

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗЕРКАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОГО СЕНСОРА.**

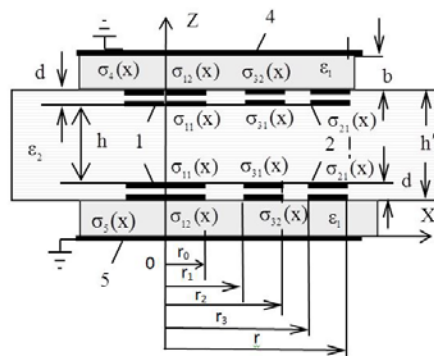
**д-р техн. наук, доц., А.А. ДЖЕЖОРА**

*(Витебский государственный технологический университет, Беларусь);*

**д-р техн. наук, проф. В.В. РУБАНИК**

*(ИТА НАН Беларуси)*

Целый ряд материалов обладает ортогональной анизотропией физико-механических свойств и относится к ортотропным средам. Самой большой чувствительностью к анизотропии диэлектрических свойств обладает зеркально-симметричный накладной измерительный сенсор [1], в виде пары ленточных многосекционных FEF sensors. Сечение одной секции сенсора представлено на рисунке 1



**Рисунок 1. – Сечение секции сенсора**

Математическая модель зеркально-симметричного сенсора строилась с учетом диэлектрических свойств материала и подложек, геометрических размеров контролируемого материала и самого чувствительного элемента.

Для численного 2D моделирования был использован метод интегральных уравнений Фредгольма первого рода совместно с методом зеркальных отображений. В отличие от метода конечных элементов данный метод менее требователен к вычислительным ресурсам и позволяет проводить расчеты емкостных сенсоров без потери точности за более короткий промежуток времени.

Расчеты проводились на примере одной секции многосекционного сенсора. Электрическое поле, создаваемое высокопотенциальными электродами 1, проникая через контролируемый материал, замыкается на низкопотенциальные электроды 2. Охранной электрод 3 располагался между электродами 1 и 2. Поле в пространстве подложек ограничено экранами 4 и 5. Низкопотенциальные электроды 2и электроды 3 имеют потенциал земли  $V_2$ . Область контроля определяется геометрическими размерами секции датчика: шириной секции  $r$ , межэлектродным расстоянием  $h$  и толщиной электродов  $d$ .

Основная идея заключалась в том, что при создании математической модели сенсора каждый электрод рассматривался в виде двух бесконечно тонких электродов, разнесенных в пространстве на расстояние равное толщине реальных электродов  $d$  рис.1. Такое рассмотрение электродов не противоречит физике в силу того, что поверх-

ности электродов эквипотенциальны, и поле внутри электродов отсутствует. Поле выходит за пределы внутренней области и имитирует поле ЭП, в том числе и в воздушных карманах, образованных реальными электродами.

В качестве исходного выражения при составлении интегральных уравнений для потенциалов точек на поверхности электродов использовалось выражение логарифмического потенциала:

$$V = \frac{1}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{1}{r_{MN}} \sigma, \quad (1)$$

где  $\sigma$  - заряд на отрезке  $l$  в сечении электрода,  $r_{MN}$  - расстояние между рассматриваемой точкой  $M$  и переменной точкой  $N$  (зарядом, создающим поле в точке  $M$ ).

Для записи интегральных уравнений поверхностная плотность зарядов на электродах обозначалась двумя индексами  $\sigma_{ik}$ . Первый индекс соответствует номеру электрода на рисунке 1, а второй – стороне поверхности: 1 – соответствует поверхностной плотности заряда на стороне электрода, обращенной к контролируемому материалу, 2 – на стороне электрода, обращенной к подложке. Очевидно, в силу симметрии

$$\sigma_{1k}(x) = \sigma_{1k}(-x); \sigma_{2k}(x) = \sigma_{2k}(-x); \sigma_{3k}(x) = \sigma_{3k}(-x); \sigma_3(x) = \sigma_3(-x) = \sigma_4(x) = \sigma_4(-x). \quad (2)$$

