H_n(L,x)=H(L,x,n)=-L(x,\dot{x}...,\overset{(n)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x}=-L(x,...,\overset{(n)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^iD_t^kx^i$$

$\overset{(k)i}{x}=D_t^kx^i$ ранга n при замене локальной системы координат $x=x(\bar{x})$ в базе X_m расслоения скоростей T^nX_m.

$x=(x^1,x^2,...,x^m)$, $\bar{x}=(\bar{x}^1,\bar{x}^2,...,\bar{x}^m)$ $\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}...,\overset{(n)}{\bar{x}})=L(x(\bar{x}),D_t x(\bar{x}),...,D_t^n x(\bar{x}))$

$p^i_{k,n}=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}})$ -импульс k-ого порядка

По теореме о сложной функции $\frac{\partial L(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial x^{(l+k)i}}=\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}}\frac{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}(x)}{x^{(l+k)i}}$

$$\bar{H}_n(\bar{L},\bar{x})=\bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)=-\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}...,\overset{(n)}{\bar{x}})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\bar{p}^i_{k,n}\overset{(k)i}{\bar{x}}=-\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}...,\overset{(n)}{\bar{x}})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\bar{p}^i_{k,n}\overset{(k)i}{\bar{x}}=$$

$$=-\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}...,\overset{(n)}{\bar{x}})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{1}D_t^l(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^{(l+k)i}})\overset{(k)i}{\bar{x}} \qquad (10)$$

$$H_n(L,x)=H(L,x,n)=-L(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x})...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x}=-L(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x})...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x}=$$

$$=-L(x(\bar{x}),D_t x(\bar{x}),...,D_t^n x(\bar{x}))+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{1}D_t^l(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial x^{(l+k)i}})\overset{(k)i}{x}$$

$$=-\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}...,\overset{(n)}{\bar{x}})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}}\frac{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}}{\partial x^{(l+k)i}})\overset{(k)i}{x} \qquad (11)$$

По теореме 1 выполнено равенство

$$\frac{\partial \overset{(p)j}{\bar{x}}(x,\dot{x}...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}=\begin{cases}C_p^{l+k}\cdot D_t^{p-(l+k)}(\frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^i}),C_p^{l+k}=\frac{p!}{(l+k)!\cdot(p-(l+k))!},g!=\prod_{k=1}^{g}k,p\ge l+k\\ 0,p<l+k\end{cases} \qquad (12)$$

По теореме 4 $\overset{(k)i}{x}(\bar{x})=\sum_{g=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^g})\overset{(s)g}{\bar{x}}$, $C_l^s=\frac{l!}{s!\cdot(l-s)!}, l!=\prod_{k=1}^{l}k, l\ge s$ (13)

Учитывая (12) и (13) в (11) получим

$$-\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{l}D_t^{l}(\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(p)j}{x}}\frac{\partial\overset{(p)j}{x}}{\partial x^{(l+k)i}})\overset{(k)i}{x}=-\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{l}D_t^{l}(\sum_{p=l+k}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(p)j}{x}}C_p^{l+k}\cdot D_t^{p-(l+k)}(\frac{\partial\bar{x}^{j}(x)}{\partial x^{i}})(\bar{x}))(\sum_{g=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k-s}(\frac{\partial x^{i}(\bar{x})}{\partial\bar{x}^{g}})\overset{(s)g}{\bar{x}})\ (14)$$

Применяя к (14) формулу Лейбница

$$D_t^{a}(fg)=\sum_{b=0}^{a}C_a^{b}D_t^{b}(f)D_t^{a-b}(g)\ ,\ C_a^{b}=\frac{a!}{b!(a-b)!},\ b!=\prod_{c=1}^{b}c\,,a\geq b$$

$$-\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{l}D_t^{l}(\sum_{p=l+k}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(p)j}{x}}C_p^{l+k}\cdot D_t^{p-(l+k)}(\frac{\partial\bar{x}^{j}(x)}{\partial x^{i}})(\bar{x}))\cdot(\sum_{g=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k-s}(\frac{\partial x^{i}(\bar{x})}{\partial\bar{x}^{g}})\overset{(s)g}{\bar{x}})=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}\sum_{p=l+k}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{g=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}\sum_{a=1}^{l}(-1)^{l}C_p^{l+k}C_{k-1}^{s-1}C_l^{a}D_t^{a}(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(p)j}{x}})D_t^{p-(l+k)+l-a}((\frac{\partial\bar{x}^{j}(x)}{\partial x^{i}})(\bar{x}))D_t^{k-s}(\frac{\partial x^{i}(\bar{x})}{\partial\bar{x}^{g}}\overset{(s)g}{\bar{x}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-k}\sum_{p=l+k}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{g=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}\sum_{a=1}^{l}(-1)^{l}C_p^{l+k}C_{k-1}^{s-1}C_l^{a}$$

$$D_t^{a}(\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(p)j}{x}})D_t^{p-k-a}((\frac{\partial\bar{x}^{j}(x)}{\partial x^{i}})(\bar{x}))D_t^{k-s}(\frac{\partial x^{i}(\bar{x})}{\partial\bar{x}^{g}}\overset{(s)g}{\bar{x}}\ (15)$$

Установить связь между соотношениями (10) и (14) или эквивалентным (14) выражению (15) является целью данной работы**.**

Теорема 5 (о дифференциальной связи энергии ранга n с импульсами 0-ого порядка ранга n)

Пусть $L:T^{n}X_m\to\Re\ L(x,\ldots,\overset{(n)}{x}),\ p_{i,n}^{k}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-k)}{x})$ -локальная запись функции L и импульсов $k-ого$ порядков при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^{n}X_m.\ k=\overline{1,n}\quad i=\overline{1,m}$

$$H=H_n=H_n(L,x)=H(L,x,n)=-L(x,\dot{x}\ldots,\overset{(n)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^{i}\overset{(k)i}{x}=-L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{k,n}^{i}D_t^{k}x^{i}$$

-энергия системы, состояние которой описывается функцией $L:T^{n}X_m\to\Re$ в локальной системе координат (x) в базе X_m расслоения $T^{n}X_m$. Тогда

$$D_t(H_n(L,x,n)+L(x,\dot{x}...,\overset{(n)}{x}))=D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x})=\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p^i_{0,n}\overset{,i}{x} \tag{16}$$

$p^i_{0,n}=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+k)i}})$ - импульс 0-ого порядка $\overset{,i}{x}=\overset{(1)i}{x}=D_t x^i$

Доказательство.

$$D_t(H_n(L,x,n)+L(x,\dot{x}...,\overset{(n)}{x}))=D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x})=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{k,n})\overset{(k)i}{x}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}D_t\overset{(k)i}{x}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{k,n})\overset{(k)i}{x}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}D_t\overset{(k)i}{x}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{k,n})\overset{(k)i}{x}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}\overset{(k+1)i}{x} \tag{17}$$

Во второй части (15) сделаем замену $l=k+1 \quad k=l-1 \quad n+1\geq l\geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{k,n})\overset{(k)i}{x}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}\overset{(k+1)i}{x}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{k,n})\overset{(k)i}{x}+\sum_{l=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}p^i_{l-1,n}\overset{(l)i}{x}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{k,n})\overset{(k)i}{x}+\sum_{k=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k-1,n}\overset{(k)i}{x}=\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{1,n})\overset{(1)i}{x}+\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{k,n})\overset{(k)i}{x}+\sum_{k=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k-1,n}\overset{(k)i}{x}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{1,n})\overset{(1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^i_{n,n}\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{k,n})\overset{(k)i}{x}+\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k-1,n}\overset{(k)i}{x}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{1,n})\overset{(1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^i_{n,n}\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{m}(D_t(p^i_{k,n})+p^i_{k-1,n})\overset{(k)i}{x} \tag{18}$$

По теореме 3 $D_t(p^i_{k,n})=\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}-p^i_{k-1,n}$ поэтому $D_t(p^i_{k,n})+p^i_{k-1,n}=\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}$

(19)

При $k=1 \quad D_t(p^i_{1,n})+p^i_{1-1,n}=\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(1-1)i}{x}} \qquad D_t(p^i_{1,n})=\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^i}-p^i_{0,n}$ (20)

$$p^i_{n,n}=\sum_{l=0}^{n-n}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+n)i}})=\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)i}} \tag{21}$$

Преобразуем (18) , учитывая (19),(20),(21)

$$\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{1,n})\overset{(1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}p^i_{n,n}\overset{(n+1)i}{x}+\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{m}(D_t(p^i_{k,n})+p^i_{k-1,n})\overset{(k)i}{x}=\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{1,n})\overset{(1)i}{x}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)i}}\overset{(n+1)i}{x}+$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}=\sum_{i=1}^{m}D_t(p^i_{1,n})\overset{(1)i}{x}+\sum_{k=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}=\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^i}-p^i_{0,n})\overset{(1)i}{x}+$$

$$+\sum_{k=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^i}\overset{(1)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p^i_{0,n}\overset{(1)i}{x}+\sum_{k=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p^i_{0,n}\overset{(1)i}{x}=\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}-\sum_{i=1}^{m}p^i_{0,n}\dot{x}^i$$

Теорема доказана.

Замечание 3 Первая сумма в правой части (16) заменой $k_1=k-1, k=k_1+1,\ \ n\ge k_1\ge 0$ может быть представлена в виде

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}$$

Имеет место следующая простая

Теорема 6 $x=(x^1,x^2,...,x^m), \bar{x}=(\bar{x}^1,\bar{x}^2,...,\bar{x}^m)$

Пусть $x^i=S^i(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_m)\quad S:(\bar{x})\to(x)$, -невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^pX_m\quad i,k=\overline{1,m}$, $S^{-1}:(x)\to(\bar{x})$-обратное отображение, тогда

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^k}=\delta^i_k\qquad \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^i(x)}{\partial x^j}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}=\delta^i_k\qquad \delta^k_i=\begin{cases}1, i=k\\0, i\ne k\end{cases}-\text{символ Кронеккера} \tag{22}$$

Доказательство. $x^i=x^i(\bar{x}^1(x),\bar{x}^2(x),...,\bar{x}^m(x))$ По теореме о сложной функции

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^k}=\delta^i_k=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^k}$$ аналогично доказывается равенство

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^k}=\delta^i_k=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^i(x)}{\partial x^j}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}$$

Теорема доказана

Докажем, что каждая из сумм в формуле (16) является геометрическим инвариантом, то есть не зависит от выбора локальной системы координат (x) в базе X_m расслоения скоростей T^nX_m. Имеет место следующая

Теорема 7 (об инвариантах G_1, G_2) Пусть $L: T^n X_m \to \Re$ $L(x,\dots,\overset{(n)}{x})$, $p^k_{i,0}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})$ - локальная запись функции L и импульсов $0-ого$ порядка при выборе локальных координат (х) в базе X_m расслоения $T^n X_m$. $i=\overline{1,m}$. Тогда функции

$$G_1(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x}\overset{(n+1)}{x}) = \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} \overset{(k)i}{x} \quad \text{и}\; G_2(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n)}{x}) = \sum_{i=1}^{m} p^i_{0,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n)}{x})\overset{.\,i}{x} \qquad (23)$$

$$p^i_{0,n} = \sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}}\right) \text{ - импульс 0-ого порядка } \quad \overset{,i}{x} = \overset{(1)i}{x} = D_t x^i$$

