УДК 517.983

МНОГОМЕРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО РОДА С ФУНКЦИЕЙ КУМЕРА В ЯДРЕ

канд. физ-мат. наук., доц. О.В. СКОРОМНИК
(Полоцкий государственный университет, Беларусь)

Рассмотрим интегральное преобразование в левой части (1)

$$\left(I_{\mathbf{a}+}^{\alpha,\beta,\lambda} f\right)(\mathbf{x}) \equiv \int_{a_1}^{x_1}\ldots\int_{a_n}^{x_n} \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} F\left(\beta;\alpha;\lambda(\mathbf{x}-\mathbf{t})\right) f(\mathbf{t})d\,\mathbf{t} = g(\mathbf{x}),\ \ \mathbf{x} > \mathbf{a}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$; $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in R^n$ – векторы; $\mathbf{x}\cdot\mathbf{t} = \sum_{k=1}^{n} x_k t_k$; $\mathbf{x} > \mathbf{t}$ означает $x_1 > t_1, \ldots,\ x_n > t_n$; $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in R^n$, $\lambda_i > 0$, $(i = 1, \ldots, n)$; $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R^n$, $0 < \alpha_i < 1\ \ (i = 1, \ldots, n)$; $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in R^n$; $k = (k_1, \ldots, k_n) \in - \ N^n$ индекс с $k! = k_1! \cdots k_n!$ и $|k| = k_1 + \ldots + k_n$; $D^k = \dfrac{\partial^{|k|}}{(\partial x_1)^{k_1} \cdots (\partial x_n)^{k_n}}$; $\mathrm{d}\,\mathbf{t} = d\,t_1 \cdots d\,t_n$; $(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{\alpha-1} = (x_1 - t_1)^{\alpha_1 - 1} \ldots (x_n - t_n)^{\alpha_n - 1}$; $f(\mathbf{t}) = f(t_1, \ldots, t_n)$. Функция $F\left(\beta;\alpha;\lambda(\mathbf{x}-\mathbf{t})\right) = \prod_{j=1}^{n} {}_1F_1\left(\beta_j;\alpha_j;\lambda_j(\mathrm{x}_j - t_j)\right)$, где ${}_1F_1(a;c;z)$ – функция Куммера [1, §1]:

$${}_1F_1(a;c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!} = \lim_{b\to\infty} {}_2F_1\left(a, b; c; \frac{z}{b}\right),\ \ |z| < \infty, \tag{2}$$

здесь $(a)_k$ – символ Похгаммера: $(a)_0 \equiv 1$, $(a)_k = a(a+1)\ldots(a+k-1)$ $(a \in C; k \in N)$, ${}_2F_1(a,b;c;z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса [1, §1]. Областью интегрирования оператора преобразования в левой части (1) является прямоугольный параллелепипед с противоположными вершинами $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_2)$. В работе преобразование (1) изучается в пространстве $L_{\overline{p}}(\mathbf{a},\mathbf{b})$, $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset R^n$, $-\infty < \mathbf{a} < \mathbf{b} < \infty$, $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $1 \le \overline{p} < \infty$, функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, имеющих конечную норму [1, § 24.4]:

$$\|f\|_{\overline{p}} = \{\int_{a_n}^{b_n}[\ldots[\int_{a_2}^{b_2}[\int_{a_1}^{b_1}|f(x_1, \ldots, x_n)|^{p_1} dx_1]^{p_2/p_1} dx_2]^{p_3/p_2} \ldots]^{p_n/p_{n-1}} dx_n\}^{1/p_n} < \infty .$$

Выражения $\left(\mathrm{I}_{\mathbf{a}+}^{\alpha}\varphi\right)(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_{a_1}^{x_1}\ldots\int_{a_n}^{x_n} \frac{\varphi(\mathbf{t})}{(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{1-\alpha}} d\mathbf{t}\ (\alpha > 0, \mathbf{x} > \mathbf{a})$,

$$\left(D_{\mathbf{a}+}^{\alpha} f\right)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} \int_{a_1}^{x_1}\ldots\int_{a_n}^{x_n} \frac{f(\mathbf{t})d\mathbf{t}}{(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{\alpha}} \quad (0 < \alpha < 1, \mathbf{x} > \mathbf{a})$$

называют соответственно (левосторонним) смешанным дробным интегралом и смешанной дробной производной Римана–Лиувилля порядка α [1, § 24.2].

Введем пространство функций $\mathrm{I}^{\alpha}_{\mathbf{a}+}(L_{\overline{p}}(\mathbf{a},\mathbf{b}))=\{f: f=\mathrm{I}^{\alpha}_{\mathbf{a}+}\varphi, \varphi\in L_{\overline{p}}(\mathbf{a},\mathbf{b}),$ $-\infty<\mathbf{a}<\mathbf{b}<\infty, 1<\overline{p}<\dfrac{1}{\alpha}, 0\le\alpha<1\}$. Пространство $\mathrm{I}^{\alpha}_{\mathbf{a}+}(L_{\overline{p}}(\mathbf{a},\mathbf{b}))$ играет ту же роль для уравнения (1), что и пространство $AC([a,b])$ абсолютно непрерывных функций для классического интегрального уравнения Абеля [1, §2.2].