Промежутки интегрирования разбивались на участки, где искомые функции поверхностной плотности заряда  $\sigma(x)$  принимали постоянные значения. Это позволило в дальнейшем, согласно методу Крылова-Боголюбова, выносить их за знаки интегралов, преобразуя систему интегральных уравнений в систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Границы интегрирования участков на поверхности электродов, обращенной к контролируемому материалу, записывались в виде:

$$\beta_i = r_0 \frac{1 - q_1^i}{1 - q_1^{n_1}}, \quad \alpha_i = r_0 \frac{1 - q_1^{i-1}}{1 - q_1^{n_1}}, \quad \beta_i = r_2 - (r_2 - r_1) \frac{1 - q_2^{i-n_1-1}}{1 - q_2^{n_2}}, \quad \alpha_i = r_2 - (r_2 - r_1) \frac{1 - q_2^{i-n_1}}{1 - q_2^{n_2}},$$

$$\beta_i = r - (r - r_3) \frac{1 - q_3^{i-n_1-n_2-1}}{1 - q_3^{n_3}}, \quad \alpha_i = r - (r - r_3) \frac{1 - q_3^{i-n_1-n_2}}{1 - q_3^{n_3}} \quad \text{где } i = 1, 2, 3, \dots, n_1 + n_2 + n_3, \quad (3)$$

Аналогично на поверхности электродов, обращенной к подложке. На экранах:

$$\beta_i = r \frac{1 - q_5^{i-n_1-n_2-n_3-n_4-n_5-n_6}}{1 - q_4^{n_7}}, \quad \alpha_i = r \frac{1 - q_5^{i-n_1-n_2-n_3-n_4-n_5-n_6-1}}{1 - q_4^{n_7}}, \quad \text{где } i = n_1 + \dots + n_6, \dots, n_1 + \dots + n_7, \quad (4)$$

$q_1, q_2, q_3, q_4$  – знаменатели геометрической прогрессии:  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$  – числа разбиений поверхностей на участки на двух сторонах электродов.

Моделирование поля датчика осуществлялось в трехслойной среде. Наведенные на границе раздела слоев связанные заряды учитывались с помощью метода зеркальных отображений. Они заменялись сосредоточенными зарядами, отраженными от границы раздела слоев. Коэффициенты пропускания  $\beta_{12}, \beta_{21}$ , коэффициенты отражений  $\lambda_{12}, \lambda_{21}$  и коэффициент двойных отражений  $\gamma$  вычислялись согласно [2]:

Поле датчика создается зарядами каждой пары электродов зеркально-симметричной конструкции, их отражениями, а также наведенными зарядами экранов 3 и 4. С целью сокращения записи для потенциалов точек  $x_j$ , лежащих на поверхности электродов, была введена функция:

$$\begin{aligned} \psi_i(x_j, \phi) = & \sum_{m=1}^N \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \frac{\sigma_i(t)}{2} \ln \left| (2rm+t+x_j)^2 + \phi^2 \right| \left| (2rm-t+x_j)^2 + \phi^2 \right| \left| (2rm+t-x_j)^2 + \phi^2 \right| \left| (2rm-t-x_j)^2 + \phi^2 \right| dt \\ & + \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \frac{\sigma_i(t)}{2} \ln \left| (t-x_j)^2 + \phi^2 \right| \left| (t+x_j)^2 + \phi^2 \right|, \quad i=1, \dots, n_1 + \dots + n_5, \quad j=1, \dots, n_1 + \dots + n_5, \end{aligned} \quad (5)$$

где координаты точек  $x_j$  на поверхности электродов определяются выражением:  $x_j = (\alpha_j + \beta_j)/2$ ;  $N$  – число секций слева и справа от центральной секции;  $\alpha_i, \beta_i$  – границы участков интегрирования заряда, создающего поле в точке  $x_j$ .