при замене локальных координат (х) в базе X_m расслоения $T^n X_m$ преобразуется как тензоры 0-го ранга, то есть не зависят от выбора локальных координат (являются геометрическими инвариантами)

Доказательство. По теореме о сложной функции $\overset{,i}{x} = \overset{(1)i}{x} = D_t x^i(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\dot{\bar{x}}^k$

По теореме 2 импульсы 0-ого порядка ранга n преобразуются как тензоры типа (0,1) (ковекторы):

$$p^i_0(n)(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{j=1}^{m}\overline{p^j_0}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})\cdot\frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^i}$$ Подставим это равенство в

$$G_2(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n)}{x}) = \sum_{i=1}^{m} p^i_{0,n}\overset{.\,i}{x}$$

$$G_2(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n)}{x}) = \sum_{i=1}^{m} p^i_{0,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x})\overset{.\,i}{x} = \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{m}\overline{p^j_0}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})\cdot\frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^i}\Big)\overset{.\,i}{x} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\overline{p^j_0}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})\cdot\frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^i}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\dot{\bar{x}}^k = \sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{m}\overline{p^j_0}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})\cdot\dot{\bar{x}}^k\Big)\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{m}\overline{p^j_0}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})\cdot\dot{\bar{x}}^k\Big)\delta^j_k = \sum_{j=1}^{m}\overline{p^j_0}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})\cdot\dot{\bar{x}}^j = \bar{G}_2(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{\bar{x}}) \qquad (24)$$

где $\delta^k_i = \begin{cases}1, i=k\\ 0, i\neq k\end{cases} - символ\;\; Кронеккера$

Для n=1

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x} \overset{(25)}{=} \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i}\overset{,\,i}{x} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \overset{.\,i}{x}}\ddot{x}^i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} + \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial \dot{\bar{x}}^k}{\partial x^i}\Big)\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\dot{\bar{x}}^l +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial L(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^{k}}\frac{\partial \dot{\bar{x}}^{k}}{\partial \dot{x}^{i}}\ddot{x}^{i}\overset{(26)}{=}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^{k}}\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}+\frac{\partial L(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^{k}}D_t\left(\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\right)\right)\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{i}}{\partial \bar{x}^{l}}\dot{\bar{x}}^{l}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial L(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^{k}}\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\left(D_t\left(\frac{\partial x^{i}}{\partial \bar{x}^{l}}\right)\dot{\bar{x}}^{l}+\frac{\partial x^{i}}{\partial \bar{x}^{l}}D_t(\dot{\bar{x}}^{l})\right)\overset{(27)}{=}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial L(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^{k}}\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{i}}{\partial \bar{x}^{l}}\dot{\bar{x}}^{l}+\frac{\partial L(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^{k}}\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{i}}{\partial \bar{x}^{l}}\ddot{\bar{x}}^{l}\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial L(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^{k}}\dot{\bar{x}}^{l}\left(D_t\left(\frac{\partial x^{i}}{\partial \bar{x}^{l}}\right)\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}+D_t\left(\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\right)\frac{\partial x^{i}}{\partial \bar{x}^{l}}\right)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial L(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^{k}}\delta_l^k\dot{\bar{x}}^{l}+\frac{\partial L(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^{k}}\delta_l^k\ddot{\bar{x}}^{l}\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial L(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^{k}}\dot{\bar{x}}^{l}\left(D_t\left(\frac{\partial x^{i}}{\partial \bar{x}^{l}}\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\right)\right)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial L(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^{k}}\dot{\bar{x}}^{k}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial L(\bar{x}\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^{k}}\ddot{\bar{x}}^{k}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial L(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^{k}}\dot{\bar{x}}^{l}D_t(\delta_l^k)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial L(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^{k}}\dot{\bar{x}}^{k}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial L(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^{k}}\ddot{\bar{x}}^{k}=\bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}}) \qquad (28)$$

$$D_t(\delta_l^k)=0,\ \delta_i^k=\begin{cases}1, i=k\\0, i\neq k\end{cases}-\text{символ}\ \ \text{Кронеккера}$$

Доказано

В (27),(28) была применена теорема 6

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{i}}{\partial \bar{x}^{l}}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial x^{i}}{\partial \bar{x}^{l}}\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}=\delta_i^k=\begin{cases}1, i=k\\0, i\neq k\end{cases}-\text{символ Кронеккера}$$

В (25),(26) была применена теорема 1:

$$\frac{\partial \dot{x}^{k}}{\partial \dot{\bar{x}}^{i}}=\frac{\partial \overset{(1)k}{x}}{\partial \overset{(1)i}{\bar{x}}}=C_1^1\cdot D_t^{1-1}\cdot\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}}=1\cdot D_t^0\cdot\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}}=\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}}$$

$$\frac{\partial \dot{x}^{k}(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}}=\frac{\partial \overset{(1)k}{x}}{\partial \overset{(0)i}{\bar{x}}}=C_1^0\cdot D_t^{1-0}\cdot\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}}=1\cdot D_t^1\cdot\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}}=D_t\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}}$$

$$\frac{\partial x^{k}}{\partial \dot{\bar{x}}^{i}}=\frac{\partial D_t^0x^k(\bar{x})}{\partial D_t^1\bar{x}^{i}}=\frac{\partial \overset{(0)k}{x}(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{(1)i}}=\delta_1^0\cdot\frac{\partial x^k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{i}}=0$$

Общий случай.

$$G_1(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x}\overset{(n+1)}{x})=\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}$$

По теореме 4 $D_t^k x^i(\bar{x}) = \overset{(k)i}{x}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{k-1}^{s-1} D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \overset{(\underline{s})j}{x} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k-1} C_{k-1}^{s} D_t^{k-1-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \overset{(\underline{s+1})j}{x}$

$$D_t^{k+1} x^i(\bar{x}) = \overset{(k+1)i}{x}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k+1-1} C_{k+1-1}^{s} D_t^{k+1-1-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \overset{(\underline{s+1})j}{x} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k} C_{k}^{s} D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \overset{(\underline{s+1})j}{x}$$

Поэтому $\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} \overset{(k+1)i}{x} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} (\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k} C_k^s D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \overset{(\underline{s+1})j}{x})$ (29)

$\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} = \sum_{p=0}^{n}\sum_{d=1}^{m} \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(\underline{n})}{x})}{\partial \overset{(\underline{p})d}{x}} \frac{\partial \overset{(\underline{p})d}{x}}{\partial \overset{(k)i}{x}}$ По теореме 1выполнено равенство (30)

$$\frac{\partial \overset{(\underline{p})d}{x}(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} = \begin{cases} C_p^k \cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}), C_p^k = \frac{p!}{k!\cdot(p-k)!}, k! = \prod_{g=1}^{k} g, p \ge k \\ 0, p < k \end{cases} \quad (31)$$

Подставим (31) в (30):

$$\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} = \sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m} \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(\underline{n})}{x})}{\partial \overset{(\underline{p})d}{x}} C_p^k \cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}) \quad (32)$$

и полученный результат (32) подставим в (29)

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} \overset{(k+1)i}{x} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} (\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k} C_k^s D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \overset{(\underline{s+1})j}{x}) =$$

$$\overset{(33)}{=} \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} (\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m} \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(\underline{n})}{x})}{\partial \overset{(\underline{p})d}{x}} C_p^k \cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}))(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k} C_k^s D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \overset{(\underline{s+1})j}{x}) =$$

Так как $\overset{(\underline{s+1})j}{x} = D_t^s(\overset{(\underline{1})j}{x}) = D_t^s(\overset{\cdot j}{x})$ $\quad C_k^s D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \overset{(\underline{s+1})j}{x} = C_k^s D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) D_t^s(\overset{(\underline{1})j}{x})$ и

$D_t^a(fg) = \sum_{b=0}^{a} C_a^b D_t^b(f) D_t^{a-b}(g)$, $C_a^b = \frac{a!}{b!(a-b)!}$, $b! = \prod_{c=1}^{b} c, a \ge b$ (формула Лейбница), то

$$\sum_{s=0}^{k} C_k^s D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) \overset{(\underline{s+1})j}{x} = \sum_{s=0}^{k} C_k^s D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}) D_t^s(\overset{(\underline{1})j}{x}) = D_t^k(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} D_t^1(\bar{x}^j)) = D_t^k(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{(\underline{1})j}{x}) =$$

$$= D_t^k(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \overset{\cdot j}{x}) \quad (34)$$

Подставляем (34) в (33):

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}C_p^k\cdot D_t^{p-k}\big(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\big)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}C_k^s D_t^{k-s}\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\big)\overset{(s+1)j}{\bar{x}}\Big)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}C_p^k\cdot D_t^{p-k}\big(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\big)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m}D_t^k\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}\big)\Big) \qquad (35)$$

Так как $\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=k}^{n}a_{kp}=\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}a_{kp}$, то сумму в (35) запишем в эквивалентном виде:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}C_p^k\cdot D_t^{p-k}\big(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\big)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m}D_t^k\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}\big)=$$

$$=\sum_{p=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{k=0}^{p}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}C_p^k\cdot D_t^{p-k}\big(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\big)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m}D_t^k\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}\big)\Big)=$$

$$=\sum_{p=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{d=1}^{m}\sum_{k=0}^{p}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}C_p^k\cdot D_t^{p-k}\big(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\big)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m}D_t^k\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}\big)\Big)=$$

$$=\sum_{p=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{p}C_p^k\cdot D_t^{p-k}\big(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\big)D_t^k\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}\big) \qquad (36)$$

По формуле Лейбница: $\sum_{k=0}^{p}C_p^k\cdot D_t^{p-k}\big(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\big)D_t^k\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}\big)=D_t^p\big(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}\big)$

Поэтому

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{p}C_p^k\cdot D_t^{p-k}\big(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\big)D_t^k\big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}\big)=$$

$$=\sum_{p=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}\sum_{j=1}^{m}D_t^p\big(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}\big)=\sum_{p=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}\sum_{i=1}^{m}D_t^p\big(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}\big) \quad (37)$$

Преобразуем последнюю сумму в (37):

$$\sum_{i=1}^{m}D_t^p\big(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}\big)=D_t^p\big(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}\big) \qquad (38)$$

По теореме 6 $\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}=\delta_j^d \quad \delta_j^d=\begin{cases}1, d=j\\0, d\neq j\end{cases}-\textit{символ}\quad \textit{Кронеккера}$

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^{d}(x)}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{i}(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{j}}\overset{(1)j}{x} = \overset{(1)j}{x}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^{d}(x)}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{i}(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{j}} = \overset{(1)j}{x}\,\delta_j^d$$,значит,

$$D_t^p\Big(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^{d}(x)}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{i}(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{j}}\overset{(1)j}{x}\Big) = D_t^p\big(\overset{(1)j}{x}\,\delta_j^d\big) \tag{39}$$

Подставляем полученное в (39) выражение в сумму (37):

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{x}}\sum_{i=1}^{m}D_t^p\Big(\frac{\partial \bar{x}^{d}(x)}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{i}(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{j}}\overset{(1)j}{x}\Big) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{x}}D_t^p\big(\overset{(1)j}{x}\,\delta_j^d\big) =$$

$$= \sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{x}}D_t^p\big(\overset{(1)j}{x}\,\delta_j^d\big) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{x}}D_t^p\big(\overset{(1)j}{x}\big) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{x}}D_t^{p+1}\big(\bar{x}^{j}\big) =$$

$$= \sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{x}}\overset{(p+1)j}{x} = \bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{x})$$

