УДК514

ЛАГРАНЖЕВЫ СЕЧЕНИЯ

канд. физ.-мат. наук, доц. ***Ю.Ф. ПАСТУХОВ***

канд. физ.-мат. наук, доц. ***Д.Ф. ПАСТУХОВ***

(Полоцкий государственный университет)

В статье инвариантным образом определено понятие лагранжевых сечений в расслоённых пространствах скоростей произвольного порядка, сформулированы и доказаны их свойства, дан инвариантный критерий решения задачи , получено необходимое условие лагранжевых сечений и систем ОДУ произвольного чётного порядка.

Ключевые слова*: обратная вариационная задача, расслоённое пространство скоростей, лагранжево сечение, уравнения Эйлера-Лагранжа, гладкие многообразия, тензор энергии, тензор обобщенного импульса, невырожденная функция.*

Введение.

Вариационное исчисление является одним из старейших и богатых содержанием и приложениями разделов математического анализа. Вариационные задачи (например, изопериметрические) рассматривались и в древности, но исследовались геометрическими методами. Поэтому началом зарождения вариационного исчисления можно считать работу Ферма 1662 г., в которой аналитическими методами исследована задача о распространении света из одной оптической среды в другую и о преломлении света на границе двух сред. Далее аналогичные (но более общие) вариационные задачи исследовались Ньютоном (задача о наименьшей поверхности вращения - в 1685 г.), Д. Бернулли (задача о брахистохроне) и др.

В 1696 году И. Бернулли сформулировал и опубликовал математическую проблему с предложением для математиков своего времени заняться её решением. В задаче о брахистохроне требовалось найти форму гладкой кривой, соединяющей две точки, так чтобы материальная точка, двигаясь по ней без трения под действием силы тяжести, прошла участок между этими точками за минимальное время. Задача была решена крупнейшими учёными того времени – Я. Бернулли, Г. Лейбницем, франц. учёным Г. Лопиталем и И. Ньютоном.

Свои подходы к решению этой задачи предложили Эйлер, Лагранж, что привело к рождению вариационного исчисления. Эти решения наметили многие направления будущей общей теории. И. Бернулли исходил из оптико-механических аналогий, Я. Бернулли применил принцип Гюйгенса, Лейбниц решил задачу, заменяя кривую ломаными, заложив тем самым основу прямым методам в вариационном исчислении.

Настоящими творцами общей теории вариационного исчисления (которые дали название этой науке) являются Эйлер (уравнения Эйлера) и Лагранж (метод вариаций). Далее следует Лежандр (исследование второй вариации—необходимое условие Лежандра), Гамильтон и Якоби (понятие сопряженной точки, необходимое условие Якоби, теория Гамильтона — Якоби), Клебш и Майер (задачи с функционалами более общей природы, необходимое условие Клёбша, поля экстремалей Майера), Вейерштрасс (задачи в параметрической форме, достаточные условия сильного экстремума). Работы Майера конца XIX века послужили основой для углубленного исследования вариационных задач Лагранжа и Майера, доказательства правила множителей для них и др. В начале XX в. Гильберт ввел свой известный инвариантный интеграл для доказательства достаточных условий экстремума, Кнезер исследовал задачи с подвижными концами, получил геометрическое условие Якоби (при помощи огибающей семейства экстремалей).

Дифференциальная геометрия возникла и развивалась в тесной связи с математическим анализом, который сам в значительной степени вырос из задач геометрии. Многие геометрические понятия предшествовали соответствующим понятиям анализа. Так, например, понятие касательной предшествовало понятию производной, понятие площади и объема — понятию интеграла.

Возникновение дифференциальной геометрии относится к XVIII веку и связано с именами Эйлера и Монжа. Первое сводное сочинение по теории поверхностей написано Монжем («Приложение анализа к геометрии», 1795). В 1827 Гаусс опубликовал работу «Общее исследование о кривых поверхностях», в которой заложил основы теории поверхностей в её современном виде. С тех пор дифференциальная геометрия перестала быть только приложением анализа и заняла самостоятельное место в математике.

Огромную роль в развитии всей геометрии, в том числе и дифференциальной геометрии, сыграло открытие неевклидовой геометрии. Риман в своей лекции «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии» (1854) заложил основы римановой геометрии, наиболее развитой части современной дифференциальной геометрии.

Теоретико-групповая точка зрения Клейна, изложенная в его «Эрлангенской программе» (1872), то есть: геометрия — учение об инвариантах групп преобразований, в применении к дифференциальной геометрии была развита Картаном, который построил теорию пространств проективной связности и аффинной связности.

Основная задача дифференциальной геометрии состоит в нахождении и описании дифференциальных инвариантов геометрических структур. Необходимым аппаратом здесь является исчисление струй. Это понятие интенсивно использовалось в теории геометрических структур высшего порядка в работах В.В.Вагнера, Г.Ф.Лаптева, Л.Е.Евтушика, М.О.Рахулы, а в последнее время в теории особенностей гладких отображений М.Голубицким, В.Гийеминым и геометрической теории нелинейных дифференциальных уравнений А.М.Виноградовым, В.В.Лычагиным. Представленная работа является продолжением работ авторов [9, 10,13,16,17,18,19].

Основные определения и математические объекты.

Дифференциально-геометрические структуры, используемые в работе: X_m – гладкое многообразие размерности m; $T^n X_m$ – гладкое расслоенное пространство скоростей порядка n с базой расслоения X_m; $L: T^n X_m \to \Re$ – невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$.

Определение 1. Система функций $P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}$

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{(p+\min(n,p)-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m}$$

называется обобщенным импульсом ранга n для функции $L:T^pX_m \to \Re$ в локальных координатах (x) базы X_m расслоения T^pX_m где

$L(x,\dot{x},...,\overset{(p)}{x})$ - локальная запись функции L при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения T^pX_m.

Функция $p_{k,n}^i$ читается как $k-ая$ компонента обобщенного импульса P_n ранга n по $i-$ой координате или импульс порядка k (k-импульс) по $i-$ой координате обобщенного импульса P_n ранга n.

Замечание 1. Обобщенный импульс ранг n определен для функций $L:T^pX_m \to \Re$

Из определения $p_k^i(n) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$ следует, что

при $k > p, l \ge 0 \Rightarrow l+k > p \Rightarrow \frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и все $p_k^i(n) \equiv 0$ (тривиальные импульсы), то есть для нетривиальных импульсов $k \le p$. Поскольку $k \le n, k \le p \Rightarrow k \le \min(n,p)$, то в определении 2 можно считать, что $k = \overline{0,\min(n,p)}, i=\overline{1,m}$.

Максимальный порядок производной по t в $p_k^i(n)$ равен $l+k+l = 2\cdot l + k$

При $l+k > p \Rightarrow \frac{\partial L(x,...,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и коэффициент при производной $\overset{(l+k)i}{x}$ равен 0, значит, при определении максимального порядка производной по t можно считать $l+k \le p$, кроме того

$$l \le n-k \Leftrightarrow l+k \le n \Rightarrow l+k \le \min(n,p) \Rightarrow l \le \min(n,p)-k \Rightarrow 2\cdot l+k \le 2\cdot(\min(n,p)-k)+k =$$

$$= 2\cdot\min(n,p) - 2\cdot k + k = 2\cdot\min(n,p) - k$$

Хотя более грубая оценка порядка старшей производной по t в $p_k^i(n)$ дает

$$l \le n-k \Leftrightarrow l+k \le n \Rightarrow 2\cdot l+k \le 2\cdot(n-k)+k = 2\cdot n - 2\cdot k + k = 2\cdot n - k$$

При $p > n, l+k \le n$ и максимальный порядок производной по t в аргументах $L(x,...,\overset{(p)}{x})$ больше максимального порядка производной по переменной t в знаменателе частной производной.

Теорема 1[11]. Пусть $x^i = S^i(\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_m})$ $S:(\overline{x}) \to x(\overline{x})$, - невырожденное преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоения скоростей порядка $T^p X_m$ $i=\overline{1,m}$, тогда

$$\frac{\partial x^{(l)i}(\overline{x},\overline{\dot{x}},...,\overset{(p)}{\overline{x}})}{\partial \overset{(s)j}{\overline{x}}}=\begin{cases}C_l^s\cdot D_t^{l-s}\left(\dfrac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j}\right), C_l^s=\dfrac{l!}{s!\cdot(l-s)!}, l!=\prod\limits_{k=1}^{l}k, l\geq s\\ 0, l<s\end{cases} \quad (1)$$

Теорема 2[10](закон преобразования импульсов при замене системы координат в базе X_m расслоения $T^{2n}X_m$). При замене $(\overline{x})\to(x(\overline{x}))$: в базе многообразия X_m расслоения $T^{2n}X_m$ $\overline{p_k^i(n)}(\overline{x},\overline{\dot{x}},...,\overset{(2n-k)}{x})$ преобразуются как **тензоры** типа (0,1) (ковекторы):

$$\overline{p_k^i}(n)(\overline{x},\overline{\dot{x}},...,\overset{(2n-k)}{x})=\sum_{j=1}^{m}p_k^j(n)(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^i(\overline{x})}{\partial\overline{x}^j}=p_k^j(n)(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^j(\overline{x})}{\partial\overline{x}^i}$$

$$p_k^i(n)=p_{k,n}^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-k)}{x})=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(l+k)i}{x}}\right)$$ - импульс порядка k, $k=\overline{0,n}$ $i,j=\overline{1,m}$.