Исходя из представления ядра оператора преобразования (1) через ряд (2) и воспользовавшись формулой [1, формула (1.56)], выписываем следующую формулу, отражающую структуру оператора (1): $I^{\alpha,\beta,\lambda}_{\mathbf{a}+}=I^{\alpha}_{\mathbf{a}+}\left(E-\lambda I^{1}_{\mathbf{a}+}\right)^{-\beta}$, где E – единичный оператор. На основании [1, теоремы 25.2, 37.1] получаем.

Теорема 1. Оператор в левой части (1) ограниченно действует из пространства $L_{\overline{p}}(\mathbf{a},\mathbf{b})$, $\overline{p}\ge 1$, на пространство $I^{\alpha}_{\mathbf{a}+}\left(L_{\overline{p}}(\mathbf{a},\mathbf{b})\right)$, $1<\overline{p}<\dfrac{1}{\alpha}$; $0\le\alpha<1$, $\lambda>0$, $-\infty<\mathbf{a}<\mathbf{b}<\infty$.

Если в (1) $\mathbf{a}=0$ или $\mathbf{a}>0$, но функция $f(\mathbf{t})$ доопределена нулем на интервал $0<\mathbf{t}<\mathbf{a}$, то применяем многомерное преобразование Лапласа [1, формула (24.49)] к левой части равенства (1), получаем

$$\left(L\, I^{\alpha,\beta,\lambda}_{\mathbf{0}+} f\right)(s)=s^{-\alpha}\left(1-\lambda s^{-1}\right)^{-\beta}\left(Lf\right)(s)\;\; (s=(s_1,...,s_n)>0; \lambda=(\lambda_1,...,\lambda_n)>0). \quad (4)$$

Как показывает формула (4), преобразование Лапласа $\left(Lh\right)(s)$ ядра $h(\mathbf{x})$ оператора (1) и соответствующая ему обратная величина $\left[\left(Lh\right)(s)\right]^{-1}$ имеют одинаковую форму, отличаясь лишь значениями параметров. В простейшем случае оператора дробного интегрирования $I^{\alpha}_{\mathbf{0}+}$, которому соответствует $\left(Lh\right)(s)=s^{-\alpha}$ с условием $\mathrm{Re}(\alpha)>0$ [1, формула (24.50)], для преобразования Лапласа s^{α} ядра обратного оператора $D^{\alpha}_{\mathbf{0}+}$ условие $\mathrm{Re}(\alpha)>0$ вынуждает нас представить s^{α} в виде $s^{\alpha}=s^{n}s^{-(n-\alpha)}$, где $\mathrm{Re}(n-\alpha)>0$, причем значению s^{n} соответствует оператор $\left(\dfrac{d}{d\mathbf{x}}\right)^{n}=D^{n}_{\mathbf{0}+}$ [1, равенство (18.12)]. Подобные операции необходимо осуществлять и при обращении оператора (1).

Пользуясь формулой (4) и формулой [2, формула 6.3(7)], получаем

$$f(\mathbf{x})=\left\{\left(I^{\alpha,\beta,\lambda}_{\mathbf{a}+}\right)^{-1} g\right\}(\mathbf{x})=I^{-\alpha}_{\mathbf{a}+}\left(E-\lambda I^{1}_{\mathbf{a}+}\right)^{\beta} g(\mathbf{x})=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}}\left(\mathbf{x}-\mathbf{t}\right)^{-\alpha}\,{}_1F_1\left(-\beta;1-\alpha;\lambda(\mathbf{x}-\mathbf{t})\right)\frac{dg(\mathbf{t})}{d\mathbf{t}}d\mathbf{t}. \quad (5)$$

Теорема 2. Пусть задано уравнение (1) $\left(I^{\alpha,\beta,\lambda}_{\mathbf{a}+} f\right)(\mathbf{x})=g(\mathbf{x})$, $0\le\mathbf{a}<\mathbf{x}<\mathbf{b}<\infty, 0<\alpha<1,\;\; \lambda>0$; $g(\mathbf{x})$ – заданная на $[\mathbf{a},\mathbf{b}]\subset R^{n}$ функция; $f(\mathbf{x})$ – искомая функция (в случае $\mathbf{a}>0$ полагается, что $f(\mathbf{x})=g(\mathbf{x})=0$ при $0<x<\mathbf{a}$), тогда его решение f в классе $L_{\overline{p}}(\mathbf{a},\mathbf{b})$, $\mathbf{b}<\infty$, существует и единственно, если

$g(\mathbf{x}) \in I_{\mathbf{a}+}^{\alpha}\left(L_{\overline{p}}(\mathbf{a},\mathbf{b})\right)$, $\overline{p} \geq 1$. В случае $\overline{p} = 1$ оно может быть представлено формулой (5), если еще выполняются дополнительные условия $g(\mathbf{x}) \in I_{\mathbf{a}+}^{\alpha}\left(L_{\overline{p}}(\mathbf{a},\mathbf{b})\right)$, $g(\mathbf{a}) = 0$.

Литература

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции : в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1973. – Т. 1 : Гипергеометрическая функция Гаусса. Функция Лежандра. – 294 с.