Этот результат может быть получен и другим способом:

$$C_p^k C_k^s = \frac{p!}{k!(p-k)!}\frac{k!}{s!(k-s)!} = \frac{p!}{k!(p-k)!s!(k-s)!} = \frac{p!}{s!(p-s)!}\frac{(p-s)!}{(k-s)!(p-s-(k-s))!} = C_p^k C_{p-s}^{p-k}$$

$$C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!},\ p! = \prod_{c=1}^{p} c,\ p \ge k$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{x}}C_p^k\cdot D_t^{p-k}\Big(\frac{\partial \bar{x}^{d}(x)}{\partial x^{i}}\Big)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}C_k^s D_t^{k-s}\Big(\frac{\partial x^{i}(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{j}}\Big)\overset{(s+1)j}{x}\Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{x}}C_p^s\cdot D_t^{p-k}\Big(\frac{\partial \bar{x}^{d}(x)}{\partial x^{i}}\Big)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}C_{p-s}^{k-s} D_t^{k-s}\Big(\frac{\partial x^{i}(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{j}}\Big)\overset{(s+1)j}{x}\Big) = \tag{40}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n}C_p^s\cdot\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{x}}\Big(\sum_{s=0}^{n}\overset{(s+1)j}{x}\sum_{k=s}^{p}C_{p-s}^{k-s}D_t^{k-s}\Big(\frac{\partial x^{i}(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{j}}\Big)D_t^{p-k}\Big(\frac{\partial \bar{x}^{d}(x)}{\partial x^{i}}\Big)\Big) \tag{41}$$

При замене пределов суммирования в (41) было использовано, что $n \ge p \ge k \ge s$
В последней сумме в (41) сделаем замену
$u = k - s,\ 0 \le u \le k - s, p - k = p - s - (k - s) = p - s - u$, применим формулу Лейбница

$$D_t^{p-s}(fg) = \sum_{u=0}^{p-s}C_{p-s}^{u}D_t^{u}(f)D_t^{p-s-u}(g)\ ,\ C_{p-s}^{u} = \frac{(p-s)!}{u!(p-s-u)!},\ u! = \prod_{c=1}^{u} c,\ p-s \ge u$$

и теорему 6 $\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial x^{i}(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{j}}\frac{\partial \bar{x}^{d}(x)}{\partial x^{i}} = \delta_j^d$, $\delta_j^d = \begin{cases}1, d = j\\ 0, d \ne j\end{cases} - \textit{символ Кронеккера}$

$$\sum_{k=s}^{p} C_{p-s}^{k-s} D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) D_t^{p-k}\left(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\right) = \sum_{u=0}^{p-s} C_{p-s}^{u} D_t^{u}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) D_t^{p-s-u}\left(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\right) = D_t^{p-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\right) =$$

$$= D_t^{p-s}(\delta_j^d) = \begin{cases} 1, d=j \text{ и } p=s \\ 0, d\neq j \text{ или } p\neq s \end{cases} = \delta_j^d \delta_p^s, \qquad \delta_p^s = \begin{cases} 1, p=s \\ 0, p\neq s \end{cases} - \text{символ Кронеккера} \qquad (42)$$

Равенство (42) получено на основании того, что $\delta_j^d = \begin{cases} 1, d=j \\ 0, d\neq j \end{cases} = const$ и $D_t^{p-s}(const) = \begin{cases} const, p-s>0 \\ 0, p-s=0 \end{cases}$ (43)

(производная от постоянной равна 0, если ее порядок больше 0 и равна постоянной, если порядок равен 0)

Подставляем полученный в (42) результат в (41)

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n} C_p^s \cdot \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}\left(\sum_{s=0}^{n} \overset{(s+1)j}{x} \sum_{k=s}^{p} C_{p-s}^{k-s} D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) D_t^{p-k}\left(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n} C_p^s \cdot \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}\left(\sum_{s=0}^{n} \overset{(s+1)j}{x} \sum_{k=s}^{p} \delta_j^d \delta_p^s\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n} C_p^s \cdot \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}\left(\sum_{s=0}^{n} \overset{(s+1)j}{x} \delta_j^d \sum_{k=s}^{p} \delta_p^s\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n} C_p^s \cdot \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}\left(\sum_{s=0}^{n} \overset{(s+1)j}{x} \delta_j^d \sum_{k=s}^{p} \delta_p^{s=p}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n} C_p^p \cdot \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}\left(\sum_{s=0}^{n} \overset{(p+1)j}{x} \delta_j^d\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n} C_p^p \cdot \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)d}{x}}\left(\sum_{s=0}^{n} \overset{(p+1)j}{x} \delta_j^{d=j}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n} C_p^p \cdot \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)j}{x}} \overset{(p+1)j}{x} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=0}^{n} \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(p)j}{x}} \overset{(p+1)j}{x} == \bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{x})$$ Теорема доказана.

Теорема 8 (Инвариантность энергии относительно замены координат) Пусть $L: T^n X_m \to \Re$ - гладкая функция.

$L(x,...,\overset{(n)}{x})$, $p_{i,n}^k(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})$, $H_n(L,x)$-локальная запись функции L, импульсов $k-ого$ порядка и энергии ранга n соответственно при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$.

$$H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x}...,\overset{(n)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{i,n}^k(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x}$$

$\bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})$, $\overline{p^j_{k,n}}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})$, $\bar{H}_n(\bar{L},\bar{x})$ -локальная запись функции L, импульсов $k-ого$ порядка и энергии ранга n соответственно при выборе локальных координат $(\bar{x})$ в базе X_m расслоения T^nX_m.

$$\bar{H}_n(\bar{L},\bar{x}) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) = \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\overline{p^j_{k,n}}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})\overset{(k)i}{\bar{x}}$$

Тогда $H(L,x,n)=\bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)$ Энергия системы - тензор 0-ого ранга (не зависит от выбора локальных координат, то есть является инвариантным геометрическим объектом)

Доказательство.

$L(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x})...,x(\bar{x}))=\bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})$ $\quad x=x(\bar{x})=S(\bar{x})$ - невырожденная замена координат в базе X_m расслоения T^nX_m.

$$D_t(H(L,x,n)-\bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)) = D_t(-L(x,\dot{x}...,\overset{(n)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^k_{i,n}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x} + \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}}) -$$
$$-\sum_{j=1}^{m}\overline{p^j_{k,n}}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})\overset{(k)i}{\bar{x}}) = D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^k_{i,n}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x} - \sum_{j=1}^{m}\overline{p^i_{k,n}}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})\overset{(k)i}{\bar{x}}) =$$
$$= D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^k_{i,n}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})\overset{(k)i}{x}) - D_t(\sum_{j=1}^{m}\overline{p^i_{k,n}}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n-k)}{\bar{x}})\overset{(k)i}{\bar{x}}) \qquad (44)$$

По теореме 5

$$D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x}) = \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x} - \sum_{i=1}^{m}p^i_{0,n}x^{,i} = G_1(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x}\overset{(n+1)}{x}) - G_2(x,\dot{x},...,\overset{(2n)}{x})$$

$$D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\overline{p^j_{k,n}}\overset{(k)i}{\bar{x}}) = \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(k-1)i}{\bar{x}}}\overset{(k)i}{x} - \sum_{i=1}^{m}\overline{p^i_{0,n}}\dot{\bar{x}}^l = \bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}}) - \bar{G}_2(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}})$$

$$D_t(H(L,x,n)-\bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)) = D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,n}\overset{(k)i}{x}) - D_t(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\overline{p^j_{k,n}}\overset{(k)i}{\bar{x}}) = G_1(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x}\overset{(n+1)}{x}) -$$
$$-G_2(x,\dot{x},...,\overset{(2n)}{x}) - (\bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}}) - \bar{G}_2(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}})) = G_1(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x}\overset{(n+1)}{x}) - \bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}}) -$$
$$-G_2(x,\dot{x},...,\overset{(2n)}{x}) - \bar{G}_2(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}}) = 0-0=0$$ так как по теореме 7 о G_1, G_2 *инвариантах*

$$G_1(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x}\overset{(n+1)}{x}) = \bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}}) \qquad G_2(x,\dot{x},...,\overset{(2n)}{x}) = \bar{G}_2(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}})$$

$D_t(H(L,x,n)-\bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)) = D_t(H(L(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x})...,\overset{(n)}{x}(\bar{x})),S(\bar{x}),n)-\bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)) = 0$ для любой невырожденной замены координат $x = x(\bar{x}) = S(\bar{x})$ - в базе X_m расслоения $T^n X_m$.
Значит,

$H(L,x,n)-\bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) \equiv C = const$ для всех невырожденных замен координат $x = x(\bar{x}) = S(\bar{x})$ - в базе X_m расслоения $T^n X_m$. Рассмотрим тождественное преобразование $x(\bar{x}) = S(\bar{x}) = \bar{x}$

$H(L(x(\bar{x}),\dot{x}(\bar{x})...,\overset{(n)}{x}(\bar{x})),S(\bar{x}),n)-\bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)-\bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) = C = 0$ Следовательно, $\bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)$ Теорема доказана.

Замечание 4. Утверждение теоремы 8 справедливо и для функций $L: T^p X_m \to \Re \quad p \le n$
Так как при $p < n$ можно определить функцию $L_1: T^n X_m \to \Re$ которая в любой локальной системе
координат (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$ $\quad L_1(x,\dot{x}...,\overset{(n)}{x}) \equiv L(x,\dot{x}...,\overset{(p)}{x})$ для любых $x^{(p+1)},...,\overset{(n)}{x}$.Для функции $L_1(x,\dot{x}...,\overset{(n)}{x})$ утверждение теоремы 8 справедливо. Таким образом, справедлива

Теорема 9. (Инвариантность энергии относительно замены координат). Пусть $L: T^p X_m \to \Re$ - гладкая функция.

$L(x,...,\overset{(n)}{x})$, $p^k_{i,n}$, $H_n(L,x)$-локальная запись функции L, импульсов $k-ого$ порядка и энергии ранга n соответственно при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$. $\quad H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot{x}...,\overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p^k_{i,n} \overset{(k)i}{x}$

$\bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})$, $\overline{p^j_{k,n}}$, $\bar{H}_n(\bar{L},\bar{x})$-локальная запись функции L, импульсов $k-ого$ порядка и энергии ранга n соответственно при выборе локальных координат $(\bar{x})$ в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

$\bar{H}_n(\bar{L},\bar{x}) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n) = \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}}) + \sum_{j=1}^{m} \overline{p^j_{k,n}} \overset{(\underline{k})i}{x}$ Тогда $H(L,x,n) = \bar{H}(\bar{L},\bar{x},n)$

Замечание 5. Для $n=1$ $\quad p^i_k(n) = p^i_{k,n}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D^l_t(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$,

$$p_1^i(1) = p_{1,1}^i(x,\dot x,\ldots,\overset{(2\cdot1-1)}{x}) = \sum_{l=0}^{1-1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\overset{(1)}{x})}{\partial \overset{(l+1)i}{x}}\Big) = \frac{\partial L(x,\overset{(1)}{x})}{\partial \overset{(1)i}{x}} = \frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^i},$$

$$L(x(\bar x),\dot x(\bar x)) = \bar L(\bar x,\dot{\bar x}),$$

где $x = x(\bar x) = S(\bar x)$ – невырожденная замена координат.