В этом случае выражение для потенциалов точек на поверхностях электродов центральной секции, обращенных к контролируемому материалу ( $0 \leq x_j \leq r_0$ ,  $r_1 \leq x_j \leq r$ ,  $z = b + d$ ), записывалось в виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n_1 + \dots + n_3} \left[ \psi_i(x_j, 0) + \sum_{s=0}^T \left[ \gamma^s \lambda_{21} \psi_i(x_j, 2d + 2sh') + 2\gamma^s \psi_i(x_j, 2(s+1)h') + \gamma^s \lambda_{21} \psi_i(x_j, 2(s+1)h' + h) \right] \right] \\ & + \sum_{i=n_1 + \dots + n_3 + 1}^{n_1 + \dots + n_6} \left[ (1 + \lambda_{21}) \psi_i(x_j, d) + \sum_{s=1}^T \left[ \gamma^s (1 + \lambda_{21}) \psi_i(x_j, 2sh' + d) + \right. \right. \\ & \left. \left. (\gamma^s + \lambda_{23} \gamma^{s-1}) (1 + \lambda_{21}) \psi_i(x_j, 2sh' - d) \right] \right] + \sum_{i=n_1 + \dots + n_6 + 1}^{n_1 + \dots + n_7} \left[ \sum_{s=1}^T \left[ \gamma^{s-1} \lambda_{21} \beta_{12} \psi_i(x_j, 2sh' + b - d) + \right. \right. \\ & \left. \left. \gamma^s \beta_{12} \psi_i(x_j, b + 2sh' + d) \right] + \beta_{12} \psi_i(x_j, b + d) \right] + \sum_{i=n_1 + \dots + n_7 + 1}^{n_1 + \dots + n_8} \left[ \sum_{s=0}^T \left[ \gamma^s \beta_{12} \psi_i(x_j, b + (2s+1)h' - d) + \right. \right. \\ & \left. \left. \gamma^s \lambda_{21} \beta_{12} \psi_i(x_j, b + (2s+1)h' + d) \right] \right] + \sum_{i=n_1 + \dots + n_8 + 1}^{n_1 + \dots + n_{11}} \left[ \sum_{s=0}^T \left[ \gamma^s \psi_i(x_j, h + 2sh') + 2\gamma^s \lambda_{21} \psi_i(x_j, (2s+1)h') + \right. \right. \\ & \left. \left. \gamma^{s+1} \lambda_{21} \psi_i(x_j, (2s+1)h' + 2d) \right] \right] + \sum_{i=n_1 + \dots + n_{11} + 1}^{n_1 + \dots + n_{14}} \left[ \sum_{s=0}^T \left[ \gamma^s (1 + \lambda_{21}) \psi_i(x_j, h + d + 2sh') + \right. \right. \\ & \left. \left. (\gamma^{s+1} + \lambda_{21} \gamma^s) \psi_i(x_j, (2s+1)h' + d) \right] \right] = -\varepsilon_2 \varepsilon_0 2\pi V(x_j), \quad j=1, \dots, n_1 + \dots + n_3 \end{aligned} \quad (6)$$

где  $T$  – число отражений.

Для потенциалов точек на поверхностях электродов, обращенных к подложке ( $0 \leq x_j \leq r_0$ ,  $r_1 \leq x_j \leq r$ ,  $z = b$ ) и экранов выражения записывались аналогичным образом.

С учетом, того что общий заряд системы равен нулю:

$$\int_0^{r_0} (\sigma_{11}(t) + \sigma_{12}(t)) dt + \int_{r_1}^{r_2} (\sigma_{31}(t) + \sigma_{32}(t)) dt + \int_{r_3}^r (\sigma_{21}(t) + \sigma_{22}(t)) dt + \int_0^r \sigma_3(t) dt = 0 \quad (7)$$

составлялась система  $n_1 + \dots + n_7 + 1$  интегральных уравнений. Ее решением являются дискретные значения функций распределения поверхностных зарядов  $\sigma_{11i}, \sigma_{12i}, \sigma_{21i}, \sigma_{22i}, \sigma_{31i}, \sigma_{32i}, \sigma_{3i}$  и потенциала  $V_2$ .