Пусть: $T^k X_m$ — расслоённое пространство скоростей порядка k многообразия X_m, $\pi_k^l: T^l X_m\to T^k X_m, l>k\geq 0$ — каноническая проекция (при к = 0 — проекция на базу расслоения —

многообразие X_m). Предполагается, что X_m — бесконечно гладкое многообразие. $U(v_{0_x}^{2n-1})$ — окрестность точки $v_{0_x}^{2n-1}$ в расслоении $T^{2n-1}X_m$.

Определение 2. Пусть $L: T^n X_m\to\Re$ - гладкая функция. $L(x,\dot{x},...,x^{(n)})$ - локальная запись в системе координат (x). (φ_x: $(V\subset T^n X_m)\to\Re^{(n+1)m}$- координатный диффеоморфизм в локальной карте (V,φ_x)) Функция

$L: T^n X_m\to\Re$ называется невырожденной(вырожденной) в точке $v_x^n\in T^n X_m$, в системе координат (x) базе X_m расслоения, если соответственно $\det\left(\dfrac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(n)i}{x}\,\partial\overset{(n)j}{x}}\right)\neq 0(=0)$

Постановка задачи.

Дифференциально-геометрические структуры, используемые в работе: X_m – гладкое многообразие размерности *m*; $T^n X_m$– гладкое расслоенное пространство скоростей порядка n с базой расслоения X_m;

$L: T^n X_m \to \Re$ – невырожденная функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$

Ставится следующая задача : пусть Пусть $T^{2n} X_m \supset V(v_0^{2n}) = V$ - окрестность точки $v_0^{2n} \in T^{2n} X_m$

$\pi_{2n-1}^{2n}: T^{2n} X_m \to T^{2n-1} X_m$-каноническая проекция:

$\pi_{2n-1}^{2n}(V) = U(u_0^{2n-1}) = U = \left\{\pi_{2n-1}^{2n}(v) \mid \forall v \in V(w_0^{2n})\right\}, \ \pi_{2n-1}^{2n}(v_0^{2n}) = u_0^{2n-1}$

$f: T^{2n-1} X_m \supset U(v_0^{2n-1}) \to T^{2n} X_m$ - гладкое сечение

Существуют ли $\overline{V}(v_0^{2n}) \subset V(v_0^{2n})$ ($\pi_{2n-1}^{2n}(\overline{V}) = \overline{U}$)и такая невырожденная функция $L: T^n X_m \supset \pi_n^{2n} V \to \Re^m$,что

$\sigma_f(\overline{U}) = \varepsilon_L(\overline{V})$.

Теорема 3. Пусть $L: T^n X_m \to \Re$ гладкая функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$, $L\left(x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}\right)$

- локальная запись в системе координат (x) в базе X_m, $L\left(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \ldots, \overset{(n)}{\bar{x}}\right)$ - локальная запись в системе координат $(\bar{x})$.

Тогда
$$\frac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \ldots, \overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}} \partial \overset{(n)l}{\bar{x}}} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x, \ldots, \overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x} \partial \overset{(n)j}{x}} \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} \tag{2}$$

Доказательство.
$$\frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \ldots, \overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{t=0}^{n} \frac{\partial L(x(\bar{x}), \ldots, \overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}} \frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \ldots, \overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}} \partial \overset{(n)l}{\bar{x}}} = \frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}} \left(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \ldots, \overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\right) = \frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}} \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{t=0}^{n} \frac{\partial L(x(\bar{x}), \ldots, \overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}} \frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{t=0}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}} \left(\frac{\partial L(x(\bar{x}), \ldots, \overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\right) \frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}} + \frac{\partial L(x(\bar{x}), \ldots, \overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}} \frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}} \left(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\right) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{t=0}^{n} \frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}} \left(\frac{\partial L(x(\bar{x}), \ldots, \overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\right) \frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{t=0}^{n} \frac{\partial L(x(\bar{x}), \ldots, \overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}} \frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}} \left(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\right) = \frac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \ldots, \overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}} \partial \overset{(n)l}{\bar{x}}} \tag{3}$$

Преобразуем левую часть в сумме (3):

$$\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\left(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\right)=\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)d}{x}}\left(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\right)\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}} \qquad (4)$$

Подставим (4) в левую часть (3): $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\left(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\right)\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}=$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\left(\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)d}{x}}\left(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\right)\right)\cdot\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}} \qquad (5)$$

Подставляем полученное выражение (5) в (3):

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\left(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\right)\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}})+\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\left(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\left(\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)d}{x}}\left(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\right)\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\right)\cdot\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\left(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)d}{x}}\left(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\right)\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\left(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\left(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\right) \qquad (6)$$

По **теореме 1** $\displaystyle\frac{\partial x^{(l)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(s)j}{\bar{x}}}=\begin{cases}C_l^s\cdot D_t^{l-s}\left(\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right), C_l^s=\dfrac{l!}{s!\cdot(l-s)!}, l!=\prod\limits_{k=1}^{l}k, l\ge s\\ 0, l<s\end{cases}$

$i,j=\overline{1,m}$

Так как $n\ge t\ge 0$, то

$$\frac{\partial x^{(t)j}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}=\begin{cases}C_n^n\cdot D_t^{n-n=0}\left(\dfrac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\right)=D_t^{n-n=0}\left(\dfrac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\right)=\dfrac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}, C_n^n=\dfrac{n!}{n!\cdot(n-n)!}=1, n!=\prod\limits_{k=1}^{n}k, t=n\\ 0, t<n\end{cases}=\delta_n^t\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}$$

Значит, при $n\ge t\ge 0$, $\displaystyle\frac{\partial x^{(t)j}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)i}{\bar{x}}}=\delta_n^t\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}$ (7)

где $\delta_n^t=\begin{cases}1, l=k\\ 0, l\ne k\end{cases}-\text{символ Кронеккера}$

Подставляем (7) в правую часть (6):

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}}\left(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(n)l}{\bar x}}\right)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}}\left(\delta_n^t\frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^t\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}}\left(\frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\right)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(n)j}{x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}}\left(\frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\right) \qquad (8)$$

Так как $n\ge 1$, то $\frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}$ зависит только от $\bar x$ и не зависит от производных не ниже первого порядка. Следовательно, $\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}}\left(\frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\right)=0$ Значит(8) - правая часть в (6)

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(n)j}{x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}}\left(\frac{\partial x^i(\bar x)}{\partial \bar x^j}\right)=0$$

Значит, выражение (3) равное выражению (6) с учетом (8) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\dots,\overset{(n)}{\bar x})}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}\,\partial \overset{(n)l}{\bar x}}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(s)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}}\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(n)l}{\bar x}}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}}\left(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(n)l}{\bar x}}\right)=$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(s)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}}\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(n)l}{\bar x}} \qquad (9)$$

На основании (7) имеют место равенства:

$$n\ge t\ge 0\ ,\frac{\partial x^{(t)j}(\bar x,\dot{\bar x},\dots,\overset{(n)}{\bar x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar x}}=\delta_n^t\frac{\partial x^j(\bar x)}{\partial \bar x^l}\quad ,\text{где}\ \ \delta_n^t=\begin{cases}1,t=n\\0,t<n\end{cases}-символКронеккера \ \ (10)$$

$$n\ge s\ge 0\ ,\frac{\partial x^{(s)d}(\bar x,\dot{\bar x},\dots,\overset{(n)}{\bar x})}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}}=\delta_n^s\frac{\partial x^d(\bar x)}{\partial \bar x^k}\quad ,\text{где}\ \ \delta_n^s=\begin{cases}1,s=n\\0,s<n\end{cases}-символКронеккера \ \ (11)$$

Подставляем (10),(11) в (9) получим:

$$\frac{\partial^2 \bar L(\bar x,\dot{\bar x},\dots,\overset{(n)}{\bar x})}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}\,\partial \overset{(n)l}{\bar x}}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(s)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}}\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar x)}{\partial \overset{(n)l}{\bar x}}=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(s)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^s\frac{\partial x^d(\bar x)}{\partial \bar x^k}\delta_n^t\frac{\partial x^j(\bar x)}{\partial \bar x^l}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(s)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^s\frac{\partial x^d(\bar x)}{\partial \bar x^k}\delta_n^t\frac{\partial x^j(\bar x)}{\partial \bar x^l} \ (12)$$

Так как $\delta_n^s = \begin{cases} 1, s = n \\ 0, s < n \end{cases} - символ Кронеккера$, то

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{\partial^2 L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(s)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}} \delta_n^s \frac{\partial x^d(\bar x)}{\partial \bar x^k} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\partial^2 L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(s)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}} \delta_n^s \frac{\partial x^d(\bar x)}{\partial \bar x^k} + \frac{\partial^2 L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(s)d=n}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}} \delta_n^{s=n} \frac{\partial x^d(\bar x)}{\partial \bar x^k} =$$

$$= \frac{\partial^2 L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(s=n)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}} \delta_n^{s=n} \frac{\partial x^d(\bar x)}{\partial \bar x^k} = \frac{\partial^2 L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}} \frac{\partial x^d(\bar x)}{\partial \bar x^k}$$, так как $\delta_n^s = 0,\ s < n;\ \delta_n^{s=n} = 1$