Для функции энергии произвольного ранга *n* можно написать

$$H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x,\dot x\ldots,\overset{(n)}{x}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{k,n}^i(x,\ldots,\overset{(2n-k)}{x})\,\overset{(k)i}{x}$$

Тогда, в частности, для $n = 1$, получим

$$H_1(L,x) = H(L,x,1) = -L(x,\dot x) + \sum_{k=1}^{1}\sum_{i=1}^{m} p_{1,1}^i\,\overset{(1)i}{x} = -L(x,\dot x) + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial \dot x^i}\dot x^i =$$

$$= -\bar L(\bar x,\dot{\bar x}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x})}{\partial \bar x^k}\frac{\partial \bar x^k(x)}{\partial \dot x^i} + \frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}\frac{\partial \dot{\bar x}^k(x)}{\partial \dot x^i}\Big)\dot x^i = -\bar L(\bar x,\dot{\bar x}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^l}\dot{\bar x}^l =$$

$$= -\bar L(\bar x,\dot{\bar x}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^l}\dot{\bar x}^l = -\bar L(\bar x,\dot{\bar x}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}\delta_l^k\dot{\bar x}^l = -\bar L(\bar x,\dot{\bar x}) + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}\dot{\bar x}^k =$$

$$= -\bar L(\bar x,\dot{\bar x}) + \sum_{k=1}^{m}\overline{p_{1,1}^k}\,\dot{\bar x}^k = \bar H(\bar L,\bar x,1) = \bar H_1(\bar L,\bar x), \tag{42}$$

где $\delta_k^l = \begin{cases}1, k = l\\ 0, k \neq l\end{cases}$ – символ Кронекера,

то есть энергия порядка $n = 1$ является инвариантом относительно невырожденной замены координат.

В выражении (42) была использована **теорема 1**:

$$\frac{\partial x^k}{\partial \dot{\bar x}^i} = \frac{\partial D_t^0 x^k(\bar x)}{\partial D_t^1 \bar x^i} = \frac{\partial \overset{(0)k}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(1)i}{\bar x}} = 0 \text{ (так как } 0<1\text{)}, \quad \frac{\partial \dot x^k}{\partial \dot{\bar x}^i} = \frac{\partial \overset{(1)k}{x}}{\partial \overset{(1)i}{\bar x}} = C_1^1\cdot D_t^{1-1}\cdot\frac{\partial x^k(\bar x)}{\partial \bar x^i} = 1\cdot D_t^0\cdot\frac{\partial x^k(\bar x)}{\partial \bar x^i} = \frac{\partial x^k(\bar x)}{\partial \bar x^i}.$$

Таким образом, основная **теорема 9** проверена для $n=1$.

Для $n=2$ с невырожденной заменой координат $x = x(\bar x) = S(\bar x)$ имеем

$$L(x(\bar x),\dot x(\bar x),\ddot x(\bar x)) = \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x}),$$

$$p_1^i(2) = p_{1,2}^i(x,\dot x,\ldots,\overset{(2\cdot2-1)}{x}) = \sum_{l=0}^{2-1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\overset{(1)}{x},\overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(l+1)i}{x}}\Big) = \frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \dot x^i} - D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \ddot x^i}\Big),$$

$$p_2^i(2) = p_{2,2}^i(x,\dot x,\ldots,\overset{(2\cdot2-1)}{x}) = \sum_{l=0}^{2-2}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\overset{(1)}{x},\overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(l+2)i}{x}}\Big) = \frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \ddot x^i}.$$

$$H_2(L,x)+L(x,\dot x,\ddot x)=H(L,x,2)+L(x,\dot x,\ddot x)=\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{m}p^i_{k,2}(x,\dots,\overset{(2\cdot 2-k)}{x})\overset{(k)i}{x}=\sum_{i=1}^{m}((\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \dot x^i}-D_t(\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \ddot x^i}))\dot x^i+$$

$$+\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \ddot x^i}\ddot x^i)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}C_2^1 D_t(\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i})-D_t(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}))\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}\dot{\bar x}^j+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}(D_t(\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j})\dot{\bar x}^j+\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}\ddot{\bar x}^j)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}D_t(\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i})-$$

$$-D_t(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k})\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i})\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}\dot{\bar x}^j+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}(D_t(\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j})\dot{\bar x}^j+\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}\ddot{\bar x}^j)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}\dot{\bar x}^j+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\dot{\bar x}^j)\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}-D_t(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k})\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}\dot{\bar x}^j+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\dot{\bar x}^j(D_t(\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i})\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}+\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}D_t(\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}))=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(((\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}-D_t(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}))\dot{\bar x}^j+$$

$$+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\dot{\bar x}^j)\delta^k_j+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\dot{\bar x}^j D_t(\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}))=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}-D_t(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}))\dot{\bar x}^k+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\ddot{\bar x}^k=$$

$$=\bar H(\bar L,\bar x,2)+\bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x}),$$

где $D_t(\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j})=D_t(\delta^k_j)=0$, $\delta^k_j=\begin{cases}1, k=j\\ 0, k\neq j\end{cases}$ − символ Кронекера.

Таким образом, утверждение **теоремы 9** проверено для случая $n=2$.

Замечание 6. При $p>n$ энергия системы при замене локальных координат, вообще говоря, не сохраняется.

Рассмотрим случай $p=2,\ n=1$ (старший порядок производной выше ранга энергии).

$L(x(\bar x),\dot x(\bar x),\ddot x(\bar x))=\bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})$ с невырожденной заменой $x=x(\bar x)=S(\bar x)$.

$$H_1(L,x)=H(L,x,1)=-L(x,\dot x,\ddot x)+\sum_{k=1}^{1}\sum_{i=1}^{m}p^i_{1,1}\overset{(1)i}{x}=-L(x,\dot x,\ddot x)+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \dot x^i}\dot x^i=$$

$$=-\bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \bar x^k}\frac{\partial \bar x^k(x)}{\partial \dot x^i}+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \dot{\bar x}^k}\frac{\partial \dot{\bar x}^k(x)}{\partial \dot x^i}+\frac{\partial \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\ddot{\bar x})}{\partial \ddot{\bar x}^k}\frac{\partial \ddot{\bar x}^k(x)}{\partial \dot x^i}))\dot x^i=$$

$$= -\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^{k}}\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^{i}}{\partial \bar{x}^{l}}\dot{\bar{x}}^{l} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \ddot{\bar{x}}^{k}}C_{2}^{1}D_{t}^{2-1}\left(\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\right)\frac{\partial x^{i}}{\partial \bar{x}^{l}}\dot{\bar{x}}^{l} =$$

$$= -\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^{k}}\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{i}}{\partial \bar{x}^{l}}\dot{\bar{x}}^{l} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \ddot{\bar{x}}^{k}}C_{2}^{1}D_{t}^{2-1}\left(\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\right)\frac{\partial x^{i}}{\partial \bar{x}^{l}}\dot{\bar{x}}^{l} =$$

$$= -\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^{k}}\delta_{l}^{k}\dot{\bar{x}}^{l} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \ddot{\bar{x}}^{k}}C_{2}^{1}D_{t}^{2-1}\left(\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\right)\frac{\partial x^{i}}{\partial \bar{x}^{l}}\dot{\bar{x}}^{l} =$$

$$= -\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^{k}}\dot{\bar{x}}^{k}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \ddot{\bar{x}}^{k}}C_{2}^{1}D_{t}^{2-1}\left(\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\right)\frac{\partial x^{i}}{\partial \bar{x}^{l}}\dot{\bar{x}}^{l} =$$

$$= \bar{H}(\bar{L},\bar{x},1) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}})}{\partial \ddot{\bar{x}}^{k}}2D_{t}\left(\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{i}}\right)\frac{\partial x^{i}}{\partial \bar{x}^{l}}\,. \qquad (43)$$

Таким образом, второе слагаемое в формуле (43), вообще говоря, не равно 0, препятствует сохранению энергии при невырожденной замене локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$. То есть при $p > n$ энергия системы при замене локальных координат не сохраняется.

Рассмотренные связи фундаментальных в физике и природе величин импульса и энергии подтверждают законы сохранения импульса, и энергии в зависимости от порядка старшей производной по времени от аргументов функции Лагранжа. Работа имеет непосредственное отношение к дифференциальной геометрии в векторных полях и их расслоениях, а также к таким приложениям, как теоретическая механика, теоретическая физика, квантовая механика, физика элементарных частиц. Доказана инвариантность энергии системы ранга *n*, состояние которой описывается гладкой функцией, определенной в расслоенном пространстве скоростей.

Литература:

1. В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко Современная геометрия. Методы и приложения, М.,1994,УРСС.
2. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.:Гостехиздат, 1956
3. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М.:Наука,1974.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.:Наука,1974.

5 Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц Теория поля. -М.:Наука.1973.507с.

6. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц Механика. - М.:Наука.1973.507с.
7. Э. М. Галеев, В.М.Тихомиров Краткий курс теории экстремальных задач. - М.: Издательство МГУ 1989.203 с.
8. Дирак П.Лекции по квантовой механики - М. Мир, 1968.

9 Л.Е. Евтушик, Ю.Г. Лумисте, Н. М. Остиану, А. П. Широков, Дифференциально-геометрические
структуры на многообразиях, Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом., 1979, том 9.
110. В.В.Трофимов, А.Т.Фоменко Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений. Издательство ”Факториал”, 1995.

TENSOR OF GENERAL ENERGY

Y. PASTUHOV , D. PASTUHOV, S. CHERNOV

Abstract We prove the invariance of energy of rank n of a system whose state is described by a smooth function defined in a stratified velocity space. $L : T^p X_m \to \Re \quad p \le n$.

$L(x,..., \overset{(n)}{x})$, $p^k_{i,n}$, $H_n(L,x)$ - a local function, momentum, and energy of rank n, respectively, when local coordinates (x) are chosen in the base X_m of the bundle $T^p X_m$.

$$H_n(L,x) = H(L,x,n) = -L(x, \dot{x}..., \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p^k_{i,n} \overset{(k)i}{x}$$

$\bar{L}(\bar{x},..., \overset{(n)}{\bar{x}})$, $\overline{p^j_{k,n}}$, $\bar{H}_n(\bar{L}, \bar{x})$ -a local function, impulse of order and energy of rank n, respectively, when choosing local coordinates (x) in the base X_m of the bundle $T^p X_m$.