Для верхней пары электродов 1 и 2 ( $z = b + d$ ) частичная межэлектродная емкость  $C_{12}^B$ , одной секции вычисляется:  $C_{12}^B = L \sum_{i=n_2+1}^{n_2+n_3} \sigma_{21}(x_i) l_i / (V_1 - V_2)$ , (8)

$$\text{для нижней пары } (z = b) C_{12}^H = L \sum_{i=n_1 + \dots + n_5 + 1}^{n_1 + \dots + n_6} \sigma_{22}(x_i) l_i / (V_1 - V_2) \quad (9)$$

частичная емкость одной секции между высокопотенциальным электродом 1 и экраном 4  $C_{14}$  равна:  $C_{14} = L \sum_{i=n_1 + \dots + n_6 + 1}^{n_1 + \dots + n_7} \sigma_3(x_i) l_i / (V_1 - V_2)$ , (10)

Программы для моделирования полей МЭНИК были написаны с использованием системы компьютерной математики MAPLE. Для визуализации поля выполнялся расчет эквипотенциалов электрического поля в воздухе ( $\epsilon_2 = 1$ ). Расчет проводился после нахождения дискретных значений распределения поверхностной плотности заряда  $\sigma_{1k}(x)$ ,  $\sigma_{2k}(x)$ ,  $\sigma_3(x)$ . Для конструкций сенсора толщина подложек  $b$  равнялась 2 мм, толщина электродов  $\mu = 35$  мкм, размер секции  $r = 4$  мм, ширина потенциальных электродов  $r_0 = r - r_1 = 1$  мм, одноименные электроды находились на расстоянии  $h = 4$  мм друг от друга. Диэлектрическая проницаемость подложки  $\epsilon_1 = 2.1$ . Расчетная картина электрического поля сенсора без охранного электрода представлена на рисунке 2.

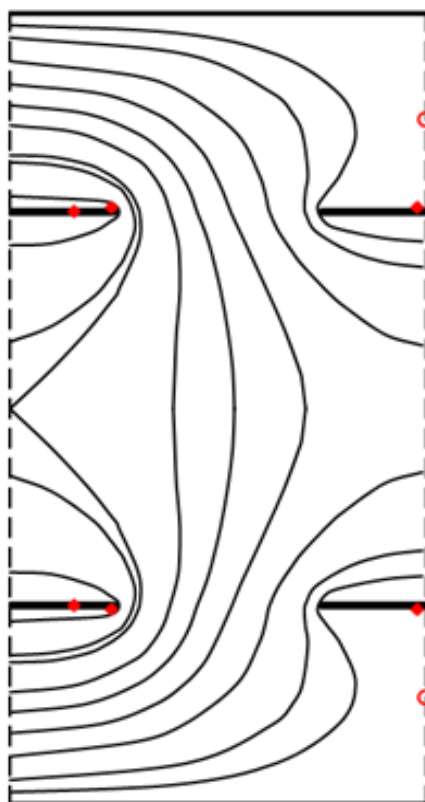


Рисунок 2. – Расчетная картина электрического поля 1 мм

Точками на поверхностях электродов выделены границы раздела потоков, замыкающихся на электроды “ощущения” 2 и экраны 3, 4, кольцами – на границах раздела секций. Координаты точек вычислялись посредством теоремы Остроградского-Гаусса. Координаты колец вычислялись через нахождение экстремума функции  $V(r, z)$ . На рисунке 2 рабочая область за тонирована. Выбор шагов разбиения поверхности электродов и экранов для заданного числа участков  $n_1 + \dots + n_7 + 1$ , проверка сходимости численных расчетов емкости сенсора с точными проводилась для частного случая однородной среды ( $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ ), когда зеркально-симметричные сенсоры совмещены  $h = 0.001$ , а толщина электродов бесконечно мала  $d = 0,001$  мм. Значения емкостей для нее вычислялись методами конформных отображений и непосредственного определения напряженности электрического поля [4]. Расхождения в вычислении межэлектродных емкостей составляют менее 0,03 %.