(13)

Подставляем (13) в (12):

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n} \frac{\partial^2 L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(s)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}} \delta_n^s \frac{\partial x^d(\bar x)}{\partial \bar x^k} \delta_n^t \frac{\partial x^j(\bar x)}{\partial \bar x^l} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n} \delta_n^t \sum_{d=1}^{m} \Big(\sum_{s=0}^{n} \frac{\partial^2 L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(s)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}} \delta_n^s \frac{\partial x^d(\bar x)}{\partial \bar x^k} \frac{\partial x^j(\bar x)}{\partial \bar x^l}\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{m}\sum_{d=0}^{n} \frac{\partial^2 L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}} \delta_n^t \frac{\partial x^d(\bar x)}{\partial \bar x^k} \frac{\partial x^j(\bar x)}{\partial \bar x^l} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{t=0}^{n} \frac{\partial^2 L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}} \delta_n^t \frac{\partial x^d(\bar x)}{\partial \bar x^k} \frac{\partial x^j(\bar x)}{\partial \bar x^l} \quad (14)$$

Так как $\delta_n^t = 0,\ t < n;\ \delta_n^{t=n} = 1$, то

$$\sum_{t=0}^{n} \frac{\partial^2 L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}} \delta_n^t \frac{\partial x^d(\bar x)}{\partial \bar x^k} \frac{\partial x^j(\bar x)}{\partial \bar x^l} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{\partial^2 L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}} \delta_n^t \frac{\partial x^d(\bar x)}{\partial \bar x^k} \frac{\partial x^j(\bar x)}{\partial \bar x^l} + \frac{\partial^2 L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(t=n)j}{x}} \delta_n^{t=n} \frac{\partial x^d(\bar x)}{\partial \bar x^k} \frac{\partial x^j(\bar x)}{\partial \bar x^l} =$$

$$= \frac{\partial^2 L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(n)j}{x}} \frac{\partial x^d(\bar x)}{\partial \bar x^k} \frac{\partial x^j(\bar x)}{\partial \bar x^l}$$

(15)

Подставляем (15) в (14), получим:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{t=0}^{n} \frac{\partial^2 L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}} \delta_n^t \frac{\partial x^d(\bar x)}{\partial \bar x^k} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{m} \Big(\sum_{t=0}^{n} \frac{\partial^2 L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}} \delta_n^t \frac{\partial x^d(\bar x)}{\partial \bar x^k}\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x(\bar x),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar x))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(n)j}{x}} \frac{\partial x^d(\bar x)}{\partial \bar x^k} \frac{\partial x^j(\bar x)}{\partial \bar x^l} = \frac{\partial^2 \bar L(\bar x, \dot{\bar x},\dots,\overset{(n)}{\bar x})}{\partial \overset{(n)k}{\bar x}\,\partial \overset{(n)l}{\bar x}}$$

Теорема3 доказана.

Теорема 4. $L : T^n X_m \to \Re$ невырожденная(вырожденная) функция в точке $v_x^n \in T^n X_m$, в системе координат (x) базе X_m расслоения. Тогда в любой другой системе координат $(\bar x)$ в базе X_m функция $L : T^n X_m \to \Re$ также будет соответственно невырожденной(вырожденной), следовательно свойства вырожденности и невырожденности не зависит от выбора локальной системы координат в базе X_m, то есть является геометрическим инвариантом в расслоении $T^n X_m$

Доказательство. По теореме 3 $\dfrac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}\,\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\dfrac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}\,\partial \overset{(n)j}{x}}\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\dfrac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}$

Невырожденность в системе координат (x) в базе X_m по определению значит $\det(\dfrac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}\,\partial \overset{(n)j}{x}}) \neq 0$ Поэтому **по теореме 3**

$$\det(\frac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}\,\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}) = \det(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}\,\partial \overset{(n)j}{x}}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}) =$$

$\det(\dfrac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}\,\partial \overset{(n)j}{x}})\det(\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k})\det(\dfrac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}) \neq 0$ так как $\det(\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}) \neq 0\ u \det(\dfrac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}) \neq 0$ - так как замена координат $x = x(\bar{x})$ в базе в базе X_m невырожденная.

Аналогично , если $L: T^n X_m \to \Re$ -вырожденная функция, то

$\det(\dfrac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}\,\partial \overset{(n)j}{x}}) = 0$ **По теоереме 3**

$$\det(\frac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}\,\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}) = \det(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}\,\partial \overset{(n)j}{x}}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}) =$$

$$\det(\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}\,\partial \overset{(n)j}{x}})\det(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k})\det(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}) = 0\cdot\det(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k})\det(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}) = 0$$

Теорема доказана.

Определение 3. Гладкое отображение $f: T^k X_m \to T^l X_m \quad (0 \le k < l)$ называется сечением, если следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} T^k X_m \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "id"'] & & T^l X_m \arrow[dl, "\pi^l_k"] \\ & T^k X_m & \end{tikzcd}$$

Определение 4. Пусть $U(v_{0_x}^{2n-1})$ — окрестность точки $v_{0_x}^{2n-1}$ в расслоении $T^{2n-1}X_m$.

Подмногообразие , $\sigma_f \subset T^{2n}X_m$,

$\sigma_f = \sigma_f(U) = \{v_x^{2n} \in T^{2n}X_m \mid v_x^{2n} = f(v_x^{2n-1}),\ v_x^{2n-1} \in U(v_{0_x}^{2n-1})\}$

называется (гладким) подмногообразием, порождённым сечением $f: T^{2n-1}X_m \supset U(v_0^{2n-1}) \to T^{2n}X_m$.

Определение 5. Подмногообразие

$\varepsilon = \varepsilon_L(V) = \{ v_x^{2n} \in V \subset T^{2n}X_m \ \mid \ \varepsilon_{(x)L}(\varphi_x(v_x^{2n})) = 0 \in \Re^m \ \}$

Где $L : T^n X_m \supset \pi_n^{2n} V \to \Re^m$ — невырожденная функция, $L(x, \dot{x}, ..., x^{(n)})$ локальная запись в системе координат (x), называется лагранжевым подмногообразием над $V(v_{0_x}^{2n}) \subset T^{2n}X_m$,которое, когда это не будет приводить к недоразумению, мы будем называть лагранжевым подмногообразием $\varepsilon_L \subset T^{2n}X_m$. Здесь

$\varepsilon_{(x)L} : \Re^{(2n+1)m} \supset \varphi_x(V \subset T^{2n}X_m) \to \Re^m$ $(\varphi_x : (V \subset T^{2n}X_m) \to \Re^{(2n+1)m}$ - координатный диффеоморфизм в локальной карте $(V \subset T^{2n}X_m, \varphi_x)$ расслоённого пространства $T^{2n}X_m)$ - гладкая функция, которая в локальной системе координат (x) в базе X_m расслоённого пространства $T^{2n}X_m$ имеет вид:

$$\varepsilon_{(x)L}(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n)}{x}) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}} \right) , \quad i = \overline{1, m}$$

Теорема 5. Определение 5 корректно, так как оно не зависит от выбора локальных координат (x) в базе X_m расслоённого пространства $T^{2n}X_m$, то есть независимо от выбора локальных координат (x) в базе X_m в окрестности точки $v_x^{2n} \in V \subset T^{2n}X_m$ расслоённого пространства $T^{2n}X_m$ определяет одно и то же подмногообразие

$\varepsilon = \varepsilon_L(V) = \{ v_x^{2n} \in V \subset T^{2n}X_m \ \mid \ \varepsilon_{(x)L}(\varphi_x(v_x^{2n})) = 0 \in \Re^m \ \}$

Более точно: если $x = x(\bar{x})$ - произвольная невырожденная замена в базе X_m расслоённого пространства $T^{2n}X_m$ и функции

$$\varepsilon_{(x)L}^i(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n)}{x}) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, ..., \overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}} \right) , \quad i = \overline{1, m}$$

$$\varepsilon_{(\bar{x})L}^i(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(2n)}{\bar{x}}) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^{(l)i}} \right) , \quad i = \overline{1, m}$$

- координатные записи отображений

$\varepsilon_{(x)L} : \Re^{(2n+1)m} \supset \varphi_x(V \subset T^{2n}X_m) \to \Re^m$ $\varepsilon_{(\bar{x})L} : \Re^{(2n+1)m} \supset \varphi_{\bar{x}}(V \subset T^{2n}X_m) \to \Re^m$, то имеет

место следующее равенство:

$$\varepsilon_{(\bar{x})L}^i(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, ..., \overset{(2n)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{(x)L}^j(x, \dot{x}, ..., \overset{(2n)}{x}) \cdot \frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \qquad (16)$$

Доказательство. По определению $\varepsilon_{(x)L} : \Re^{(2n+1)m} \supset \varphi_x(W \subset T^{2n}X_m) \to \Re^m$

$$\varepsilon^i_{(x)L}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n)}{x}) = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right) = p_0^i(n) = p^i_{0,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-0)}{x}), \quad i=\overline{1,m}$$

Действительно, так как $L: T^n X_m \supset \pi_n^{2n-1}U \to \Re^m \;\Rightarrow\; p=n$ и

$$p_k^i(n) = p^i_{k,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(p+\min(n,p)-k)}{x}) = p^i_{k,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n+\min(n,n)-k)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$$