Then $H(L,x,n) = \bar{H}(\bar{L}, \bar{x}, n)$

УДК 514

ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, СОХРАНЯЮЩИЕ ВАРИАЦИОННУЮ ЗАДАЧУ СО СТАРШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Ф. ПАСТУХОВ,
канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Ф. ПАСТУХОВ

Введенное в работе определение компоненты импульса вдоль струи и сохранение компоненты импульса ранга n вдоль струи порядка n-1 на экстремалях уравнения Эйлера-Лагранжа для групп преобразований, сохраняющих вариационную задачу, является прямым и естественным обобщением определения компоненты импульса первого ранга вдоль векторного поля (струи нулевого порядка), связанного с однопараметрической группой преобразований, сохраняющих функцию Лагранжа, зависящую от производных нулевого и первого порядков. Для экстремалей уравнения Эйлера-Лагранжа доказано свойство сохранения компоненты импульса ранга n вдоль струи порядка n-1, связанной с группой преобразований, сохраняющей вариационную задачу со старшими производными:

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x))p_{k,n}^i)=0,$$

где $S:\Re\times X_m \to X_m$ $S_\tau : X_m \to X_m, \forall \tau \in \Re$ - однопараметрическая группа преобразований, сохраняющая функцию $L:T^n X_m \to \Re$:

$$\frac{d}{d\tau}L(S_\tau(x), D_t S_\tau(x), D_t^2 S_\tau(x),..., D_t^{(n)} S_\tau(x))|_{\tau=0}=0\ \forall x\in X_m$$

$j_x^{n-1}X^i(x)=(X^i(x), D_t^1 X^i(x), D_t^2 X^i(x),..., D_t^{n-1}X^i(x))$ - струя порядка n-1, связанная, с группой преобразований $S_\tau : X_m \to X_m$, $X^i(x)=\frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$ $i=\overline{1,m}$

Ключевые слова: *уравнения Эйлера-Лагранжа, гладкие многообразия, расслоенное пространство скоростей, импульс системы, тензор энергии, тензор обобщенного импульса, невырожденная функция.*

Введение. Э. Галуа предложил классифицировать алгебраические уравнения по их группам симметрии. Ф. Клейн предложил взять идею симметрии в качестве единого принципа при построении различных геометрий. Выйдя за пределы геометрии, эта идея, развиваясь, сделала очевидным тот факт, что принцип симметрии служит той единственной основой, которая может объединить все разрозненные части огромного здания современной математики. Клейн развил свою концепцию в физике и механике. Программа Клейна как задача поиска различных форм симметрии выходит за рамки не только геометрии, но и всей математики в целом, превращается в проблему поиска единого принципа для всего естествознания. В 1872 году Феликс Клейн представил сенату Эрлангенского университета и философскому факультету этого университета своё «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований», получившее название «Эрлангенской программы». Клейн рассматривает иерархию многообразий - пространств любого числа измерений и соответственных геометрий, положив в основу их определения понятия инварианта, введённое в математику за двадцать лет да этого. В элементарной геометрии преобразованиями, переходами от одних переменных к другим служат прежде всего движения, переносы и вращения геометрических фигур, когда сами фигуры, расстояния между образующими их точками не меняются. Пространство, в котором происходят подобные переносы, называется метрическим, его инвариант - расстояние, определённое, например, теоремой Пифагора: вводятся прямоугольные координаты, разности между старыми и новыми координатами переносимой точки рассматриваются как катеты прямоугольного треугольника, расстоянием между новым и старым положением точек становится гипотенуза этого треугольника, её квадрат равен сумме квадратов разностей координат. Это - инвариант Эвклидовой геометрии. Есть более сложные геометрии, где инвариантами служат иные выражения: в проективной геометрии инварианты - уже не расстояния между точками, не величина и форма геометрической фигуры, а только форма, - соотношения между расстояниями, треугольник при проективном преобразовании может стать меньше, по остается подобным себе. Содержание истории философии – преобразование самых общих понятий, самые радикальные изменения, охватывающие основные представления о мире и методы его познания».

Фундаментальность законов сохранения заключается в их универсальности. Они справедливы при изучении любых физических процессов (механических, тепловых, электромагнитных). Они одинаково применимы в релятивистском и нерелятивистском движении, в микромире, где справедливы квантовые представления, и в макромире, с его классическими представлениями.

Законы сохранения имеют важное значение не только в механике, но и в физике вообще. Научное и методологическое значение законов сохранения определяет их исключительная общность и универсальность. Благодаря той особой роли, которую играют законы сохранения в физике, они являются важнейшим элементом современной научной картины мира.

Дифференциально-геометрическое рассмотрение импульса и энергии в физической и математической постановке изложено в литературе [1–10, 12-16]. Свойства тензора энергии-импульса при простейших линейных преобразованиях координат - времени объясняет законы сохранения импульса в макроскопической системе. Но тензор энергии-импульса в дифференциальной форме является инвариантным относительно произвольного невырожденного преобразования координат, что приводит к локальным законам сохранения энергии-импульса, например, в физике элементарных частиц. Функция Лагранжа определяет некоторую вариационную задачу, например, минимизацию интеграла действия в механической системе и динамику этой системы (уравнения Эйлера – Лагранжа) [6]. Если интегрант (подынтегральная функция в простейшей вариационной задаче) вырожден относительно переменных времени либо координат, то это вырождение приводит соответственно к закону сохранения энергии, либо импульса относительно данной координаты [7]. Представленная работа является продолжением работ [9, 10,13,16].

Основные определения и математические объекты.

Пусть X_m - гладкое многообразие размерности m, $T^n X_m$ - гладкое расслоенное пространство скоростей порядка n с базой расслоения X_m.

$L: T^n X_m \to \Re$-невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$ [9].

Теорема 1[11]. Пусть $\bar{x}^i = S^i(x_1, x_2, ..., x_m)$ $S:(x) \to (\bar{x})$, - невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m, p \ge \max(s,l)$ $i = \overline{1,m}$, тогда

$$\frac{\partial x^{(l)i}(\overline{x}, \dot{\overline{x}}, ..., \overset{(l)}{\overline{x}})}{\partial \overset{(s)j}{\overline{x}}} = \begin{cases} C_l^s \cdot D_t^{l-s}\left(\dfrac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j}\right), C_l^s = \dfrac{l!}{s!\cdot(l-s)!}, l! = \prod\limits_{k=1}^{l} k, l \geq s \\ 0, l < s \end{cases} \tag{1}$$

Определение 1. Система функций $P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$

$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x, \dot{x}, ..., \overset{(2\min(n,p)-k)}{x}) = \sum\limits_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\dfrac{\partial L(x, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$ $\quad k = \overline{0,n}, i = \overline{1,m}$ называется обобщенным импульсом ранга n для функции $L: T^p X_m \to \Re$ в локальных координатах (x) базы X_m расслоения $T^p X_m$,

где $L(x, \dot{x}, ..., \overset{(p)}{x})$ - локальная запись функции L при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

Функция $p_{k,n}^i$ называются $k-ой$ компонентой обобщенного импульса P_n ранга n по $i-$ой координате или импульсами порядка k (k-импульсами) по $i-$ой координате обобщенного импульса P_n ранга n.

Функция $p_{k,n}^i(x, \dot{x}, ..., \overset{(2\min(n,p)-k)}{x})$ называются $k-ой$ компонентой обобщенного импульса P_n ранга n по $i-$ой координате или импульсами порядка k (k-импульсами) по $i-$ой координате обобщенного импульса P_n ранга n.

Замечание 1. Обобщенный импульс ранг n определен для функций $L: T^p X_m \to \Re$

Из определения $p_k^i(n) = \sum\limits_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\dfrac{\partial L(x, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$ следует, что при $k > p, l \geq 0 \Rightarrow l + k > p \Rightarrow \dfrac{\partial L(x, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и все $p_k^i(n) \equiv 0$ (тривиальные импульсы), то есть для нетривиальных импульсов $k \leq p$. Поскольку $k \leq n, k \leq p \Rightarrow k \leq \min(n, p)$, то в определении2 можно считать, что $k = \overline{0, \min(n, p)}, i = \overline{1, m}$

Максимальный порядок производной по t в $p_k^i(n)$ равен $l + k + k = 2 \cdot l + k$

При $l + k > p \Rightarrow \dfrac{\partial L(x, ..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и коэффициент при производной $\overset{(l+k)i}{x}$ равен 0, значит, при определении максимального порядка производной по t можно считать $l + k \leq p$, кроме того:

$$l \leq n - k \Leftrightarrow l + k \leq n \Rightarrow l + k \leq \min(n, p) \Rightarrow l \leq \min(n, p) - k \Rightarrow 2 \cdot l + k \leq 2 \cdot (\min(n, p) - k) + k =$$

$$= 2 \cdot \min(n, p) - 2 \cdot k + k = 2 \cdot \min(n, p) - k$$

Хотя более грубая оценка порядка старшей производной по t в $p_k^i(n)$ дает $l \leq n - k \Leftrightarrow l + k \leq n \Rightarrow 2 \cdot l + k \leq 2 \cdot (n - k) + k = 2 \cdot n - 2 \cdot k + k = 2 \cdot n - k$

При $p > n, l+k \le n-k+k = n$ максимальный порядок производной по t в $L(x,..., \overset{(p)}{x}))$ больше максимального порядка производной по t переменной по которой производится частное дифференцирование в $p_k^i(n) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$.

При $p < n$, поскольку $l+k \le n-k+k = n$ при $l+k > p$ $\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и часть членов в сумме $\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$ будет тождественно равна 0. Пограничным является случай $p = n$, именно тот случай будет рассмотрен в дальнейшем без ограничения общности рассмотрения.

При $p = n$ в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$ получаем импульсы в преобразовании Остроградского:

$$p_{0,n}^i = \sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}) = \frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial x^i} - D_t(\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \dot{x}^i}) + ... + (-1)^n D_t^n(\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}})$$

нуль-импульс (функционал в уравнении Эйлера-Лагранжа).

Теорема2 [9] (дифференциальная связь импульсов k-ого и (k-1)-ого порядков).

$L: T^n X_m \to \Re -$ невырожденная функция Лагранжа,. $L(x,..., \overset{(n)}{x})$, $p_{k,n}^i(x, \dot{x},..., \overset{(2n-k)}{x})$, $p_{k-1,n}^i(x, \dot{x},..., \overset{(2n-k+1)}{x}$ -локальная запись функции L и импульсов $k-ого$ и $(k-1)$ порядков при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$.

Тогда $D_t p_{k,n}^i(x, \dot{x},..., \overset{(2n-k)}{x}) = \frac{\partial L(x, \dot{x},..., \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p_{k-1,n}^i(x, \dot{x},..., \overset{(2n-k+1)}{x})$, (2)

где $p_{k,n}^i(x, \dot{x},..., \overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x, \dot{x},..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}})$ - импульс k-ого порядка,

где $p_{k-1,n}^i(x, \dot{x},..., \overset{(2n-k+1)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-(k-1)}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x, \dot{x},..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l+k-1)i}})$ - импульс (k-1) –ого порядка

Имеет место следующая:

Теорема 3 (о связи импульсов $k-ого$ порядка рангов n и $n+1$). Пусть $L: T^p X_m \to \Re$.

$L(x, \dot{x},..., \overset{(p)}{x})$- локальная запись функции $L: T^p X_m \to \Re$ при выборе локальных координат в базе расслоения X_m,

$$p^i_{k,n} = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)$$ $k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m}$ -импульс k-ого порядка ранга n,

$$p^i_{k,n+1} = \sum_{l=0}^{n+1-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big)$$ - импульс k-ого порядка ранга n +1

Тогда имеет место следующее соотношение:

$$p^i_{k,n+1} = p^i_{k,n} + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big) \tag{3}$$

Доказательство:

$$p^i_{k,n+1} = \sum_{l=0}^{n+1-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big) + (-1)^{n+1-k} D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1-k+k)i}{x}}\Big) =$$

$$\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\Big) + (-1)^{n+1-k} D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big) = p^i_{k,n} + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\Big)$$

Теорема доказана.

