УДК 519.21; 519.22

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ, ОБУСЛОВЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫМИ ВСТРЕЧАМИ N УЧАСТНИКОВ

д-р тех. наук, доц. С.Г. ЕХИЛЕВСКИЙ, Т.С. РУДЬКОВА
(Полоцкий государственный университет, Беларусь)

Задача о случайной встрече возникает при моделировании многих физических, химических и социальных процессов. В частности, таким образом можно объяснить зависимость скорости химической реакции от её порядка и механизм действия катализатора.

Для двух встречающихся решение упомянутой задачи приведено практически во всех учебниках. Но уже трёхмерный случай сопряжён с громоздкими пространственными построениями и по этой причине, как правило, не рассматривается. Нами предлагается предельно прозрачное и лаконичное рассмотрение трёхмерного случая и обобщение ответа для произвольного числа n участников случайной встречи.

При $n = 2$ для временного промежутка T и времени ожидания каждого участника не более τ минут множество элементарных событий представляет собой квадрат, состоящий из точек (x, y), $0 \le x \le T$, $0 \le y \le T$, где x и y – время прихода первого и второго участника. Встреча двух участников состоится, если благоприятствующие этому событию точки будут удовлетворять неравенству $|x - y| < \tau$ или $\begin{cases} y \ge x - \tau \\ y \le x + \tau \end{cases}$. Другими словами, точки квадрата, благоприятствующие встрече, заключены между прямыми $y = x - \tau$ и $y = x + \tau$ (рисунок 1).

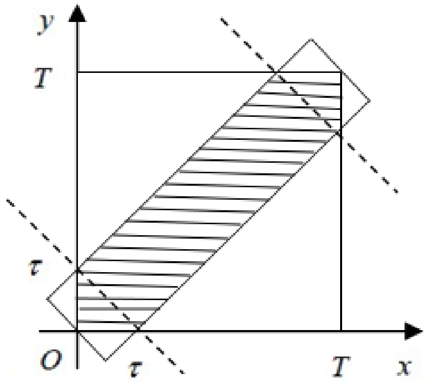

Рисунок 1. – Геометрическая интерпретация задачи о встрече двух участников

Тогда, в соответствии с геометрическим определением вероятности, вероятность P_2 встречи двух участников равна отношению площади s заштрихованной фигуры к площади S квадрата со стороной T (рисунок 1):

$$P_2 = \frac{s}{S} = \frac{T^2 - (T - \tau)^2}{T^2} = \frac{\tau(2T - \tau)}{T^2}. \qquad (1)$$

При $\tau = T$ получим $P_2 = 1$, что показывает спаведливость данной формулы.

Обобщим полученный результат на случай трёх участников.

Для развития аналогии получим иначе выражение для площади s заштрихованной фигуры в двухмерном случае. Умножим ширину заштрихованной полоски $d = \tau\sqrt{2}$ на длину диагонали большего квадрата $L = T\sqrt{2}$ и вычтем площадь короткой полосы той же ширины с длиной $l = \tau\sqrt{2}$ равной диагонали малого квадрата без принадлежащей ей площади малого квадрата τ^2 (рисунок 2).

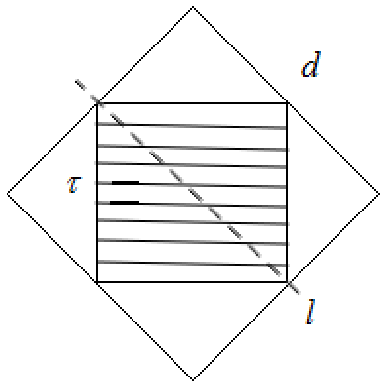

Рисунок 2. – Малый квадрат с диагональю $l = \tau\sqrt{2}$

Таким образом, площадь s заштрихованной фигуры в двухмерном случае, также можно вычислить по следующей формуле:

$$s = dL - (dl - \tau^2) = \tau\sqrt{2} \cdot T\sqrt{2} - (\tau\sqrt{2} \cdot \tau\sqrt{2} - \tau^2) = \tau(2T - \tau). \qquad (2)$$

При $n = 3$, т.е. для нахождения вероятности встречи трёх участников, необходимо перейти в трёхмерное пространство, где множество всех элементарных исходов будет представлять собой куб с ребром равным T. Условие встречи $\begin{cases} |x - y| \le \tau \\ |x - z| \le \tau \\ |y - z| \le \tau \end{cases}$, где z – момент время прихода третьего участника, выделит вокруг пространственной диагонали куба область объёма v (рисунок 3), ограниченную тремя парами плоскостей, расстояние между которыми равно ширине заштрихованной полосы (рисунок 1), и тремя парами параллельных граней.