$k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m}$

$$p^i_{k=0}(n) = p^i_{0,n}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-0)}{x}) = \sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right) = \varepsilon^i_{(x)L}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n)}{x})$$

Аналогично,

$$\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n)}{\bar{x}}) = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^{(l)i}}\right) = \bar{p}^i_0(n) = \bar{p}^i_{0,n}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n-0)}{\bar{x}}), \quad i=\overline{1,m},$$

поскольку

$$\bar{p}^i_k(n) = \bar{p}^i_{k,n}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(p+\min(n,p)-k)}{\bar{x}}) = \bar{p}^i_{k,n}(\bar{x},\dot{\bar{x}}\ldots,\overset{(n+\min(n,n)-k)}{\bar{x}}) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+k)i}{\bar{x}}}\right) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+k)i}{\bar{x}}}\right)$$

$k=\overline{0,n}$, $i=\overline{1,m}$

$$\bar{p}^i_{k=0}(n) = \bar{p}^i_{0,n}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n-0)}{\bar{x}}) = \sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(l+k)i}{\bar{x}}}\right) = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^{(l)i}}\right) = \varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n)}{\bar{x}})$$

По **теореме 2** для $k=0,n$ $\;i,j=\overline{1,m}$ имеем**:**

$$\overline{p_k^i}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n-k)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m} p_k^j(n)(x,\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_k^j(n)(x,\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n-k)}{x})\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}, \quad \det\left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\right)\neq 0$$ в частности для $k=0$ (импульсы 0-го порядка – функциональные части в уравнениях Эйлера - Лагранжа)

$$\overline{p_0^i}(n)(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n-0)}{\bar{x}}) = \varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m} p_0^j(n)(x,\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n-0)}{x})\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = p_0^j(n)(x,\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n-0)}{x})\cdot\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} =$$

$$\sum_{j=1}^{m} p_0^j(n)(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n-0)}{x})\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = \sum_{j=1}^{m}\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n)}{\bar{x}}))\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}$$ Таким образом доказано, что $\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n)}{\bar{x}}) = \sum_{j=1}^{m}\varepsilon^j_{(x)L}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n)}{x})\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}$, $\det\left(\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}\right)\neq 0$

Поэтому $\quad \varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(2n)}{\bar{x}}) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon^j_{(x)L}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n)}{x}) = 0$, $\quad i,j=\overline{1,m}$

Таким образом, равенство 0 $\varepsilon^j_{(x)L}(x,\dot{x},\ldots,\overset{(2n)}{x}) = 0,\, j=\overline{1,m}$ в одной системе координат

влечет $\varepsilon^{i}_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}})=0$ во всех системах координат. Таким образом, соотношение 1 и независимость определения лагранжева подмногообразия от выбора локальной системы координат замена в базе X_m расслоённого пространства $T^{2n}X_m$ доказана.
Теорема 5 доказана.

Теорема 6 Пусть - $f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})$ - локальная запись гладкой функции $f: T^n X_m \to \Re$ В локальных координатах в базе X_m расслоения $T^n X_m$. Тогда

$$D_t^p f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + a(x,\dot{x},...,\overset{(k+p-1)}{x}) \ , p \ge 1$$

Доказательство. Проведем индукцией по p
База индукции $p=1$

$$D_t^1 f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x}) = D_t f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x}) = \sum_{s=0}^{k}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}} x^{(s+1)j} = \sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}} x^{(s+1)j} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(k)j}} x^{(k+1)j} =$$

При $s \le k-1 \Rightarrow s+1 \le k$,поэтому $\frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}}$ и $x^{(s+1)j}$ и произведение

$$\frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}} x^{(s+1)j}$$

зависят от производных порядка не выше k, значит и вся сумма

$$a(x,\dot{x},...,\overset{(k+1-1)}{x}) = a(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x}) = \sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}} x^{(s+1)j}$$ также от производных

порядка не выше k Значит ,

$$D_t^1 f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x}) = \sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(s)j}} x^{(s+1)j} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(k)j}} x^{(k+1)j} = a(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x}) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial x^{(k)j}} x^{(k+1)j} =$$

База индукции проверена. Индуктивный переход. Пусть утверждение верно для p ,то есть

$$D_t^p f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + a(x,\dot{x},...,\overset{(k+p-1)}{x})$$

Докажем ,что оно верно для $p+1$, то есть имеет место равенство:

$$D_t^{p+1} f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p+1)j}{x} + \bar{a}(x,\dot{x},...,\overset{(k+p+1-1)}{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p+1)j}{x} + \bar{a}(x,\dot{x},...,\overset{(k+p)}{x})$$

По предположению индукции имеем:

$$D_t^{p+1} f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x}) = D_t(D_t^p f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})) = D_t(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + a(x,\dot{x},...,\overset{(k+p-1)}{x})) =$$

$$(\sum_{j=1}^{m} D_t \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} D_t(\overset{(k+p)j}{x})) + D_t\, a(x,\dot{x},...,\overset{(k+p-1)}{x}) =$$

$$\sum_{j=1}^{m} D_t \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p+1)j}{x} + D_t\, a(x,\dot{x},...,\overset{(k+p-1)}{x})$$

Максимальный порядок производных в каждом члене суммы

$\sum_{j=1}^{m} D_t \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x}$ равен

$\max(k+1, k+p) = k+p$, так как $p \geq 1$

По доказанному утверждению при $p=1$ максимальный порядок производных

в $D_t \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}}$ равен $k+1$, а максимальный порядок производных в

$D_t\, a(x,\dot{x},...,\overset{(k+p-1)}{x}$ равен $k+p-1+1 = k+p$

Значит, $\bar{a}(x,\dot{x},...,\overset{(k+p)}{x}) = \sum_{j=1}^{m} D_t \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + D_t\, a(x,\dot{x},...,\overset{(k+p-1)}{x})$

зависит от производных порядка не выше $k+p$

Итак, $\sum_{j=1}^{m} D_t \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p)j}{x} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p+1)j}{x} + D_t\, a(x,\dot{x},...,\overset{(k+p-1)}{x}) =$

$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x,\dot{x},...,\overset{(k)}{x})}{\partial \overset{(k)j}{x}} \cdot \overset{(k+p+1)j}{x} + \bar{a}(x,\dot{x},...,\overset{(k+p)}{x})$ **Теорема 6** доказана.

Теорема 7 $\varepsilon^i_{(x)L}(x,\dot{x},...,\overset{(2n)}{x})$ -функции из условия **теоремы 5**. Тогда

$$\varepsilon^i_{(x)L}(x,\dot{x},...,\overset{(2n)}{x}) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right) = (-1)^n \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} x^{(2n)j} + g_i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-1)}{x}),\ i = \overline{1,m}$$

Доказательство. Проведем индукцией по n

База индукции $n=1$

$$\varepsilon^i_{(x)L}(x,\dot{x},...,\overset{(2n-2)}{x}) = \varepsilon^i_{(x)L}(x,\dot{x}) = \sum_{l=0}^{n=1} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right) = (-1)^0 D_t^0 \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n-1)}{x})}{\partial x^{(0)i}}\right) + (-1)^1 D_t^1 \left(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n-1)}{x})}{\partial x^{(1)i}}\right) =$$

$$\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i} + (-1)^1 D_t^1 \left(\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i} + (-1)^1 \sum_{p=0}^{1} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x})}{\partial x^{(p)j} \partial \dot{x}^i} \cdot x^{(p+1)j}$$

$$\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i} + (-1)^1 \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x})}{\partial x^{(0)j} \partial \dot{x}^i} x^{(0+1)j} + (-1)^1 \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x})}{\partial x^{(1)j} \partial \dot{x}^i} x^{(1+1)j} =$$

$$\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i} + (-1)^1 \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x})}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} \dot{x}^i + (-1)^1 \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} \ddot{x}^j = (-1)^1 \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} \ddot{x}^j + g_i(x,\dot{x})$$

Где $g_i(x,\dot{x}) = \dfrac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i} + (-1)^1 \sum_{j=1}^{m} \dfrac{\partial^2 L(x,\dot{x})}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} \dot{x}^i$ База индукции доказана.