Теорема 4. $x=(x^1,x^2,\ldots,x^m), \bar{x}=(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\ldots,\bar{x}^m)$. Пусть $x^i = S^i(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_m)$ $S:(\bar{x})\to(x)$, -невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка T^pX_m $i,k=\overline{1,m}$, $S^{-1}:(x)\to(\bar{x})$-обратное отображение, тогда

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^k} = \delta^i_k \qquad \sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{x}^i(x)}{\partial x^j}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} = \delta^i_k \qquad \delta^k_i = \begin{cases}1, i=k\\ 0, i\neq k\end{cases} - \textit{символ Кронеккера} \tag{4}$$

Доказательство. $x^i = x^i(\bar{x}^1(x),\bar{x}^2(x),\ldots,\bar{x}^m(x))$. По теореме о сложной функции

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^k} = \delta^i_k = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j(x)}{\partial x^k}$$

Аналогично доказывается равенство: $\dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^k} = \delta^i_k = \sum_{j=1}^m \dfrac{\partial \bar{x}^i(x)}{\partial x^j}\dfrac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}$ Теорема доказана.

Определение 2. Однопараметрическая группа преобразований $S:\Re\times X_m\to X_m$, $S_\tau: X_m\to X_m, \forall\tau\in\Re$ сохраняет лагранжиан $L:T^nX_m\to\Re$, если $\dfrac{d}{d\tau}L(S_\tau(x),D_tS_\tau(x),D_t^2S_\tau(x),\ldots,D_t^{(n)}S_\tau(x))|_{\tau=0}=0\ \forall x\in X_m$

$D_t^kS_\tau(x)|_{\tau=0}: X_m\to T^kX_m$ - оператор $k-$кратного полного дифференцирования по переменной t. С каждой однопараметрической группой преобразований можно связать однопараметрическое семейство векторных полей $X^i(x,\tau)) = \dfrac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}$, $\forall\tau\in\Re$

$X^i(x)=\dfrac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$ $\quad i=\overline{1,m}$ (струй 0 -ого порядка) и однопараметрическое семейство струй порядка $n-1$: $j_x^{n-1}X^i(x,\tau)=(X^i(x,\tau),D_t^1X^i(x,\tau),D_t^2X^i(x,\tau),...,D_t^{n-1}X^i(x,\tau))$, которые будем называть связанными (индуцированные) с группой преобразований $S_\tau:X_m\to X_m$.

Векторное поле $X^i(x)=\dfrac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$ и струю порядка $n-1$: $j_x^{n-1}X^i(x,\tau)=(X^i(x,\tau),D_t^1X^i(x,\tau),D_t^2X^i(x,\tau),...,D_t^{n-1}X^i(x,\tau))$ также будем называть связанными (индуцированные) с группой преобразований $S_\tau:X_m\to X_m$.

Математическая постановка задачи. Ставится следующая задача:

Пусть $L:T^nX_m\to\Re$ - гладкая функция, заданная в расслоенном пространстве скоростей T^nX_m многообразия X_m $L(x,...,\overset{(n)}{x})$, $p_i^k(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})$ - локальная запись функции L и импульсов $k-ого$ порядков при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения T^nX_m. $p_{k,n}^i=\sum\limits_{l=0}^{n-k}(-1)^lD_t^l(\dfrac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l+k)i}{x}})$ $k=\overline{1,n},i=\overline{1,m}$-

$S:\Re\times X_m\to X_m$ $\qquad S_\tau:X_m\to X_m,\forall\tau\in\Re$ -однопараметрическая группа преобразований, сохраняющая функцию $L:T^nX_m\to\Re$:

$$\frac{d}{d\tau}L(S_\tau(x),D_tS_\tau(x),D_t^2S_\tau(x),...,D_t^{(n)}S_\tau(x))|_{\tau=0}=0\ \forall x\in X_m$$

Задача данной работы - установить закон сохранения компоненты импульса

$p_{k,n}^i=\sum\limits_{l=0}^{n-k}(-1)^lD_t^l(\dfrac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l+k)i}{x}})$ $k=\overline{1,n},i=\overline{1,m}$- (импульсы k-ого порядка ранга n) вдоль струи: $j_x^{n-1}X^i(x)=(X^i(x),D_t^1X^i(x),D_t^2X^i(x),...,D_t^{n-1}X^i(x))$, связанной с группой преобразований $S_\tau:X_m\to X_m$, $X^i(x)=\dfrac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}$ $\quad i=\overline{1,m}$, на экстремалях уравнения Эйлера-Лагранжа $p_{0,n}^i=\sum\limits_{l=0}^{n-0}(-1)^lD_t^l(\dfrac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}})=0$, то есть показать, что

$D_t(\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i)=0$ при условиях $p_{0,n}^i=\sum\limits_{l=0}^{n-0}(-1)^lD_t^l(\dfrac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}})=0$ и

$$\frac{d}{d\tau}L(S_\tau(x),D_tS_\tau(x),D_t^2S_\tau(x),...,D_t^{(n)}S_\tau(x))|_{\tau=0}=0\ \forall x\in X_m$$

Имеет место следующая:

Теорема 5. Пусть $S:\Re\times X_m\to X_m,S_\tau:X_m\to X_m,\forall\tau\in\Re$ однопараметрическая группа преобразований $L:T^nX_m\to\Re$- гладкая функция в расслоенном пространстве скоростей T^nX_m на гладком многообразии X_m

$p^i_{0,n} = \sum_{l=0}^{n-0} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}}\right)$ - импульс 0-ого порядка (функционал в уравнении Эйлера-Лагранжа) $\quad X^i(x,\tau) = \frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}$, тогда

$$\frac{dL(S_\tau(x), D_t S_\tau(x), D_t^2 S_\tau(x),...,D_t^{(n)} S_\tau(x))}{d\tau} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x,\tau)) \qquad (5)$$

Доказательство.

$$\frac{dL(S_\tau(x), D_t S_\tau(x), D_t^2 S_\tau(x),...,D_t^{(n)} S_\tau(x))}{d\tau} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^i}\frac{dS^i_\tau(x)}{d\tau} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \dot{x}^i}\frac{d(D_t^1 S^i_\tau(x))}{d\tau} +$$

$$+\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \ddot{x}^i}\frac{d(D_t^2 S^i_\tau(x))}{d\tau} + \ ... \ + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}}\frac{d(D_t^n S^i_\tau(x))}{d\tau} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\frac{d(D_t^k S^i_\tau(x))}{d\tau} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k\left(\frac{dS^i_\tau(x)}{d\tau}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x,\tau))$$

В частности при n=1

$$\frac{dL(S_\tau(x), D_t S_\tau(x))}{d\tau} = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(1)}{x})}{\partial x^i} X^i(x,\tau) + \frac{\partial L(x,...,\overset{(1)}{x})}{\partial \ddot{x}^i} D_t(X^i(x,\tau))\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(1)}{x})}{\partial x^i} X^i(x,\tau) + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(1)}{x})}{\partial \ddot{x}^i} D_t(X^i(x,\tau)) = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(1)}{x})}{\partial x^i} X^i(x,\tau) + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(1)}{x})}{\partial \ddot{x}^i} D_t(X^i(x,\tau)) =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(1)}{x})}{\partial x^i} X^i(x,\tau) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(1)}{x})}{\partial \ddot{x}^i}\frac{\partial X^i(x,\tau)}{\partial x^k}\ddot{x}^k\right.$$.Теорема доказана.

Имеет место следующая

Теорема 6. Пусть $S:\Re\times X_m \to X_m \quad S_\tau : X_m \to X_m, \forall\tau\in\Re$ - группа преобразований в X_m. $L:T^n X_m \to \Re$ - гладкая вещественнозначная функция в расслоении скоростей $T^n X_m$. $p^i_{k,n}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$ $i=\overline{1,m}$ -импульсы k-ого порядка ранга n $X^i(x,\tau)) = \frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}$ -однопараметрическое семейство векторных полей, индуцированное группой $S_\tau : X_m \to X_m$. Тогда имеет место равенство:

$$D_t\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p^i_{0,n} \qquad (6)$$

Доказательство.

По теореме 2. $D_t p^i_{k,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x}) = \dfrac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k+1)}{x}).$

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t(D_t^{k-1}(X^i(x,\tau)))p^i_{k,n} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))D_t p^i_{k,n} =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}} - p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k+1)}{x})) =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k+1)}{x}) \quad (7)$$

Вводим новую переменную $k1 = k-1 \Rightarrow k = k1+1$ $\quad 1 \le k \le n \Rightarrow 0 \le k1 \le n-1$, подставим в (7):

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k+1)}{x}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-(k-1))}{x}) =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k1=0}^{n-1} D_t^{k1}(X^i(x,\tau))(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k1)i}{x}}) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k1=0}^{n-1} D_t^{k1}(X^i(x,\tau))p^i_{k1,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k1)}{x}) =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1} D_t^{k}(X^i(x,\tau))(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1} D_t^{k}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-k)}{x}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n} +$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1} D_t^{k}(X^i(x,\tau))(p^i_{k,n} - p^i_{k,n}) - \sum_{i=1}^{m} D_t^0 X^i(x,\tau)p^i_{0,n} + \sum_{i=1}^{m} D_t^n X^i(x,\tau)p^i_{n,n} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1} D_t^{k}(X^i(x,\tau))(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}) =$$

$$-\sum_{i=1}^{m} D_t^0 X^i(x,\tau)p^i_{0,n} + \sum_{i=1}^{m} D_t^n X^i(x,\tau)\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1} D_t^{k}(X^i(x,\tau))(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}) =$$

$$-\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)p^i_{0,n} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n} D_t^{k}(X^i(x,\tau))(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}})$$

Этот результат может быть получен и по-другому. Проведем доказательство индукцией по n. При $n=1$ в формуле (6) получим:

$$p^i_{k,n} = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}) \quad k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m}$$-импульс k-ого порядка ранга n

$$p^i_{1,1} = \sum_{l=0}^{1-1}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+1)i}{x}}) = (-1)^0 D_t^0(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \overset{(0+1)i}{x}}) = \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \overset{(1)i}{x}} = \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}$$

$$p^i_{0,1} = \sum_{l=0}^{1-0}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+0)i}{x}}) = (-1)^0 D_t^0(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \overset{(0+0)i}{x}}) + (-1)^1 D_t^1(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \overset{(1+0)i}{x}}) = \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i} - D_t(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i})$$

По формуле (6) нужно проверить выполнение равенства:

$$D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{k,n}\Big)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)}{x}{}^{i}}D_t^{k}(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)\,p^i_{0,n}$$

При n=1 (6) имеет вид:

$$D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n=1} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{k,n}\Big)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n=1}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)}{x}{}^{i}}D_t^{k}(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)\,p^i_{0,n=1} \qquad (8)$$

Преобразуем левую часть (8):

$$D_t\Big(\sum_{i=1}^{m} D_t^{1-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{1,1}\Big)=D_t\Big(\sum_{i=1}^{m} D_t^{0}(X^i(x,\tau))\,p^i_{1,1}\Big)=D_t\Big(\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\,p^i_{1,1}\Big)=D_t\Big(\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\,p^i_{1,1}\Big)=$$

$$\sum_{i=1}^{m} D_t(X^i(x,\tau))\,p^i_{1,1}+\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)D_t(p^i_{1,1})=\sum_{i=1}^{m} D_t(X^i(x,\tau))\,p^i_{1,1}+\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)D_t(p^i_{1,1})=$$

$$\sum_{i=1}^{m} D_t(X^i(x,\tau))\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^{i}}+\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^{i}}\Big)=D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^{i}}X^i(x,\tau)\Big) \qquad (9)$$

Преобразуем правую часть (8):

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n=1}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)}{x}{}^{i}}D_t^{k}(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)\,p^i_{0,n=1}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^{i}}D_t^{0}(X^i(x,\tau))+\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^{i}}D_t^{1}(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)\,p^i_{0,n=1}=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^{i}}X^i(x,\tau)\Big)+\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^{i}}D_t^{1}(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^{i}}-D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^{i}}\Big)\Big)=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^{i}}X^i(x,\tau)+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^{i}}D_t^{1}(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^{i}}+\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^{i}}\Big)=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^{i}}D_t^{1}(X^i(x,\tau))+\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^{i}}\Big)=D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^{i}}X^i(x,\tau)\Big) \qquad (10)$$

Формулы (9), (10) совпадают, база индукции при n=1 проверена.