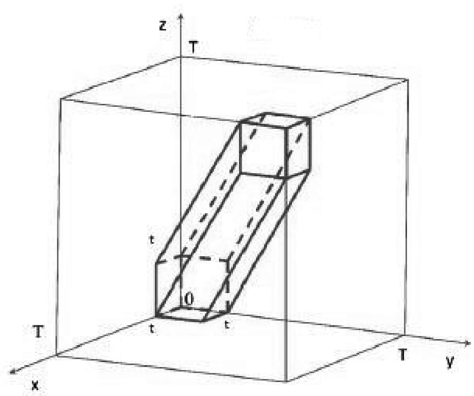

Рисунок 3. – Геометрическая интерпретация задачи о встрече трёх участников

В силу симметрии, поперечное сечение области – правильный шестиугольник площадью s (рис. 4).

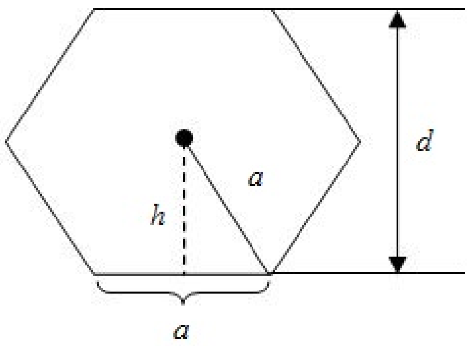

Рисунок 4. – Правильный шестиугольник площадью s

Поэтому, с геометрической точки зрения, вероятность встречи трёх участников равна отношению объёма «области встречи» к объёму куба, т.е. $P_3 = \frac{v}{V}$.

По аналогии с формулой (2) вычисления площади s заштрихованной фигуры в двухмерном случае, опредетяется объём «области встречи»:

$$v = sL - (sl - \tau^3), \quad (4)$$

где $L = T\sqrt{3}$ и $l = \tau\sqrt{3}$ – длины пространственных диагоналей большого и малого куба соответственно.

В правильном шестиугольнике расстояние между противоположными сторонами равно $2h = d = \tau\sqrt{2}$. Согласно теореме Пифагора $a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h = \frac{\tau^2}{2}$ (рисунок 3), длина стороны правильного шестиугольника равна $a = \tau\sqrt{\frac{2}{3}}$, а площадь правильного шестиугольника: $S = 6S_\Delta = \frac{6ha}{2} = \tau^2\sqrt{3}$.

Отсюда следует, что объём «области встречи» равен $v = sL - (sl - \tau^3) = \tau^2\sqrt{3} \cdot T\sqrt{3} - (\tau^2\sqrt{3} \cdot \tau\sqrt{3} - \tau^3) = \tau^2(3T - 2\tau)$, поэтому вероятность встречи трёх участников равна:

$$P_3 = \frac{\tau^2(3T - 2\tau)}{T^3}. \quad (5)$$

Обобщая приведенные выше соотношения, получаем, что вероятность встречи нескольких объектов с учётом одинакового времени ожидания находится по формуле:

$$P_n = \frac{\tau^{n-1}(nT - (n-1)\tau)}{T^n}. \quad (6)$$

Литература

1. Гельгор, А.Л. Теоретико-информационные основы телекоммуникационных систем : учеб. пособие / А.Л. Гельгор, Е.А. Попов. – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2013. – 288 с.
2. Гмурман, В.Е. Теория вероятности и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 2003. – 479 с.
3. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятности и математической статистики / В.Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 2004. –404 с.