Индуктивный переход. Пусть утверждение верно для n .Докажем , что оно верно для $n+1$

$$\varepsilon^i_{(x)L}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2(n+1))}{x}) = \sum_{l=0}^{n+1} (-1)^l D_t^l \Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\Big) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} x^{(2(n+1))j} + g_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2(n+1)-1)}{x}) =$$

$$= \sum_{l=0}^{n+1} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)j} \partial x^{(n+1)i}} x^{(2n+2)j} + g_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n+1)}{x})$$

Для $n+1$ имеет место :

$$\sum_{l=0}^{n+1} (-1)^l D_t^l \Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\Big) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\Big) + (-1)^{n+1} D_t^{n+1} \Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)i}}\Big)$$

По теореме 6 :

$$\sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\Big) + (-1)^{n+1} D_t^{n+1} \Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)i}}\Big) =$$

$$\sum_{l=0}^{n} (-1)^l \Big(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)j} \partial x^{(l)i}} \cdot \overset{(n+1+l)j}{x} + a_l(x,\dot{x},\dots,\overset{(n+1+l-1)}{x})\Big) +$$

$$(-1)^{n+1} \Big(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)j} \partial x^{(n+1)i}} \cdot \overset{(n+1+n+1)j}{x} + a(x,\dot{x},\dots,\overset{(n+1+n+1-1)}{x})\Big) =$$

$$\sum_{l=0}^{n} (-1)^l \Big(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)j} \partial x^{(l)i}} \cdot \overset{(n+1+l)j}{x} + a_l(x,\dot{x},\dots,\overset{(n+l)}{x})\Big) +$$

$$(-1)^{n+1} \Big(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)j} \partial x^{(n+1)i}} \cdot \overset{(2n+2)j}{x} + a(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n+1)}{x})\Big) =$$

максимальный порядок производных в

$$\sum_{l=0}^{n} (-1)^l \Big(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)j} \partial x^{(l)i}} \cdot \overset{(n+1+l)j}{x} + a_l(x,\dot{x},\dots,\overset{(n+l)}{x})\Big)$$

равен $\max\limits_{0 \le l \le n}(n+1, n+1+l, n+l) = \max\limits_{0 \le l \le n}(n+1+l) = n+n+1 = 2n+1$ Поэтому

$$\sum_{l=0}^{n} (-1)^l \Big(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)j} \partial x^{(l)i}} \cdot \overset{(n+1+l)j}{x} + a_l(x,\dot{x},\dots,\overset{(n+l)}{x})\Big) + (-1)^{n+1} \cdot a(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n+1)}{x}) = \bar{a}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n+1)}{x})$$

$$\sum_{l=0}^{n+1} (-1)^l D_t^l \Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\Big) = (-1)^{n+1} \Big(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x},\overset{(n+1)}{x})}{\partial x^{(n+1)j} \partial x^{(n+1)i}} \cdot \overset{(2n+2)j}{x} + \bar{a}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n+1)}{x})\Big)$$

Индуктивный переход доказан. **Теорема7** доказана

Теорема 8. Для двух отображений

$\varepsilon_{(x)L}:\ \Re^{(2n+1)m}\supset\varphi_x(V\subset T^{2n}X_m)\to\Re^m$ $\qquad\qquad$ $\varepsilon_{(\bar{x})L}:\ \Re^{(2n+1)m}\supset\varphi_{\bar{x}}(V\subset T^{2n}X_m)\to\Re^m$

Рассмотрим 2 композиии отображений :

$\varepsilon_{(x)L}\circ\varphi_x:\ V\subset T^{2n}X_m\to\Re^m$ и $\varepsilon_{(\bar{x})L}\circ\varphi_{\bar{x}}:\ V\subset T^{2n}X_m\to\Re^m$ Тогда множества решений

уравнений $\varepsilon_{(x)L}\circ\varphi_x(v^{2n})=0\in\Re^m$ и $\varepsilon_{(\bar{x})L}\circ\varphi_{\bar{x}}(v^{2n})=0\in\Re^m$

$v^{2n}\in W\subset T^{2n}X_m$ совпадают , то есть задают в $T^{2n}X_m$ одно и то же гладкое подмногообразие размерности $(2n+1)\cdot m-m=2mn$.

Боле точно, имеет место равенство:

$$\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\varphi_{\bar{x}}(v^{2n}))==\sum_{j=1}^{m}\varepsilon^j_{(x)L}(\varphi_x(v^{2n}))\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\qquad(17)$$

Доказательство $v^{2n}\in V\subset T^{2n}X_m$

$\varphi_x(v^{2n})=(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n)}{x})$ $\qquad$ $\varphi_{\bar{x}}(v^{2n})=\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{\bar{x}}$ **По теореме 5** имеет место следующее равенство:

$$\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{\bar{x}})=\sum_{j=1}^{m}\varepsilon^j_{(x)L}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n)}{x})\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\ \text{. Поэтому}$$

$$\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\varphi_{\bar{x}}(v^{2n}))==\sum_{j=1}^{m}\varepsilon^j_{(x)L}(\varphi_x(v^{2n}))\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\ \text{ то есть}$$

$$\varepsilon^i_{(\bar{x})L}\circ\varphi_{\bar{x}}(v^{2n})==\sum_{j=1}^{m}\varepsilon^j_{(x)L}\circ\varphi_x(v^{2n})\cdot\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}$$

Соотношение (17) доказано.

В матрице Якоби $\dfrac{\partial\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(k)j}{x}},k=\overline{0,2n},i=\overline{1,m}$ отображения

$\varepsilon_{(\bar{x})L}:\ \Re^{(2n+1)m}\supset\varphi_{\bar{x}}(V\subset T^{2n}X_m)\to\Re^m$

размером $m\times(2n+1)\bullet m$ существует невырожденный минор порядка $m\times m$: **по теореме 7**

$$\varepsilon^i_{(x)L}(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n)}{x})=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D^l_t\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\Big)=(-1)^n\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}x^{(2n)j}+g_i(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x}),\ i=\overline{1,m}$$

$$\frac{\partial\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(2n)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(2n)j}{x}}=(-1)^n\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(n)i}{x}\partial\overset{(n)j}{x}},i,j=\overline{1,m}\ \text{ -так как по условию функция}$$

$L:T^nX_m\supset\pi^{2n}_nW\to\Re^m$ — невырожденная ,то $\det\Big(\dfrac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(n)i}{x}\partial\overset{(n)j}{x}}\Big)\neq 0$

Значит, $rk(\frac{\partial\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(k)j}{x}})\geq m$ С другой стороны ранг матрицы Якоби

$rk(\frac{\partial\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(k)j}{x}})\leq \min(m,(2n+1)\bullet m)\leq m, k=\overline{0,2n}, i=\overline{1,m})$ Значит, $rk(\frac{\partial\varepsilon^i_{(\bar{x})L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(2n)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(k)j}{x}})=m$

Следовательно, система уравнений $\varepsilon_{(\bar{x})L}:\ \Re^{(2n+1)m}\supset\varphi_{\bar{x}}(W\subset T^{2n}X_m)\to\Re^m$ задает гладкое подмногообразие размерности $(2n+1)\cdot m-m=2mn$.

Теорема 8 доказана.

Теорема9.(инвариантный критерий решения задачи)

Пусть $T^{2n}X_m\supset V(v_0^{2n})=V$ - окрестность точки $v_0^{2n}\in T^{2n}X_m$

$\pi^{2n}_{2n-1}:T^{2n}X_m\to T^{2n-1}X_m$-каноническая проекция:

$\pi^{2n}_{2n-1}(V)=U(u_0^{2n-1})=U=\{\pi^{2n}_{2n-1}(v)\mid\forall v\in V(w_0^{2n})\},\ \ \pi^{2n}_{2n-1}(v_0^{2n})=u_0^{2n-1}$

$f:T^{2n-1}X_m\supset U(v_0^{2n-1})\to T^{2n}X_m$. -гладкое сечение.

$L:T^nX_m\supset\pi_n^{2n-1}U\to\Re^m$ — невырожденная функция во всей области определения.

$\sigma_f=\sigma_f(U)=\{v^{2n}\in V\subset T^{2n}X_m\mid v^{2n}=f(u^{2n-1}),\ u^{2n-1}\in U(u_0^{2n-1})\}$-подмногообразие сечения f

$\varepsilon_L(V)=\{v^{2n}\in V\subset T^{2n}X_m\mid\ \varepsilon_{(x)L}(\varphi_x(v_x^{2n}))=0\in\Re^m\}$-лагранжево подмногообразие в $T^{2n}X_m$

Тогда $\sigma_f(U)=\sigma_f(\pi^{2n}_{2n-1}(V))=\varepsilon_L(V)$ тогда и только тогда, когда в любой локальной системе координат (x) в базе X_m

$$\varepsilon_{(x)L}\circ\varphi_x\circ f:T^{2n-1}X_m\supset U(u_0^{2n-1})\to\Re^m\equiv 0\in\Re^m$$

Доказательство. По теореме 8 решение уравнения $\varepsilon_{(x)L}\circ\varphi_x(v^{2n})=0\in\Re^m$ не зависит от выбора локальных координат (x) в базе X_m. Значит равенство композиции $\varepsilon_{(x)L}\circ\varphi_x\circ f:T^{2n-1}X_m\supset U(u_0^{2n-1})=0\in\Re^m$ не зависит от выбора локальных координат Так как $f:T^{2n-1}X_m\supset U(u_0^{2n-1})\to T^{2n}X_m$. -гладкое сечение, то в локальной системе координат (x) в базе X_m это сечение задается уравнением $\overset{(2n)i}{x}=f^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-1)}{x})$ (18)

$\varepsilon_L(V)$ задается системой уравнений Эйлера-Лагранжа

$$\varepsilon^i_{(x)L}(x,\dot{x},...,\overset{(2n)}{x})=\sum_{l=0}^{n}(-1)^lD_t^l(\frac{\partial L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}})=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}x^{(2n)j}+g^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-1)}{x})=0,\ i=\overline{1,m}\quad(19)$$

Равенство $\sigma_f(U)=\sigma_f(\pi^{2n}_{2n-1}(V))=\varepsilon_L(V)$ означает , что наборы $\overset{(2n)i}{x}=f(x,\dot{x},...,\overset{(2n-1)}{x})$ являются решением системы уравнений (18) .Это значит, что

$$\varepsilon^i_{(x)L}(x,\dot{x},...,\overset{(2n)}{x}=f(x,\dot{x},...,\overset{(2n-1)}{x}))=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2L(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}f^j(x,\dot{x},...,\overset{(2n-1)}{x})+g^i(x,\dot{x},...,\overset{(2n-1)}{x})=0,\ i=\overline{1,m}\quad(20)$$