При $n=2$ в формуле (6) получим:

$$p^i_{k,n}=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(l+k)}{x}{}^{i}}\Big)\quad k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m}$$ -импульс k-ого порядка ранга n

$$p^i_{1,2}=\sum_{l=0}^{2-1}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(l+1)}{x}{}^{i}}\Big)=(-1)^0D_t^0\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \overset{(0+1)}{x}{}^{i}}\Big)+(-1)^1D_t^1\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \overset{(1+1)}{x}{}^{i}}\Big)=$$

$$\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \overset{(1)}{x}{}^{i}}=\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^{i}}-D_t^1\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^{i}}\Big)$$

$$p^i_{2,2}=\sum_{l=0}^{2-2}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(0+2)}{x}{}^{i}}\Big)=(-1)^0D_t^0\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \overset{(0+2)}{x}{}^{i}}\Big)=\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^{i}}$$

$$p_{0,2}^i=\sum_{l=0}^{2-0}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(l+0)i}{x}}\Big)=(-1)^0 D_t^0\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \overset{(0+0)i}{x}}\Big)+(-1)^1 D_t^1\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \overset{(0+1)i}{x}}\Big)+(-1)^2 D_t^2\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \overset{(0+2)i}{x}}\Big)=$$

$$\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial x^i}-D_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \dot x^i}\Big)+D_t^2\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \ddot x^i}\Big)$$

По формуле (6) нужно проверить выполнение равенства:

$$D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i\Big)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)p_{0,n}^i$$

При n=2 (6) имеет вид:

$$D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n=2}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i\Big)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n=2}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)p_{0,n=2}^i$$

Преобразуем левую часть последнего выражения:

$$D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}D_t^{1-1}(X^i(x,\tau))p_{1,2}^i+D_t^{2-1}(X^i(x,\tau))p_{2,2}^i\Big)=D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}D_t^{0}(X^i(x,\tau))p_{1,2}^i+D_t(X^i(x,\tau))p_{2,2}^i\Big)=$$

$$D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau))p_{1,2}^i+D_t(X^i(x,\tau))p_{2,2}^i\Big)=\sum_{i=1}^{m}D_t(X^i(x,\tau))p_{1,2}^i+X^i(x,\tau)D_t(p_{1,2}^i)+D_t^2(X^i(x,\tau))p_{2,2}^i+D_t(X^i(x,\tau))D_t(p_{2,2}^i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}D_t(X^i(x,\tau))p_{1,2}^i+\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)D_t(p_{1,2}^i)+\sum_{i=1}^{m}D_t^2(X^i(x,\tau))p_{2,2}^i+\sum_{i=1}^{m}D_t(X^i(x,\tau))D_t(p_{2,2}^i) \qquad (12)$$

По теореме 2:

$$D_t\,p_{k,n}^i(x,\dot x,\dots,\overset{(2n-k)}{x})=\frac{\partial L(x,\dot x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}-p_{k-1,n}^i(x,\dot x,\dots,\overset{(2n-k+1)}{x}).$$

$$D_t\,p_{1,2}^i(x,\dot x,\ddot x)=\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \overset{(1-1)i}{x}}-p_{1-1,2}^i(x,\dot x,\ddot x)=\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial x^i}-p_{1-1,2}^i(x,\dot x,\ddot x,\overset{(3)}{x},\overset{(4)}{x})=\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial x^i}-p_{0,2}^i(x,\dots,\overset{(4)}{x})$$

$$D_t\,p_{2,2}^i(x,\dot x,\ddot x)=\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \overset{(2-1)i}{x}}-p_{2-1,2}^i(x,\dot x,\ddot x)=\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \dot x^i}-p_{2-1,2}^i(x,\dot x,\ddot x,\overset{(3)}{x},\overset{(4)}{x})=\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \dot x^i}-p_{1,2}^i(x,\dots,\overset{(3)}{x})$$

На основании последний результат можно переписать так:

$$\sum_{i=1}^{m}D_t(X^i(x,\tau))p_{1,2}^i+\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)D_t(p_{1,2}^i)+\sum_{i=1}^{m}D_t^2(X^i(x,\tau))p_{2,2}^i+\sum_{i=1}^{m}D_t(X^i(x,\tau))D_t(p_{2,2}^i)=$$

$$\sum_{i=1}^{m}D_t(X^i(x,\tau))p_{1,2}^i+X^i(x,\tau)\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial x^i}-p_{0,2}^i(x,\dots,\overset{(4)}{x})\Big)+D_t^2(X^i(x,\tau))p_{2,2}^i+D_t(X^i(x,\tau))\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \dot x^i}-p_{1,2}^i\Big)=$$

$$\sum_{i=1}^{m}D_t(X^i(x,\tau))p_{1,2}^i+X^i(x,\tau)\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial x^i}-p_{0,2}^i(x,\dots,\overset{(4)}{x})\Big)+D_t^2(X^i(x,\tau))p_{2,2}^i+D_t(X^i(x,\tau))\Big(\frac{\partial L(x,\dot x,\ddot x)}{\partial \dot x^i}-p_{1,2}^i\Big)=$$

$$\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \overset{}{x}{}^{i}} - p^i_{0,2}(x,\ldots,\overset{(4)}{x})\Big) + D_t^2(X^i(x,\tau))\,p^i_{2,2} + D_t(X^i(x,\tau))\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^{i}}\Big) =$$

$$\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial x^{i}} - p^i_{0,2}(x,\ldots,\overset{(4)}{x})\Big) + D_t^2(X^i(x,\tau))\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^{i}} + D_t(X^i(x,\tau))\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^{i}}\Big) =$$

$$\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial x^{i}} + D_t(X^i(x,\tau))\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^{i}} + D_t^2(X^i(x,\tau))\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^{i}} - X^i(x,\tau)\,p^i_{0,2}(x,\ldots,\overset{(4)}{x}) =$$

$$\sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial x^{i}} + D_t(X^i(x,\tau))\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}^{i}} + D_t^2(X^i(x,\tau))\frac{\partial L(x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}^{i}} - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\,p^i_{0,2}(x,\ldots,\overset{(4)}{x}) =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{2}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(2)}{x})}{\partial \overset{(k)}{x}{}^{i}} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\,p^i_{0,n}$$

Утверждение теоремы проверено для n=2

Пусть утверждение теоремы для n:

$$D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{k,n}\Big) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)}{x}{}^{i}} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\,p^i_{0,n}$$

Докажем, что оно верно для n+1:

$$D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n+1} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{k,n+1}\Big) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)}{x}{}^{i}} D_t^k(X^i(x,\tau)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)\,p^i_{0,n+1} \quad (11)$$

По теореме 3 (формула 3) $\quad p^i_{k,n+1} = p^i_{k,n} + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}\Big(\dfrac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)}{x}{}^{i}}\Big)$

$$p^i_{k,n+1} = \sum_{l=0}^{n+1-k}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(l+k)}{x}{}^{i}}\Big) \Rightarrow p^i_{n+1,n+1} = \sum_{l=0}^{n+1-(n+1)}(-1)^l D_t^l\Big(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(l+k)}{x}{}^{i}}\Big) = \frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)}{x}{}^{i}}$$

$$D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n+1} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{k,n+1}\Big) = D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{k,n+1} + D_t^{n+1-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{n+1,n+1}\Big) =$$

$$D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{k,n+1}\Big) + D_t^{n}(X^i(x,\tau))\,p^i_{n+1,n+1}\Big) = D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{k,n+1}\Big) + D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}(D_t^{n}(X^i(x,\tau))\,p^i_{n+1,n+1}\Big) =$$

$$D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{k,n+1}\Big) + D_t^{n}(X^i(x,\tau))\,p^i_{n+1,n+1}\Big) = D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{k,n+1}\Big) + \sum_{i=1}^{m} D_t(D_t^{n}(X^i(x,\tau))\,p^i_{n+1,n+1}\Big) \quad (12)$$

Подставим $\quad p^i_{k,n+1} = p^i_{k,n} + (-1)^{n+1-k} D_t^{n+1-k}\Big(\dfrac{\partial L(x,\ldots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)}{x}{}^{i}}\Big)$ при $\quad p = n+1 \quad$ в первой сумме в (12):

$$D_t\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))\,p^i_{k,n+1}\Big) + \sum_{i=1}^{m} D_t(D_t^{n}(X^i(x,\tau)\,p^i_{n+1,n+1}) =$$

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(p^i_{k,n}+(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}))) \; + \; \sum_{i=1}^{m} D_t(D_t^{n}(X^i(x,\tau))p^i_{n+1,n+1}$$

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n})+D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,..., \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}))+\sum_{i=1}^{m} D_t(D_t^{n}(X^i(x,\tau))p^i_{n+1,n+1})=$$

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n})+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})+\sum_{i=1}^{m} D_t(D_t^{n}(X^i(x,\tau))\frac{\partial L(x,..., \overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) \quad (13)$$

По предположению индукции первое слагаемое в сумме (13) равно:

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p^i_{k,n})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,..., \overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^{k}(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)p^i_{0,n} \quad (14)$$

По формуле (3):

$$p^i_{0,n+1} = p^i_{0,n}+(-1)^{n+1-0}D_t^{n+1-0}(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) = p^i_{0,n}+(-1)^{n+1}D_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) \quad (15)$$

Преобразуем второе слагаемое в сумме (13):

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}))=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t(D_t^{k-1}(X^i(x,\tau)))(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}))+$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k}D_t(D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}))=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k}(X^i(x,\tau)))(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}))+$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k}D_t^{n+2-k}(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})) \quad (16)$$