Составные части сенсора были выполнены из двустороннего фольгированного фторопласта толщиной  $b=2,00$  мм, толщина фольги (электродов)  $d = 0,035$  мм. Для двух FEF sensors, входящих в конструкцию, длина электродов  $L = 25$  мм, число секций  $N = 6$  были одинаковы. При изготовлении электродов FEF sensors химическим травлением фольгированного фторопласта не удалось выдержать все размеры строго. С помощью микроскопа проводились измерения геометрических размеров всех электродов двух FEF sensors. Затем находились средние значения геометрических размеров электродов для каждого FEF sensors, проводились расчеты. Экспериментальные результаты и результаты численных расчетов представлены в таблице. Точность численных расчетов для частного случая разнесения FEF sensors  $h \rightarrow \infty$  достаточно высока. Ошибка расчета емкостей составила менее 2.5 %. Для собранной конструкция развернутого зеркального сенсора (FEF sensors лежат в одной плоскости) за счет соединений была внесена дополнительная емкость, она составила 0,041 пФ. При расчете относительной ошибки ее значение вычиталось из емкости сенсора. Результаты численных расчетов и измеренной емкости сенсора в случае когда  $h = 2.8$  мм и  $h = 1.6$  мм, представлены в таблице. Относительная ошибка расчета составила менее 4.5%.

Созданная модель носит общий характер, включает в себе модели FEF sensors. Модель позволяет проводить обоснованный выбор конструкции и параметров электроемкостных сенсоров, определять метрологические характеристики измерительного устройства, решать вопрос технической осуществимости поставленной задачи. Пакет программ, создаваемый на основе представленной модели, может с успехом применяться для проектирования сенсоров, неразрушающего контроля анизотропии диэлектрических свойств тонких полимерных материалов.

Таблица – сравнение расчетных и измеренных значений емкостей FEF sensors, входящих в конструкцию зеркального сенсора

№	h, мм	r, мм	r <sub>0</sub> , мм	W	C <sub>12</sub> <sup>расч</sup> , пФ	C <sub>12</sub> <sup>изм</sup> , пФ	δC, %
FEF sensors 1	∞	3.97	1.08	0.544	1.089	1.115	2.3
FEF sensors 2	∞	3.96	1.11	0.562	1.141	1.155	1.19
sensors	∞	3.96	1.11	0.562	2.230	2.271	1.76
sensors	1.6	3.96	1.11	0.562	1.741	1.850	3.92
sensors)	2.8	3.96	1.11	0.562	2.059	2.186	4.19

### Литература

1. Способ измерения анизотропии свойств полимерных материалов : а. с. (СССЗ) 1549327 / А.А. Джежора, В.В. Щербаков, В.Л. Шушкевич, Л.И. Кузнецова. – Оpubл. 1990.
2. Джежора, А.А. Электроемкостные преобразователи и методы их расчета / А.А. Джежора. – Минск : Изд. дом «Белорусская наука», 2008. – 305 с.
3. Джежора, А.А. Моделирование накладных измерительных конденсаторов в присутствии заземленной плоскости / А.А. Джежора // Метрология и приборостроение. – 2010. – № 2 (49). – С. 38–42.
4. Перспективные технологии и методы контроля / Джежора А.А. [и д.р.]. – Витебск : Изд-во УО «ВГТУ», 2009. – 521 с.