Пусть существует набор $(x,\dot{x},...,\overset{(2n-1)}{x},\overset{(2n)}{x})$ являющийся решением (19), но не удовлетворяющий

условию (18) , то есть $\overset{(2n)j}{x} = f_j(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x}) + d_j$, $|d| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} d_j^2} \neq 0$ Тогда

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}x^{(2n)j} + g^i(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x}) = 0 = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}(f_j(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x}) + d_j) + g^i(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x}) =$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}(f_j(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x}) + g^i(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x}) + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}d_j = 0,\ i = \overline{1,m} \quad \text{В силу равенства} \qquad (21)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}(f_j(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x}) + g^i(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x}) = 0,\ i = \overline{1,m} \ \text{Значит,}\ \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}d_j = 0,\ i = \overline{1,m} \qquad (22)$$

Так как $L : T^n X_m \supset \pi_n^{2n-1} U \to \Re$ — невырожденная функция , то **по теореме 4** в любой системе координат $\det(\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}\partial \overset{(n)j}{x}}) \neq 0$ Значит, существует обратная матрица

$(\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x}\partial \overset{(n)i}{x}})^{-1}$, $k,i = \overline{1,m}$

$$\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x}\partial \overset{(n)i}{x}})^{-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}} = \delta_j^k \ , \quad \text{где} \quad \delta_j^k = \begin{cases} 1, j = k \\ 0, j \neq k \end{cases} - \text{символ Кронеккера}$$

$$\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x}\partial \overset{(n)i}{x}})^{-1}(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}d_j) = \sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x}\partial \overset{(n)i}{x}})^{-1}\cdot 0 = 0 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x}\partial \overset{(n)i}{x}})^{-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}d_j =$$

$$\sum_{j=1}^{m}d_j(\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x}\partial \overset{(n)i}{x}})^{-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}) = \sum_{j=1}^{m}d_j\,\delta_j^k = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}d_j\,\delta_j^k + d_k\delta_{j=k}^k = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}d_j\cdot 0 + d_k\delta_k^k = d_k\ ,k = \overline{1,m} \qquad (23)$$

В правой части (22) $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}d_j\,\delta_j^k = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}d_j\cdot 0 = 0$ так как $\delta_j^k = \begin{cases} 1, j = k \\ 0, j \neq k \end{cases} - \text{символ Кронеккера}$

То есть $\overline{d} = (d_1, d_2,..., d_m) = (0,0,...,0) = \overline{0}$ Получили противоречие с тем , что $\overset{(2n)j}{x} = f_j(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x}) + d_j$, $|d| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} d_j^2} \neq 0$ Значит , решением системы (19) являются только наборы вида (18). **Теорема 9** доказана.

Следствие из **теоремы 9** вытекает, что лагранжевость сечения $f : T^{2n-1}X_m \supset U(v_0^{2n-1}) \to T^{2n}X_m$ которое в локальных координатах задается системой ОДУ $\overset{(2n)j}{x} = f^j(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x})$, $j = \overline{1,m}$ в точности означает существоование невырожденной матрицы $a_{ij}(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})$, $\det(a_{ij}(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})) \neq 0$ такой что

$$\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})(\overset{(2n)j}{x} - f^j(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x})) = \sum_{j=1}^{m}a_{ij}(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})\cdot 0 = 0 =$$

$$\varepsilon^{i}_{(x)L}(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n)}{x})=\sum_{l=0}^{n}(-1)^{l}D_t^{l}(\frac{\partial L(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}})=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j}\partial x^{(n)i}}x^{(2n)j}+g_i(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x})=0,\ i=\overline{1,m}$$

Итак, сформулированная выше задача лагранжевых сечений в расслоенных пространствах скоростей в локальных координатах означает существование невырожденной системы уравнений Эйлера-Лагранжа,
разрешая которую относительно старших производных можно получить ОДУ с заданной правой частью.
Возникает естественный вопрос : существуют ли не лагранжевы сечения. Оказывается при $n>1$ существует прозрачный необходимый признак.

Теорема 10 $L(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})$ -локальная запись функции $L:T^{n}X_{m}\to\Re$ в локальной системе координат (x) в базе X_m расслоения $T^{n}X$ Тогда

$$D_t^{k}L(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})=\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,...,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,...k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}C^{j_1,j_2,...,j_r}_{k_1,...k_r}(x,...,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot...\cdot x^{(k_r)j_r}+h(x,...,\overset{(n)}{x})\ ,k\ge 1\quad(24)$$

Доказательство. Проведем индукцией по k

База индукции $k=1$:

$$D_t^{k}L(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})=\sum_{p=1}^{k=1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,...,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,...,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}C^{j_1,j_2,...,j_r}_{k_1,...,k_r}(x,...,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot...\cdot x^{(k_r)j_r}+h(x,...,\overset{(n)}{x})=$$

$$\sum_{r=1}^{p=1}\sum_{j_1,...,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,...,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}C^{j_1,j_2,...,j_r}_{k_1,...,k_r}(x,...,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot...\cdot x^{(k_r)j_r}+h(x,...,\overset{(n)}{x})=\quad(25)$$

Так как $r=p=1$, то выражение (25) примет вид

$$\sum_{\substack{n+1\le k_1,...k_r 1\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}C^{j_1,j_2,...,j_r}_{k_1,...k_r}(x,...,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot...\cdot x^{(k_r)j_r}+h(x,...,\overset{(n)}{x})=$$

$$\sum_{j_1=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1\\ k_1=n+1}}C^{j_1,j_2,...,j_r}_{k_1,...,k_r}(x,...,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot...\cdot x^{(k_r)j_r}+h(x,...,\overset{(n)}{x})=\sum_{j_1=1}^{m}C^{j_1,}_{n+1}(x,...,\overset{(n)}{x})x^{(n+1)j_1}+h(x,...,\overset{(n)}{x})\quad(26)$$

$$D_t^{k=1}L(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})=D_tL(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})=\sum_{j_1=1}^{m}\sum_{p=0}^{n}\frac{\partial L(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(p)j_1}}x^{(p+1)j_1}=\sum_{j_1=1}^{m}(\sum_{p=0}^{n-1}\frac{\partial L(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(p)j_1}}x^{(p+1)j_1}+\frac{\partial L(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j_1}}x^{(n+1)j_1})=$$

$$\sum_{j_1=1}^{m}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{\partial L(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(p)j_1}}x^{(p+1)j_1}+\sum_{j_1=1}^{m}\frac{\partial L(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j_1}}x^{(n+1)j_1}=\sum_{j_1=1}^{m}\frac{\partial L(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)j_1}}x^{(n+1)j_1}+h(x,...,\overset{(n)}{x})$$

База индукции доказана.
Индуктивный переход.
Пусть утверждение верно для k . Докажем, что оно верно для $k+1$:

$$D_t^{k+1}L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})=\sum_{p=1}^{k+1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}\overline{C}_{k_1,\ldots k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+\overline{h}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})\ ,k\ge 1 \qquad (27)$$

По предположению индукции :

$$D_t^{k}L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})=\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}C_{k_1,\ldots,k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+h(x,\ldots,\overset{(n)}{x})\ ,k\ge 1$$

Учитывая, что $\quad D_t(\prod_{s=1}^{r}f_s)=\sum_{u=1}^{r}\frac{\prod_{s=1}^{r}f_s}{f_u}D_tf_u$

$$D_t^{k+1}L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})=D_t(D_t^kL(x,\dot{x},\ldots,x))=D_t(\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}C_{k_1,\ldots k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}\overset{(n)}{}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+h(x,\ldots,\overset{(n)}{x})\ )=$$

$$\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}D_tC_{k_1,\ldots,k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}\overset{(n)}{}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+D_th(x,\ldots,\overset{(n)}{x})+$$

$$\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}C_{k_1,\ldots k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})D_tx^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}C_{k_1,\ldots k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot D_tx^{(k_r)j_r}=$$

$$\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}D_tC_{k_1,\ldots,k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+D_th(x,\ldots,\overset{(n)}{x})+$$

$$\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}C_{k_1,\ldots k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1+1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+\ldots+\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}C_{k_1,\ldots k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}x^{(k_2+1)j_2}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+$$

$$\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}C_{k_1,\ldots,k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r+1)j_r}= \qquad (28)$$

Условие $\sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{r}(k_i-n)=p$

$$D_tC_{k_1,\ldots k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})=\sum_{j=1}^{m}\sum_{u=0}^{n}\frac{\partial C_{k_1,\ldots k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{x^{(u)j}}x^{(u+1)j}=\sum_{j=1}^{m}B_{k_1,\ldots k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(n+1)j}+D_{k_1,\ldots k_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})$$

То есть набору $(k_1,\ldots k_r):\sum_{i=1}^{r}(k_i-n)=p$ в сумме

$$\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}} D_t C_{k_1,\dots,k_r}^{j_1,j_2,\dots,j_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r} \qquad (29)$$

будет соответствовать набор

$(k_1,\dots,k_r,k_{r+1}=n+1):\sum_{i=1}^{r+1}(k_i-n)=\sum_{i=1}^{r}(k_i-n)+(n+1-n)=p+1$

В (29) $r\le p\le k\Rightarrow r+1\le k+1, p+1\le k+1$,а так как в (27) $r\le p\le k+1$,то все слагаемые вида(29)

Войдут в сумму (27)

Каждому набору $(k_1,..,k_i,..,k_r):\sum_{j=1}^{r}(k_j-n)=p$ в сумме (28):

$$\sum_{p=1}^{k}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}} C_{k_1,\dots,k_r}^{j_1,j_2,\dots,j_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots x^{(k_i+1)j_i}\ldots\cdot x^{(k_r)j_r} =$$

Соответствует набор $(k_1,..,k_i+1,.,k_r):\sum_{j=1}^{r}(k_j-n)=p+1$

В (28) $r\le p\le k\Rightarrow p+1\le k+1$,а так как в (27) $r\le p\le k+1$,то все слагаемые вида(28)

Войдут в сумму (27)

Еще одно слагаемое в (28)

$$D_t h(x,\dots,\overset{(n)}{x})=\sum_{j=1}^{m}\sum_{u=0}^{n}\frac{\partial h(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{x^{(u)j}}x^{(u+1)j}=\sum_{j=1}^{m}B(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(n+1)j}+D(x,\dots,\overset{(n)}{x})$$

Очевидно входит в сумму (27) при $r=p=1$ и в свободный член $\bar{h}(x,\dots,\overset{(n)}{x})$ (27) Итак, все слагаемые суммы (28) являются членами суммы (27) Индуктивный переход доказан.