Вводим новую переменную и, преобразуя второе слагаемое последней суммы(16) , перепишем (16):

$$k1=k-1 \Rightarrow k=k1+1, 1\le k\le n \;\Rightarrow 0\le k1\le n-1,\; n+1-k=n-k1, n+2-k=n+1-k1 \quad :$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}))+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k1=0}^{n-1} D_t^{k1}(X^i(x,\tau)))(-1)^{n-k1}D_t^{n+1-k1}(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}))=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}))+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1} D_t^{k}(X^i(x,\tau)))(-1)^{n-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}))=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1} D_t^{k}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}))+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1} D_t^{k}(X^i(x,\tau)))(-1)^{n-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}))+$$

$$\sum_{i=1}^{m} D_t^{n}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-n}D_t^{n+1-n}(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})) \;+\sum_{i=1}^{m} D_t^{0}(X^i(x,\tau))(-1)^{n-0}D_t^{n+1-0}(\frac{\partial L(x,..., \overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}))=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}((-1)^{n-k}D_t^k(X^i(x,\tau))D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})(-1)^1+1))+\sum_{i=1}^{m}D_t^n(X^i(x,\tau))(-1)^1D_t^{n+1-n}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})+$$

$$\sum_{i=1}^{m}D_t^0(X^i(x,\tau))(-1)^{n-0}D_t^{n+1-0}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})=(-1)\sum_{i=1}^{m}D_t^n(X^i(x,\tau))D_t^1(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})+$$

$$\sum_{i=1}^{m}D_t^0(X^i(x,\tau))(-1)^nD_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})=(-1)\sum_{i=1}^{m}D_t^n(X^i(x,\tau))D_t^1(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})+\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)(-1)^nD_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) \tag{17}$$

Рассмотрим последнее слагаемое в сумме (13):

$$\sum_{i=1}^{m}D_t(D_t^n(X^i(x,\tau))\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})=\sum_{i=1}^{m}(D_t(D_t^n(X^i(x,\tau)))\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}+D_t^n(X^i(x,\tau))D_t(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}))=$$

$$\sum_{i=1}^{m}(D_t^{n+1}(X^i(x,\tau)))\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}+D_t^n(X^i(x,\tau))D_t(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}))=$$

$$\sum_{i=1}^{m}D_t^{n+1}(X^i(x,\tau)))\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}+\sum_{i=1}^{m}D_t^n(X^i(x,\tau))D_t(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) \tag{18}$$

Преобразуем левую часть доказываемого тождества (11), равную (13) и состоящую из трех слагаемых, равных соответственно правым частям (14), (17), (18):

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})+\sum_{i=1}^{m}D_t(D_t^n(X^i(x,\tau))\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)p_{0,n}^i+(-1)\sum_{i=1}^{m}D_t^n(X^i(x,\tau))D_t^1(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})+$$

$$\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)(-1)^nD_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})+\sum_{i=1}^{m}D_t^{n+1}(X^i(x,\tau)))\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}+\sum_{i=1}^{m}D_t^n(X^i(x,\tau))D_t(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)p_{0,n}^i+\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)(-1)^nD_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}D_t^{n+1}(X^i(x,\tau)))\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}} \tag{19}$$

Учитывая (15), объединим первое и последнее слагаемое в сумме (19) ,получим, что левая часть (11) равна:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)p_{0,n}^i+\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)(-1)^nD_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)p_{0,n}^i-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)(-1)^{n+1}D_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)(p_{0,n}^i+(-1)^{n+1}D_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}) \quad (20)$$

Преобразуем (20), учитывая (15):

$$p_{0,n+1}^i=p_{0,n}^i+(-1)^{n+1-0}D_t^{n+1-0}(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})=p_{0,n}^i+(-1)^{n+1}D_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)(p_{0,n}^i+(-1)^{n+1}D_t^{n+1}(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(n+1)i}{x}})=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n+1)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)p_{0,n+1}^i \quad (21)$$

Полученный результат (21) представляет правую часть доказываемого равенства (11). Теорема доказана.

Имеет место следующая

Теорема 7. Пусть $L:T^nX_m\to\Re$ - гладкая функция, заданная в расслоенном пространстве скоростей T^nX_m.

$L(x,...,\overset{(n)}{x})$, $p_i^k(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})$-локальная запись функции L и импульсов $k-ого$ порядков при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения T^nX_m. $p_{k,n}^i=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^lD_t^l(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}})$ $k=\overline{1,n},i=\overline{1,m}$-

$S:\Re\times X_m\to X_m$ $\quad S_\tau:X_m\to X_m,\forall\tau\in\Re$ -однопараметрическая группа преобразований, сохраняющая функцию $L:T^nX_m\to\Re$:

$$\frac{d}{d\tau}L(S_\tau(x),D_tS_\tau(x),D_t^2S_\tau(x),...,D_t^{(n)}S_\tau(x))|_{\tau=0}=0\ \forall x\in X_m$$

$j_x^{n-1}X^i(x)=(X^i(x),D_t^1X^i(x),D_t^2X^i(x),...,D_t^{n-1}X^i(x))$- струя порядка n-1, связанная, с группой преобразований $S_\tau:X_m\to X_m,\ X^i(x)=\frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}\quad i=\overline{1,m}$

Тогда на экстремалях уравнения Эйлера-Лагранжа $p_{0,n}^i=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^lD_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}})=0$

Имеет место закон сохранения компоненты импульса вдоль струи $D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x))p_{k,n}^i)=0$

Доказательство. По формуле (6) **теоремы 6** при любых $x\in X_m,\tau\in\Re$ выполнено соотношение:

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))p_{k,n}^i)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}D_t^k(X^i(x,\tau))-\sum_{i=1}^{m}X^i(x,\tau)p_{0,n}^i \quad (22)$$

В частности при $\tau=0$

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x,\tau))|_{\tau=0}\ p^i_{k,n}) == D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x))p^i_{k,n}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x,\tau))|_{\tau=0} - \sum_{i=1}^{m} X^i(x,\tau)|_{\tau=0}\ p^i_{0,n} =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x)p^i_{0,n} \qquad (23)$$

По условию **теоремы 7** $S_\tau : X_m \to X_m, \forall \tau \in \Re$ -однопараметрическая группа преобразований, сохраняет функцию Лагранжа $L: T^n X_m \to \Re$:

$$\frac{d}{d\tau} L(S_\tau(x), D_t S_\tau(x), D_t^2 S_\tau(x),..., D_t^{(n)} S_\tau(x))|_{\tau=0} = 0\ \forall x \in X_m \qquad (24)$$

По формуле (5) **теоремы 5** имеет место равенство**:**

$$\frac{d}{d\tau} L(S_\tau(x), D_t S_\tau(x), D_t^2 S_\tau(x),..., D_t^{(n)} S_\tau(x)) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x,\tau)) \qquad (25)$$

которое выполняется при любом τ, в частности при $\tau = 0$. Учитывая равенства(24), (25) получаем:

$$\frac{d}{d\tau} L(S_\tau(x), D_t S_\tau(x), D_t^2 S_\tau(x),..., D_t^{(n)} S_\tau(x))|_{\tau=0} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x,\tau))|_{\tau=0} =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x)) = 0,$$

поскольку $D_t^k(X^i(x,\tau))|_{\tau=0} = D_t^k(X^i(x,0) = D_t^k(X^i(x)$ (26)

Следовательно, $\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x)) = 0$ Поскольку $x: \Re \to X_m$ - экстремаль уравнения Эйлера-Лагранжа, то

$$p^i_{0,n} = \sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}}) = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(0+l)i}}) = 0 \qquad (27)$$

Следовательно, $\sum_{i=1}^{m} X^i(x)p^i_{0,n} = \sum_{i=1}^{m} X^i(x)\cdot 0 = 0$ Подставляя (26), (27) в равенство (23) получим: (27).

$$D_t(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x))p^i_{k,n}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}} D_t^k(X^i(x)) - \sum_{i=1}^{m} X^i(x)p^i_{0,n} = 0 - 0 = 0$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Введенное в работе определение компоненты импульса вдоль струи и сохранение компоненты импульса ранга n вдоль струи порядка n-1 на экстремалях уравнения Эйлера-Лагранжа для групп преобразований, сохраняющих вариационную задачу, является прямым и естественным обобщением определения компоненты импульса первого порядка вдоль векторного поля (струи нулевого порядка), связанного с однопараметрической группой преобразований, сохраняющих функцию Лагранжа, зависящую от производных нулевого и первого порядков.[1,с. 297] В частности на экстремалях уравнения Эйлера-Лагранжа справедлив закон сохранения компоненты импульса первого порядка первого ранга вдоль векторного поля, индуцированного группой, сохраняющих вариационную задачу первого порядка:

$$D_t(\sum_{i=1}^{m} X^i p_{1,1}^i) = D_t(\sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \overset{(1)i}{x}}) = D_t(\sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}) = 0$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин, В. А. Современная геометрия. Методы и приложения / В. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. – М.: УРСС, 1994.
2. Рашевский, П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. – М.: Гостехиздат, 1956.
3. Погорелов, А. В. Дифференциальная геометрия / А. В. Погорелов. – М.: Наука, 1974.
4. Арнольд, В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. – М.: Наука, 1974.
5. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 7-е изд., испр. – М.: Наука, 1988. – Т. 2: Теория поля. – 512 с.
6. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 7-е изд., испр. – М.: Наука, 1988. – Т. 1: Механика. – 214 с.
7. Галеев, Э. М. Краткий курс теории экстремальных задач / Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 203 с.
8. Дирак, П. Лекции по квантовой механике / П. Дирак. – М.: Мир, 1968.
9. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л. Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии»; ВИНИТИ. – 1979. – Т. 9. – С. 5–246.
10. Трофимов, В. В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко. – М.: Факториал, 1995.
11. Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф.Пастухов, Д.Ф Пастухов, С.В. Голубева // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. - 2015. - № 12. - С. 117-123.
12. государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. - 2016. - № 4. - С. 119.
13. Задача построения поля линий тока по температурному//Ю.Ф.Пастухов, Д.Ф Пастухов// Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. - 2015. - № 4. - С. 27-36.
14. Тензор обобщенной энергии//Ю.Ф.Пастухов, Д.Ф Пастухов//Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. - 2017. - № 12. - С. 78-100.

GROUPS OF TRANSFORMATION CONSERVING VARIATIONAL PROBLEM WITH SENIOR DERIVATIVES

POLOTSK STATE UNIVERSITY
Y. PASTUKHOV, D. PASTUKHOV

Annotation. The definition of the momentum component is introduced along the jet and the conservation of

components of momentum of rank n along the jet of order n-1 on the extremals of the Euler-Lagrange equation for groups of transformations preserving the variational problem is a direct

and natural generalization of the determination of the momentum vector field (zero-order jet) connected with a one-parameter group of transformations preserving Lagrangian function that depends on the derivatives of zero and first orders. For the extremes of the Euler-Lagrange equation, the property of preserving the momentum component of rank n-1, connected with the transformation group preserving the variational problem with higher derivatives.

$$D_t\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} D_t^{k-1}(X^i(x))\, p_{k,n}^i\right)=0$$

$S:\Re\times X_m \to X_m \qquad S_\tau : X_m \to X_m, \forall \tau \in \Re$ - is a one-parameter group of transformations that preserves the function: $L: T^n X_m \to \Re$:

$$\frac{d}{d\tau} L(S_\tau(x), D_t S_\tau(x), D_t^2 S_\tau(x),..., D_t^{(n)} S_\tau(x))\,|_{\tau=0} = 0 \ \forall x \in X_m$$

$j_x^{n-1} X^i(x) = (X^i(x), D_t^1 X^i(x), D_t^2 X^i(x),..., D_t^{n-1} X^i(x))$ - a jet of order n-1 connected, with the transformation group $S_\tau : X_m \to X_m$, $X^i(x) = \frac{dS^i{}_\tau(x)}{d\tau}\,|_{\tau=0} \quad i=\overline{1,m}$