Теорема 10 доказана

Замечание Все слагаемые в сумме при $l\ge 1, l<k$

$$D_t^l L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})=\sum_{p=1}^{l}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}} C_{k_1,\dots k_r}^{j_1,j_2,\dots,j_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+h(x,\dots,\overset{(n)}{x}),\ l\ge 1, l<k \qquad (30)$$

Структурно входят в сумму (24) ,так как $l\le k$, и все условия в сумме (30) выполняются для суммы (24)

Замечание

$k_1-n=s_1, k_2-n=s_2,\dots,k_r-n=s_r\Rightarrow s_1\ge 1, s_2\ge 1,\dots,s_r\ge 1 \quad k_1=s_1+n,\dots,k_r=s_r+n$

$$D_t^l L(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x})=\sum_{p=1}^{l}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{1\le s_1,\dots,s_r\\ \sum_{i=1}^{r}s_i=p}} C_{s_1,\dots,s_r}^{j_1,j_2,\dots,j_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(s_1+n)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(s_r+n)j_r}+h(x,\dots,\overset{(n)}{x}),\ l\ge 1$$

Теорема 11 Пусть $\overset{(2n)i}{x}=f_j(x,\dot{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x}), i=\overline{1,m}$ - локальная запись в системе (x) в базе X_m гладкого сечения $f:T^{2n-1}X_m\supset U(u_0^{2n-1})\to T^{2n}X_m$, $n>1$, являющегося лагранжевым сечением в окрестности $U(u_0^{2n-1})$ карты $(U(u_0^{2n-1}),\varphi_x)$

$\varphi_x : U(u_0^{2n-1}) \to \Re^{2mn}$ - координатный диффеоморфизм

$\varphi_x(U(u_0^{2n-1})) = W_{\Re^{2mn}(x)}(x_0, \overset{\bullet}{x}_0,..., \overset{(2n-1)}{x_0}) \subset \Re^{2mn}$

$\varphi_x(U(u_0^{2n-1})) = (x, \overset{\bullet}{x},..., \overset{(2n-1)}{x})$ Тогда

$$f_i(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x}) = \sum_{r=2}^{n} \sum_{j_1,...,j_r=1}^{m} \sum_{\substack{1\le s_1,...,s_r \\ \sum_{i=1}^{r} s_i = n}} C^{ij_1,j_2,...,j_r}_{s_1,...,s_r}(x,...,\overset{(n)}{x}) x^{(n+s_1)j_1} \cdot ... \cdot x^{(n+s_r)j_r} +$$

$$\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,...,j_r=1}^{m} \sum_{\substack{n+1\le k_1,...,k_r \\ \sum_{i=1}^{r} s_i = p}} C^{ij_1,j_2,...,j_r}_{s_1,...,s_r}(x,...,\overset{(n)}{x}) x^{(n+s_1)j_1} \cdot ... \cdot x^{(n+s_r)j_r} + h_i(x,...,\overset{(n)}{x}) \quad (31)$$

Доказательство. На основании **теоремы 7**

$$\varepsilon^i_{(x)L}(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n)}{x}) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}} x^{(2n)j} + g_i(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x}) = 0,\ i = \overline{1,m}$$

Разрешая эту систему относительно старших производных, умножая обе части на $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}}\right)^{-1}$, в силу невырожденности функции $L : T^n X_m \to \Re^m$ $\left(\det\left(\frac{\partial^2 L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x} \partial \overset{(n)j}{x}}\right) \ne 0\right)$,

$$f_i(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x}) = -\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)j} \partial x^{(n)i}}\right)^{-1} g_j(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x})$$

, получим систему ОДУ $\overset{(2n)i}{x} = f_i(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n-1)}{x}), i = \overline{1,m}$.

Член со старшей производной в сумме $\varepsilon^i_{(x)L}(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(2n)}{x}) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right)$ (32)

равен $D_t^n\left(\frac{\partial L(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)i}}\right)$ На основании **теоремы 10** имеет место равенство **:**

$$D_t^n\left(\frac{\partial L(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)i}}\right) = \sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,...,j_r=1}^{m} \sum_{\substack{n+1\le k_1,...k_r \\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+p}} C^{ij_1,j_2,...,j_r}_{k_1,...k_r}(x,...,\overset{(n)}{x}) x^{(k_1)j_1} \cdot ... \cdot x^{(k_r)j_r} + h_i(x,...,\overset{(n)}{x}),\ n \ge 1 \quad (33)$$

По замечанию к теореме 10 все члены суммы (34) при $l < n$ структурно входят в сумму (33)

$$D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\overset{\bullet}{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)i}}\right) = \sum_{p=1}^{l}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,...,j_r=1}^{m} \sum_{\substack{n+1\le k_1,...k_r \\ \sum_{i=1}^{r} k_i = rn+p}} C^{ij_1,j_2,...,j_r}_{k_1,...k_r}(x,...,\overset{(n)}{x}) x^{(k_1)j_1} \cdot ... \cdot x^{(k_r)j_r} + h_i(x,...,\overset{(n)}{x}),\ l \ge 1 \quad (34)$$

Поэтому вся сумма (32) будет структурно иметь вид (33):

$$D_t^n\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)i}}\Big)=\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}} C^{ij_1,j_2,\ldots,j_r}_{k_1,\ldots k_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+h_i(x,\ldots,\overset{(n)}{x})\ (n\ge 1)= \qquad (35)$$

По теореме 7 $C^{ij_1}_{2n}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})=\dfrac{\partial^2 L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}\,\partial \overset{(n)j_1}{x}}$ (36)

Слагаемым $\overset{(2n)j_1}{x}$, $j_1=\overline{1,m}$ в (35) с максимальным порядком производной , равным $2n$,имеющим коэффициенты вида (36) соответствует условие $\sum_{i=1}^{r=1}(k_i-n)=n\Rightarrow k_1=2n$ то есть $r=1, p=n$

Все остальные слагаемые в (35) зависят от производных

Порядка не выше $2n-1$. Поэтому выделение в (35) слагаемых $\overset{(2n)j_1}{x}$, $j_1=\overline{1,m}$ в отдельную сумму $\sum_{j_1=1}^{m}C^{ij_1}_{2n}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})\overset{(2n)j_1}{x}=\sum_{j_1=1}^{m}\dfrac{\partial^2 L(x,\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}\,\partial \overset{(n)j_1}{x}}\overset{(2n)j_1}{x}$ означает исключение из (35) слагаемых с $r=1 u\ p=n$

Отрицание условие $(r=1)\wedge(p=n)$ имеет вид

$\overline{(r=1)\wedge(p=n)}=\overline{r=1}\vee\overline{p=n}=(r\ne 1)\vee(p\ne n)$

Условие $(r\ne 1)\wedge(p\ne n)$ включается в условие $(p\ne n)$ Это следует из

$(r\ne 1)=(r\ne 1)\wedge 1=(r\ne 1)\wedge((p=n)\vee(p\ne n))=(r\ne 1)\wedge(p=n)\ \vee\ (r\ne 1)\wedge(p\ne n)$

$(r\ne 1)\vee(p\ne n)=(\ (r\ne 1)\wedge(p=n)\ \vee\ (r\ne 1)\wedge(p\ne n))\ \vee\ (p\ne n)=$

$(\ (r\ne 1)\wedge(p=n))\ \vee\ ((r\ne 1)\wedge(p\ne n))\ \vee\ (p\ne n)\ =(\ (r\ne 1)\wedge(p=n))\vee((r\ne 1)\wedge(p\ne n))\ \vee\ (p\ne n)\wedge 1)=$

$(\ (r\ne 1)\wedge(p=n))\vee((r\ne 1)\vee 1)\wedge(p\ne n)=(\ (r\ne 1)\wedge(p=n))\ \vee\ ((r\ne 1)\vee 1)\wedge(p\ne n)$

Так как $((r\ne 1)\vee 1)=1$ и $((r\ne 1)\vee 1)\wedge(p\ne n)=1\wedge(p\ne n)=(p\ne n)$ то,

$(\ (r\ne 1)\wedge(p=n))\ \vee\ ((r\ne 1)\vee 1)\wedge(p\ne n)=(\ (r\ne 1)\wedge(p=n))\ \vee(p\ne n)$

Итак, $(r\ne 1)\vee(p\ne n)=(\ (r\ne 1)\wedge(p=n))\ \vee(p\ne n)=(\ r\ge 2)\wedge(p=n))\vee(p\le n-1)$

(37)

Условия $(\ (r\ne 1)\wedge(p=n))$ и $(p\le n-1)$ не пересекаются.

$$D_t^n\Big(\frac{\partial L(x,\dot{x},\ldots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(n)i}}\Big)=\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}} C^{ij_1,j_2,\ldots,j_r}_{k_1,\ldots k_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+h_i(x,\ldots,\overset{(n)}{x})\ =$$

$$\sum_{j_1=1}^{m}C^{ij_1}_{2n}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})\overset{(2n)j_1}{x}+\sum_{p=1}^{n}\sum_{\substack{r=1\\(r\ne1)\vee(p\ne n)}}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}} C^{ij_1,j_2,\ldots,j_r}_{k_1,\ldots,k_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+h_i(x,\ldots,\overset{(n)}{x})=$$

$$\sum_{j_1=1}^{m}C^{ij_1}_{2n}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})\overset{(2n)j_1}{x}+\sum_{p=1}^{n}\sum_{\substack{r=1\\(\ (r\ge2)\wedge(p=n))\ \vee(p\le n-1)}}^{p}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\ldots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}} C^{ij_1,j_2,\ldots,j_r}_{k_1,\ldots,k_r}(x,\ldots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+h_i(x,\ldots,\overset{(n)}{x})=$$

$$\sum_{j_1=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}\,\partial \overset{(n)j_1}{x}}\overset{(2n)j_1}{x}+\sum_{r=2}^{n}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+n}}C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+$$

$$\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+h_i(x,\dots,\overset{(n)}{x})$$

(38)

Итак уравнения $\varepsilon^i_{(x)L}(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(2n)}{x})=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial x^{(l)i}}\right)=0$ структурно будут иметь вид (38)

$$\sum_{j_1=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)i}{x}\,\partial \overset{(n)j_1}{x}}\overset{(2n)j_1}{x}=-\sum_{r=2}^{n}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+n}}C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}-$$

$$\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+h_i(x,\dots,\overset{(n)}{x}) \qquad (39)$$

Так как $\left(\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x}\,\partial \overset{(n)j_1}{x}}\right)^{-1}$ зависит от роизводных порядка n При умножении обеих частей (39) на обратную матрицу $\left(\frac{\partial^2 L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(n)k}{x}\,\partial \overset{(n)j_1}{x}}\right)^{-1}$ правая часть (39) сохранит свой структурный вид

$$\overset{(2n)i}{x}=f_i(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x})=\sum_{r=2}^{n}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+n}}C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+$$

$$\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}k_i=rn+p}}C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(k_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(k_r)j_r}+h_i(x,\dots,\overset{(n)}{x}) \qquad (40)$$

При замене переменных в (40)

$k_1-n=s_1, k_2-n=s_2,\dots,k_r-n=s_r \Rightarrow s_1\ge 1, s_2\ge 1,\dots,s_r\ge 1 \quad k_1=s_1+n,\dots,k_r=s_r+n$ получим:

$$\overset{(2n)i}{x}=f_i(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x})=\sum_{r=2}^{n}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{1\le s_1,\dots,s_r\\ \sum_{i=1}^{r}s_i=n}}C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{s_1,\dots,s_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})x^{(n+s_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(n+s_r)j_r}+$$

$$\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}s_i=p}} C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{s_1,\dots,s_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})\,x^{(n+s_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(n+s_r)j_r}+h_i(x,\dots,\overset{(n)}{x}) \qquad (40)$$

Теорема 11 доказана.

Теорема 12 Пусть $\overset{(2n)i}{x}=f_j(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x}),\ i=\overline{1,m}$ - локальная запись в системе (x) в базе X_m гладкого сечения $f:T^{2n-1}X_m\supset U(u_0^{2n-1})\to T^{2n}X_m$, $n>1$,
являющегося лагранжевым сечением в окрестности $U(u_0^{2n-1})$ Тогда

$$f_i(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x})=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a_{kji}(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(n)}{x})\,\overset{(n+1)k}{x}\,\overset{(2n-1)j}{x}+\sum_{j=1}^{m}b_{ji}(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(n)}{x})\,\overset{(2n-1)j}{x}\quad+\quad c_i(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(2n-2)}{x})\ \ i=\overline{1,m}$$

Доказательство. Следует из **теоремы 11** равенство (31) :

$$f_i(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(2n-1)}{x})=\sum_{r=2}^{n}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{1\le s_1,\dots,s_r\\ \sum_{i=1}^{r}s_i=n}} C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{s_1,\dots,s_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})\,x^{(n+s_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(n+s_r)j_r}+$$

$$\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}s_i=p}} C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{s_1,\dots,s_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})\,x^{(n+s_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(n+s_r)j_r}+h_i(x,\dots,\overset{(n)}{x}) \quad (41)$$

Слагаемые со старшей производной в
$\sum_{r=2}^{n}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{1\le s_1,\dots,s_r\\ \sum_{i=1}^{r}s_i=n}} C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{s_1,\dots,s_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})\,x^{(n+s_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(n+s_r)j_r}$ имеют вид

$a(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(n)}{x})\ \overset{(n+n-1)}{x}\ \overset{(n+1)}{x}$.Это следует при $r=2$ из $s_1+s_2=n$,то решениями являются наборы $(s_1,s_2)=(n-1,1)$, $(s_1,s_2)=(n-2,2)$,… Член со старшей производной -
$a(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(n)}{x})\ \overset{(2n-1)}{x}\ \overset{(n+1)}{x}$

Аналогично слагаемые со старшей производной во второй сумме
$\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{p}\sum_{j_1,\dots,j_r=1}^{m}\sum_{\substack{n+1\le k_1,\dots,k_r\\ \sum_{i=1}^{r}s_i=p}} C^{ij_1,j_2,\dots,j_r}_{s_1,\dots,s_r}(x,\dots,\overset{(n)}{x})\,x^{(n+s_1)j_1}\cdot\ldots\cdot x^{(n+s_r)j_r}+h_i(x,\dots,\overset{(n)}{x})$ имеют вид

$b(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(n)}{x})\ \overset{(n+n-1)}{x}$.Это следует при $r=1, p=n-1$ из $s_1=p=n-1$,то решениями являются наборы $(s_1)=(n-1)$ Член со старшей производной -

$b(x,\overset{\bullet}{x},\dots,\overset{(n)}{x})\ \overset{(2n-1)}{x}$.**Теорема12** доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин В. А. Современная геометрия. Методы и приложения / В. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. – М.: УРСС, 1994.
2. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. – М.: Гостехиздат, 1956.
3. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия / А. В. Погорелов. – М. : Наука, 1974.
4. Арнольд В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. – М.: Наука, 1974.
5. Ландау Л. Д. Теоретическая физика: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 7-е изд., испр. – М.: Наука, 1988. – Т. 2: Теория поля. – 512 с.
6. Ландау Л. Д. Теоретическая физика: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 7-е изд., испр. – М.: Наука, 1988. – Т. 1: Механика. – 214 с.
7. Галеев Э. М. Краткий курс теории экстремальных задач / Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. – М. : Изд-во МГУ, 1989. – 203 с.
8. Дирак П. Лекции по квантовой механике / П. Дирак. – М.: Мир, 1968.
9. Обобщение теоремы Гамильтона – Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка / С. Г. Ехилевский [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 125–133.
10. Закон преобразования обобщенного импульса / С. Г. Ехилевский [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 85–99.
11. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л. Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии»: ВИНИТИ. – 1979. – Т. 9. – С. 5–246.
12. Трофимов В. В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых и дифференциальных уравнений / В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко. – М.: Факториал, 1995.
13. Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов, С.В. Голубева // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. - 2015. - № 12. - С. 117-123
14. Об эффективном поиске безусловного экстремума гладких функционалов в конечномерных задачах /С.В. Голубева, С.Г. Ехилевский, Д.Ф Пастухов, Ю.Ф.Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. - 2016. - № 4. - С. 119
15. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю.Ф.Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. - 2015. - № 4. - С. 27- 36
16.Тензор обобщенной энергии / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного
университета. Серия С, Фундаментальные науки. - 2017. - № 12. - С. 78-100
17. Группы преобразований, сохраняющие вариационную задачу со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. - 2018. - № 4. - С. 194-209.
18. Сборник статей по дифференциальной геометрии / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/22094
19. Необходимые условия в обратной вариационной задаче / Ю.Ф. Пастухов // Фундамент. и прикл. матем., **7**:1 (2001), 285–288 http://mi.mathnet.ru/rus/fpm/v7/i1/p285 , http://mi.mathnet.ru/fpm550

LAGRANGIAN SECTIONS

Y. PASTUKHOV, D. PASTUKHOV
(POLOTSK STATE UNIVERSITY)

Annotation. The concept of Lagrangian sections in fibered velocity spaces of arbitrary order is defined invariantly, their properties are formulated and proved, an invariant criterion for solving the problem is given, a necessary condition for Lagrangian sections and ODE systems of arbitrary even order is obtained.